УДК 517.5 + 531

Е. С. Синайский, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. горн. ин-т)

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ НАСЛЕДСТВЕННОУПРУГИХ ТЕЛ

A boundary-value problem is considered for an inhomogeneous heredirarily elastic body. This problem is formulated in terms of a linear equation with an operator of fractional integration, partial derivatives with respect to time and space variables, and coefficients of polynomial type in one of the variables. An approximate solution of the problem is constructed by using Dzyadyk's a-method and the Laplace transformation. It is proved that the approximation error of the function and its derivatives decreases in geometric progression.

Розглядається крайова задача механіки для неоднорідного спадковопружного тіла, яка формулюється як лінійне рівняння з оператором дробового інтегрування, частинними похідними за змінними часу та простору та коефіцієнтами многочленного типу за однією зі змінних. Наближений розв'язок задачі будується за a-методом В. К. Дзядика з використанням перетворення Лапласа. Доводиться, що похибки наближення шуканої функції та її похідних спадають як геометрична прогресія.

1. В механике наследственноупругих тел связь между изменяющимися во времени t напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ для линейного и одномерного случая устанавливается посредством интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода [1]

$$\sigma(t) = E_t\varepsilon(t), \quad E_t := E_0(1 - \lambda K^*), \quad K^*\varepsilon(t) := \int_0^t K(t-\tau)\varepsilon(\tau)\,d\tau. \qquad (1)$$

Ядро $K(t)$, адекватно описывающее реакцию тела на внешнее воздействие, в точке $t=0$ имеет интегрируемую особенность. В качестве ядра $K(t)$ широко применяется экспонента дробного порядка [1]

$$K(t) = Э_{\gamma-1}(\chi; t) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi^{n-1} t^{n\gamma-1}/\Gamma(n\gamma), \quad \chi < 0, \quad 0 < \gamma \le 1, \qquad (2)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Оператор Вольтерра K^* с ядром (2), т. е. $K^* = Э^*_{\gamma-1}(\chi)$, выражается через оператор дробного интегрирования I^*_γ [1]:

$$Э^*_{\gamma-1}(\chi) = \frac{I^*_\gamma}{1-\chi I^*_\gamma}, \quad I^*_\gamma\varphi(t) := \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\varphi(\tau)\,d\tau. \qquad (3)$$

С учетом (3) операторный модуль упругости E_t представляется дробно-линейной функцией оператора I^*_γ. Аналогичную структуру имеют и другие физические модули. Внесение этих модулей в исходные соотношения линейной теории упругости приводит к тому, что разрешающим уравнением для той или иной задачи механики наследственноупругого тела становится некоторое линейное интегро-дифференциальное уравнение с оператором дробного интегрирования I^*_γ и частными производными по временной и пространственным координатам. Для неоднородного тела коэффициенты уравнения являются функциями пространственных координат.

В пространственно одномерном случае уравнения описанного типа относятся к следующему общему виду:

$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{r=0}^{m}\left[a^0_{sr}(x) + a^1_{sr}(x)I^*_\gamma\right]D^r y^{(k-s)}(x,t) = (1+\lambda_1 I^*_\gamma)f(x,t), \qquad (4)$$

где $y(x, t)$ — искомая функция, $y^{(j)}(x, t) := \partial^j y / \partial x^j$, $D^r y(x, t) := \partial^r y / \partial t^r$, λ_1 — число.

Остановимся на рассмотрении уравнения (4), предполагая в нем заданные функции $a_{sr}^0(x)$, $a_{sr}^1(x)$, $f(x, t)$ многочленами по степеням x. Пусть $f(x, t) := \sum_{i=0}^{n_1} F_i(t) x^i$, функции $F_i(t)$ непрерывны при $t \geq 0$, $a_{0m}^0(x) \geq a_* = \text{const} > 0$, $x \in [0, 1]$.

Начальные условия задачи будем считать нулевыми:

$$D^r y(x, t)|_{t=0} = 0, \quad r = \overline{0, m-1}. \tag{5}$$

Краевые условия задачи запишем таким образом:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 I_\gamma^*) Y(0, t) + (\beta_0 + \beta_1 I_\gamma^*) Y(1, t) = (I + \lambda_2 I_\gamma^*) U(t). \tag{6}$$

Здесь α_0, α_1, β_0, β_1, λ_2, I — числовые $(k \times k)$ матрицы, I — единичная матрица, $U(t) := (U_j)$ и $Y(x, t) := (\dot{Y}_j)$ — матрицы-столбцы, $U_j = U_j(t)$ — заданные m раз непрерывно дифференцируемые функции, причем

$$D^r U_j(t)|_{t=0} = 0, \quad r = \overline{0, m-1}, \quad \dot{Y}_j = \dot{Y}_j(x, t) := y^{(j-1)}(x, t), \quad j = \overline{1, k}.$$

Эффективным средством решения дифференциальных и интегральных уравнений с многочленными коэффициентами является а-метод В. К. Дзядыка [2 – 7]. В области вещественных переменных построенный по этому методу аппроксимирующий полином осуществляет приближение искомой функции, близкое к наилучшему в чебышевской метрике. В данной статье а-метод применяется в сочетании с преобразованием Лапласа по переменной t. Это приводит к зависимости коэффициентов изображающих уравнений от комплексного параметра, что требует специального изучения.

При отсутствии временного фактора равенства (4), (6) представляют собой краевую задачу, рассмотренную в [4, 7]:

$$\sum_{s=0}^{k} a_s(x) y^{(k-s)}(x) = f(x), \quad \alpha_0 Y(0) + \beta_0 Y(1) = U. \tag{7}$$

Будем предполагать, что для всякой непрерывной функции $f(x)$ и всякого вектора $U = (U_j)$ решение задачи (7) существует и единственно. Соотношения (7) приводятся к эквивалентным интегральным уравнениям относительно функций $y^{(r)}(x)$, $r = 0, 1, \ldots$. Решения этих уравнений представляются в следующей форме [7]:

$$y^{(r)}(x) = \int_0^1 L_r(x, \xi) S_r(f; U; \xi) d\xi + S_r(f; U; x), \tag{8}$$

где функция $L_r(x, \xi)$ непрерывна в области $0 \leq x, \ \xi \leq 1$, $S_r(f; U; x)$ — сумма непрерывных линейных операторов от f и U в отдельности, $S_r(f; U; x) = A_r(f, x) + B_r(U, x)$. Конкретный вид операторов A_r и B_r, связанный с обозначениями статьи [7], здесь несуществен. Важно лишь наличие оценок

$$\|A_r(f, x)\|_C \leq M_1^r \|f\|_C, \quad \|B_r(U, x)\|_C \leq M_2^r \|U\|$$

и, как следствие, с учетом (8) равномерной по $r = \overline{0, k}$ оценки

$$\| y^{(r)}(x)\|_C \le M_1 \|f\|_C + M_2 \| U \|, \tag{9}$$

где M_1^r, M_2^r, M_1, M_2 — постоянные,

$$\|f\|_C := \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|, \quad \| U \| := \left(\sum_{j=1}^{k} | U_j |^2 \right)^{1/2}.$$

Допуская, что все величины в задаче (4)–(6) имеют свойства оригиналов, применяем к равенствам (4) и (6) преобразование Лапласа по переменной t. С учетом (5) и известных соотношений операционного исчисления [8] получаем

$$\sum_{s=0}^{k} a_s(x, p)\, \tilde{y}^{(k-s)}(x, p) = \hat{f}(x, p), \tag{10}$$

$$\alpha(p)\, \tilde{Y}(0, p) + \beta(p)\, \tilde{Y}(1, p) = \hat{U}(p). \tag{11}$$

Волнистой чертой сверху здесь отмечены изображения соответствующих оригиналов, p — параметр преобразования,

$$a_s(x, p) := \sum_{r=0}^{m} \left[a_{sr}^0(x) + a_{sr}^1(x) p^{-\gamma} \right] p^r, \quad \alpha(p) := \alpha_0 + \alpha_1 p^{-\gamma},$$

$$\beta(p) := \beta_0 + \beta_1 p^{-\gamma}; \quad \hat{f}(x, p) := (1 + \lambda_1 p^{-\gamma})\, \tilde{f}(x, p), \tag{12}$$

$$\hat{U}(p) := (I + \lambda_2 p^{-\gamma})\, \tilde{U}(p).$$

Соотношения (10), (11) образуют краевую задачу вида (7) относительно трансформанты $\tilde{y}(x, p)$.

Параметр γ, определяемый в механике экспериментально, достаточно считать рациональным числом. В дальнейшем полагаем $\gamma = \mu / \nu$, где μ и ν — натуральные числа, $\mu \le \nu$.

2. Изображение $\tilde{y}(x, p)$ приближаем многочленом

$$\tilde{z}_n(x, p) := \sum_{j=0}^{n} \tilde{b}_j(p)\, x^j. \tag{13}$$

Следуя методике статьи [7], в правые части равенств (10) и (11) вносим выраженные через смещенные полиномы Чебышева $T_j^0(x)$ согласованные между собой невязки:

$$\sum_{s=0}^{k} a_s(x, p)\, \tilde{z}_n^{(k-s)}(x, p) = \hat{f}(x, p) - \tilde{\varepsilon}_n^{(k)}(x, p), \tag{14}$$

$$\alpha(p)\, \tilde{Z}(0, p) + \beta(p)\, \tilde{Z}(1, p) = \hat{U}(p) - V(p). \tag{15}$$

Здесь

$$\tilde{\varepsilon}_n(x, p) := \sum_{i=1}^{l} \tilde{\tau}_i(p)\, T_{n+i,q}(x), \quad T_{n,q}(x) := 2^{2n} \frac{n!}{(n-q)!} \underbrace{\int \ldots \int}_{q} T_{n-q}^0(x) dx, \tag{16}$$

$$T_j^0(x) := \cos j \arccos(2x - 1) = \sum_{i=0}^{j} c_i^j x^i, \quad l := \max_{0 \le s \le k} \{ s + l_s \},$$

l_s — степень многочлена $a_s(x, p)$ по x, $n \ge n_1 - k - l$,

$$V(p) := \alpha e^{-1}(0, p)\,\dot{\mathfrak{E}}(0, p) + \beta e^{-1}(1, p)\,\dot{\mathfrak{E}}(1, p);$$

$$V(p) = (V_j), \quad \dot{\mathfrak{E}}(x, p) = (\dot{\mathfrak{E}}_j), \quad \tilde{Z}(x, p) = (\dot{Z}_j)$$

— столбцовые матрицы размера k, $\dot{\mathfrak{E}}_j := \tilde{\varepsilon}_n^{(j-1)}(x, p)$, $\dot{Z}_j := \tilde{z}_n^{(j-1)}(x, p)$, $e^{-1}(x, p)$ — матрица, обратная квадратной матрице

$$e(x, p) = (e_{ij}), \; i, j = \overline{1, k},$$

$$e_{ij} := \sum_{s=0}^{i-j} (-1)^s \binom{k+s-i}{s} a_{i-j-s}^{(s)}(x, p)$$

при $i \geq j$, $e_{ij} = 0$ при $i < j$,

$$\binom{m}{n} := \frac{1}{n!} m(m-1)\ldots(m-n+1), \; \binom{m}{0} := 1, \quad \text{при } m < n \; \binom{m}{n} := 0,$$

$\tilde{\tau}_i(p)$ — неизвестные величины, определяемые в процессе решения задачи.

После подстановки многочленов (13) и (16) в (14) методом неопределенных коэффициентов при степенях x находятся $n-k+l+1$ равенств, которые вместе с k краевыми условиями (15) образуют линейную алгебраическую систему $n+l+1$ уравнений с неизвестными $\tilde{b}_j(p)$ и $\tilde{\tau}_i(p)$, $j = \overline{0, n}$, $i = \overline{1, l}$. При $\gamma = \mu/\nu$ в (12) коэффициенты этой системы — многочлены с целыми степенями величины $p^{1/\nu}$. Поэтому $\tilde{b}_j(p)$ и $\tilde{\tau}_i(p)$ относительно $p^{1/\nu}$ могут быть только дробно-рациональными функциями. Покажем, что эти дроби правильные.

Согласно общим свойствам лапласовых трансформант для произвольного оригинала $\varphi(t)$ при $p \to \infty$ $\tilde{\varphi}(p) \to 0$, $p\,\tilde{\varphi}(p) \to \varphi(0)$, $p[p\,\tilde{\varphi}(p) - \varphi(0)] \to \to \varphi'(0)$ и т. д. Так как $D^r U_j(t)|_{t=0} = 0$, $r = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{1, k}$, то при $p \to \infty$ $p^m \tilde{U}_j(p) = o(1)$. В этом же процессе $a_s(x, p) = O(p^m)$, $e_{ij} = O(p^m)$, элементы матрицы $e^{-1}(x, p)$ ведут себя как величины $O(p^{-m})$. Если равенство (15) умножить на p^m, то в алгебраической системе, построенной по соотношениям (14), (15), все коэффициенты при $\tilde{b}_j$ окажутся величинами вида $O(p^m)$, а при $\tilde{\tau}_i$ — вида $O(1)$. Чтобы установить степень определителя системы, достаточно в ее коэффициентах удержать лишь старшие слагаемые по p. При этом отделится детерминантное слагаемое, каждый столбец которого, соответствующий $\tilde{b}_j$, имеет общий множитель p^m, а столбцы, отвечающие $\tilde{\tau}_i$, не содержат p. Выделится степень $p^{m(n+1)}$. Коэффициентом при ней служит определитель, возникающий в результате применения той же аппроксимационной процедуры к задаче (7) с одной независимой переменной x. При достаточно больших n такой определитель отличен от нуля [7]. Так как при $p \to \infty$ $\tilde{f}(x, p) = o(1)$, $p^m \tilde{U}_j(p) = o(1)$, то замена любого столбца определителя системы столбцом свободных членов уменьшает степень определителя относительно p. Из этого в силу формул Крамера следует, что при $p \to \infty$ $\tilde{b}_j(p) \to 0$, $\tilde{\tau}_i(p) \to \to 0$. Значит, дроби, представляющие эти величины, правильные.

При известных выражениях $\tilde{b}_j(p)$ обращением преобразования Лапласа находится соответствующий изображению (13) оригинал

$$z_n(x, t) = \sum_{j=0}^{n} b_j(t) x^j, \tag{17}$$

который служит приближением искомой функции $y(x, t)$.

Описанный выше алгоритм при выборе $\tilde{\varepsilon}_n(x, p)$ в форме (16) и вещественных значениях p приводит к хорошему совместному приближению функций $\tilde{y}^{(r)}(x, p)$, $r = \overline{0, q}$, посредством многочленов по x $\tilde{z}_n^{(r)}(x, p)$ соответственно [7]. Специфику настоящего рассмотрения составляет зависимость искомых величин от комплексного параметра p, особенность типа точки разветвления при $\mu \neq \nu$, вопрос о сходимости обратного преобразования Лапласа.

3. В соответствие с принятой в (4) формой функции $f(x, t)$ ее изображение

$$\tilde{f}(x, p) = \sum_{i=0}^{n_1} \tilde{F}_i(p)\, x^i.$$

Матрица-столбец $\tilde{U}(p) = (\tilde{U}_j)$, $j = \overline{1, k}$. Пусть особые точки трансформант $\tilde{F}_i(p)$ и $\tilde{U}_j(p)$ находятся в конечной части плоскости p, т. е. существует область $Q := \{|p| \geq R_0\}$, в которой эти функции регулярны.

Лемма. *В области* $\Omega_p := \{0 \leq x \leq 1,\ |p| \geq R_1 > R_0\}$ *при* $\gamma = \mu/\nu$, μ *и* ν — *натуральные числа,* $\mu \leq \nu$, *решение задачи* (10), (11) *допускает представление*

$$\tilde{y}(x, p) = \sum_{i=0}^{\nu} p^{-i/\nu}\, \psi_i(x, p), \tag{18}$$

где $\psi_i(x, p)$ — *некоторые регулярные функции своих аргументов.*

Доказательство. Подстановка $p^{-1/\nu} = \zeta\,(-\pi < \arg p \leq \pi)$ рационализирует равенства (10), (11). Область Q отображается на область $K := \{|\zeta| \leq \rho := R_0^{-1/\nu}\}$. Регулярные в окрестности точки $p = \infty$ функции $\tilde{f}(x, p)$ и $\tilde{U}(p)$ раскладываются в ряды по обратным степеням p. Указанная подстановка преобразует эти разложения в ряды по целым положительным степеням ζ:

$$\tilde{f}(x, p) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)\zeta^j, \quad \tilde{U}(p) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \zeta^{j+\nu m}. \tag{19}$$

Здесь $f_j(x)$ — многочлены по степеням x либо нули, u_j — числовые матрицы-столбцы, среди которых есть и нулевые, наименьшие степени ζ следуют из того, что при $p \to \infty$ $\tilde{f}(x, p) = o(1)$, $p^m \tilde{U}(p) = o(1)$.

В силу сходимости при $|\zeta| = \rho$ рядов (19) найдутся числа $L_1, L_2 > 0$ такие, что будут выполняться неравенства

$$\|f_j\|_C \leq L_1 R^j, \quad \|u_j\| \leq L_2 R^j, \quad R := \rho^{-1} = R_0^{1/\nu}. \tag{20}$$

Ввиду (5) полагаем

$$\tilde{y}(x, p) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j(x)\zeta^{j+\nu m}, \quad \tilde{Y}(x, p) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(x)\zeta^{j+\nu m}. \tag{21}$$

Элементами столбцовых матриц $Y_j(x)$ служат функции $y_j^{(i-1)}(x)$, $i = \overline{1, k}$.

Разложения (19) и (21) подставляем в равенства (10), (11) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ζ слева и справа. Учитывая (12), получаем при $j = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{r=0}^{m}\left[a_{sr}^{0}(x)\,y_{j-\nu m+\nu r}^{(k-s)}(x)+a_{sr}^{1}(x)\,y_{j-\nu m+\nu r-\mu}^{(k-s)}(x)\right]=f_j(x)+\lambda_1 f_{j-\mu}(x),$$

$$\alpha_0 Y_j(0)+\beta_0 Y_j(1)+\alpha_1 Y_{j-\mu}(0)+\beta_1 Y_{j-\mu}(1)=u_j+\lambda_2 u_{j-\mu}. \tag{22}$$

Здесь величины y_j, Y_j, f_j, u_j — нули, если $j<1$.

В равенствах (22) слева оставляем старшие по индексу j слагаемые, остальные переносим в правую часть. Имеем

$$\sum_{s=0}^{k}a_{sm}^{0}(x)\,y_j^{(k-s)}(x)=f_j(x)+\lambda_1 f_{j-\mu}(x)-H_{j-1}(x),$$

$$\alpha_0 Y_j(0)+\beta_0 Y_j(1)=u_j+\lambda_2 u_{j-\mu}-G_{j-1},\quad j=1,2,\ldots, \tag{23}$$

где

$$H_{j-1}(x):=\sum_{s=0}^{k}\left[\sum_{r=0}^{m-1}a_{sr}^{0}(x)\,y_{j-\nu m+\nu r}^{(k-s)}(x)+\sum_{r=0}^{m}a_{sr}^{1}(x)\,y_{j-\nu m+\nu r-\mu}^{(k-s)}(x)\right],$$

$$G_{j-1}(x):=\alpha_1 Y_{j-\mu}(0)+\beta_1 Y_{j-\mu}(1). \tag{24}$$

При $j=1$ $f_{j-\mu}=0$, $U_{j-\mu}=0$, $H_{j-1}=0$, $G_{j-1}=0$. Получаем краевую задачу (7) для функции $y_1(x)$. При $j=2$ левые части уравнений (23) сохраняют свою форму, а правые могут содержать уже определенную величину $y_1(x)$. Имеем краевую задачу (7) для функции $y_2(x)$ и т. д. В силу исходного предположения о существовании и единственности решения задачи (7) функции $y_j(x)$ определяются однозначно.

Так как наибольшее число слагаемых и коэффициенты в выражениях (24) фиксированы, то верны оценки

$$\|H_{j-1}\|_C\le N_1 h_{j-1},\quad \|G_{j-1}\|\le N_2 h_{j-1},\quad h_j:=\max_{0\le i\le j}\ \max_{0\le r\le k}\left\|y_i^{(r)}(x)\right\|_C. \tag{25}$$

Здесь $\|G_j\|$ — матричная евклидова норма, N_1 и N_2 — постоянные.

Число R_0, а значит, и $R=R_0^{1/\nu}$ можно выбрать сколь угодно большим. Полагаем $M:=M_1L_1+M_2L_2$, где M_i, L_i, $i=1,2$, — постоянные из (9) и (20),

$$\lambda_*=\max\{|\lambda_1|,\|\lambda_2\|\}\quad \text{и}\quad \lambda_*+M_1N_1+M_2N_2\le R.$$

Согласно (9), (20), (25), учитывая правые части (23), имеем

$$\left\|y_j^{(r)}\right\|_C\le jMR^j=jM\rho^{-j},\quad h_j\le jMR^j,\quad r=\overline{0,k},\quad j=1,2,\ldots. \tag{26}$$

Действительно, при $j=1$

$$\left\|y_1^{(r)}\right\|_C\le M_1\|f_1\|_C+M_2\|u_1\|\le(M_1L_1+M_2L_2)R=MR,\ h_1\le MR.$$

Далее по индукции при выполнении (26) находим

$$\left\|y_{j+1}^{(r)}\right\|_C\le M_1(\|f_{j+1}\|_C+|\lambda_1|\,\|f_{j+1-\mu}\|_C+jN_1MR^j)+$$

$$+M_2(\|u_{j+1}\|+\|\lambda_2\|\,\|u_{j+1-\mu}\|+jN_2MR^j)\le MR^{j+1}+$$

$$+M[\lambda_*+j(M_1N_1+M_2N_2)]R^j\le M(j+1)R^{j+1}\ \text{и}\ h_{j+1}\le M(j+1)R^{j+1}.$$

Ввиду (26) в области $K_1 := \{|\zeta| \le \rho_1 < \rho\}$ ряды $\sum_{j=1}^{\infty} y_j^{(r)}\zeta^{j+\nu m}$ $\forall r = \overline{0, k}$ мажорируются сходящимся числовым рядом $M\rho_1^{\nu m}\sum_{j=1}^{\infty} j(\rho_1/\rho)^j$, следовательно, сходятся абсолютно и равномерно.

Возвращаясь к переменной $p \le \zeta^{-\nu}$ и выделяя в отдельную сумму слагаемые со значениями j, кратными ν, согласно (21) получаем

$$\tilde{y}(x, p) = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{s=0}^{\infty} y_{s\nu+i}(x)p^{-m-s-i/\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} p^{-i/\nu}\psi_i(x, p), \tag{27}$$

где

$$\psi_i(x, p) = \sum_{s=0}^{\infty} y_{s\nu+i}(x)p^{-m-s}$$

— регулярные функции p в области $Q_1 := \{|p| \ge R_1\}$, $R_1 := \rho_1^{-\nu} > \rho^{-\nu} = R_0$. Число R_1 можно выбирать произвольно большим.

При достаточно большом $|p|$ в области Ω_p ввиду (12) коэффициент уравнения (10) $a_0(x, p)$ не имеет нулей в силу условия $a_{0m}^0(x) \ne 0$. После деления на $a_0(x, p)$ коэффициенты и правая часть уравнения (10) остаются регулярными функциями x. То же свойство имеет и решение $\tilde{y}(x, p)$ [9, с. 347]. Регулярными по x будут также линейно независимые составляющие этой функции из (27). Лемма доказана.

Как отмечалось выше, коэффициенты $\tilde{b}_j(p)$ в формуле (13) — правильные рациональные дроби относительно величины $p^{1/\nu}$. При достаточно большом R_1 функции $\tilde{b}_j(p)$ в области Q_1 раскладываются по целым отрицательным степеням $p^{1/\nu}$. Это приводит к представлению $\tilde{z}_n(x, p)$ в форме (27). В силу доказанной леммы ту же форму будет иметь величина $\tilde{\Delta}_n^r(x, p) := \tilde{y}^{(r)}(x, p) - \tilde{z}_n^{(r)}(x, p)$, а именно:

$$\tilde{\Delta}_n^r(x, p) = \sum_{i=1}^{\nu} p^{-i/\nu}\Delta_i^{rn}(x, p), \quad \Delta_i^{rn}(x, p) = \sum_{s=0}^{\infty}\Delta_{is}^{rn}(x)p^{-s-m}. \tag{28}$$

Функции $\Delta_i^{rn}(x, p)$ регулярны по x и p.

Теорема. *В области $\Omega_t := \{0 \le x \le 1,\ t_0 \le t \le t_1\}$ при произвольных значениях $t_1 > t_0 > 0$ для погрешности приближения $\Delta_n^r(x, t) := y^{(r)}(x, t) - z_n^{(r)}(x, t)$, $r = \overline{0, q}$, справедлива равномерная по x и t асимптотическая оценка*

$$|\Delta_n^r(x, t)| \le A\Theta^{n-r}, \quad 0 < \Theta < 1, \quad n \to \infty, \tag{29}$$

где постоянная A не зависит от n.

Доказательство. Пусть $C[0, 1]$ — пространство непрерывных комплекснозначных функций $\varphi(x, \zeta)$ действительного переменного $x \in [0, 1]$, содержащих комплексный параметр ζ, с нормой

$$\|\varphi(x, \zeta)\|_C := \max_{0 \le x \le 1}|\varphi(x, \zeta)|.$$

Пусть также величина наилучшего приближения функции $\varphi(x, \zeta)$ многочленами степени не выше n

$$E_n(\varphi, \zeta)_C := \min_{b_j} \| \varphi(x, \zeta) - \sum_{j=0}^{n} b_j(\zeta) x^j \|_C.$$

Полином $z_n(x)$, построенный в соответствии с описанной выше процедурой применительно к задаче (7), приближает ее решение $y(x)$ с оценками [7]

$$\| \Delta_n^r(x)\|_C = \| y^{(r)}(x) - z_n^{(r)}(x)\|_C \leq \Lambda E_{n-r}(y^{(r)})_C, \quad r = \overline{0, q}, \tag{30}$$

где постоянная Λ не зависит от n.

Этот результат, основанный целиком на свойствах полиномов Чебышева $T_j^0(x)$, сохраняет силу и в случае задачи (10), (11), которую от задачи (7) отличает только присутствие комплексного параметра $p = \zeta^{-\nu}$. Те же рассуждения, что и в [7], приводят к оценкам, аналогичным (30), для функций $\delta_n^r(x, \zeta) := \tilde{\Delta}_n^r(x, \zeta^{-\nu})$, $r = \overline{0, q}$. Норма $\| \delta_n^r(x, \zeta)\|_C$ непрерывно зависит от параметра $\zeta \in K_1$. Наибольшее значение этой величины достигается в некоторой точке $\zeta_0 \in K_1$. Так как $\delta_n^r(x, 0) = \tilde{\Delta}_n^r(x, \infty) = 0$, то $\zeta_0 \neq 0$. Имеем

$$\| \delta_n^r(x, \zeta)\|_C \leq \| \delta_n^r(x, \zeta_0)\|_C \leq \Lambda E_{n-r}(\tilde{y}^{(r)}; \zeta_0)_C, \quad r = \overline{0, q}, \quad \Lambda = \text{const}. \tag{31}$$

Функция $\tilde{y}^{(r)}(x, \zeta)$ аналитична по x, следовательно, $E_{n-r}(\tilde{y}^{(r)}; \zeta_0) \leq \leq \Lambda_1 \Theta^{n-r}$, где $0 < \Theta < 1$, $\Lambda_1 = \text{const}$ [3, с. 60]. Согласно (31) получаем $\forall \zeta \in K_1$

$$\| \delta_n^r(x, \zeta)\|_C \leq \Lambda_2 \Theta^{n-r}, \quad 0 < \Theta < 1, \quad r = \overline{0, q}, \quad \Lambda_2 = \text{const}. \tag{32}$$

Перейдем теперь к оценке оригинала, соответствующего изображению (28). Вводим вспомогательные регулярные в области $K_1 = \{|\zeta| \leq \rho_1\}$ функции

$$\Phi_j(x, \zeta) := \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{s=1}^{\infty} \Delta_{is}^{rn}(x) \zeta^{i-j+\nu s} + \sum_{i=j}^{\nu} \Delta_{i0}^{rn}(x) \zeta^{i-j}, \quad j = \overline{1, \nu+1}. \tag{33}$$

Суммы, у которых нижний предел превышает верхний, здесь и ниже отбрасываются.

По равенствам (28) с $p = \zeta^{-\nu}$ и $\delta_n^r(x, \zeta) := \tilde{\Delta}_n^r(x, p)$ имеем

$$\delta_n^r(x, \zeta) = \sum_{i=1}^{\nu} \Delta_{i0}^{rn}(x) \zeta^{i+\nu m} + \zeta^{\nu(m+1)+1} \Phi_{\nu+1}(x, \zeta), \tag{34}$$

$$\Phi_j(x, \zeta) = \zeta^{-j-\nu m}\left[\delta_n^r(x, \zeta) - \sum_{i=1}^{j-1} \Delta_{i0}^{rn}(x) \zeta^{i+\nu m} \right]. \tag{35}$$

Пусть $\Gamma := \{|\zeta| = \rho_1\}$ — граница области K_1. В силу аналитичности по ζ функций $\Phi_j(x, \zeta)$ $\forall x \in [0, 1]$ при $j = \overline{1, \nu}$

$$|\Delta_{j0}^{rn}(x)| = |\Phi_j(x, 0)| \leq |\Phi_j(x, \zeta)|_\Gamma. \tag{36}$$

Учитывая (32), (35), (36) и полагая $j = 1, 2, \ldots, \nu + 1$, последовательно $\forall x \in [0, 1]$ находим

$$| \Delta_{10}^{rn}(x)| \le |\Phi_1(x, \zeta)|_\Gamma \le \rho_1^{-1-\nu m} \| \delta_n^r(x, \zeta)\|_C \le A_1 \Theta^{n-r},$$

$$\| \Delta_{10}^{rn} \|_C \le A_1 \Theta^{n-r}; \quad | \Delta_{20}^{rn}(x)| \le |\Phi_2(x, \zeta)|_\Gamma \le \rho_1^{-2-\nu m}(\| \delta_n^r(x, \zeta)\|_C +$$

$$+ \| \Delta_{10}^{rn} \|_C \, \rho_1^{1+\nu m}) \le A_2 \Theta^{n-r}, \quad \| \Delta_{20}^{rn} \|_C \le A_2 \Theta^{n-r}$$

и т. д.

Таким образом, получаем оценки

$$\| \Delta_{j0}^{rn}(x)\|_C \le A_j \Theta^{n-r}, \quad j = \overline{1, \nu}; \quad \| \Phi_{\nu+1}(x, \zeta)\|_C \le A_{\nu+1} \Theta^{n-r}. \tag{37}$$

Постоянные A_j, $j = \overline{1, \nu+1}$, не зависят от ζ и n.

Возвращаясь к переменной $p = \zeta^{-\nu}$, согласно (34) получаем

$$\tilde{\Delta}_n^r(x, p) = \sum_{i=1}^{\nu} \Delta_{i0}^{rn}(x) p^{-m-i/\nu} + p^{-m-1-1/\nu} \Phi_{\nu+1}(x, p^{-1/\nu}). \tag{38}$$

Выполняем обратное преобразование Лапласа, интегрируя (38) по прямой $\operatorname{Re} p = \sigma = \mathrm{const}$ с произвольным значением $\sigma \ge R_1$. Все точки этой прямой принадлежат области $Q_1 := \{|p| \ge R_1\}$. Имеем

$$\Delta_n^r(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{\Delta}_n(x, p)\, e^{pt} dp = \sum_{j=1}^{\nu} \Delta_{j0}^{rn}(x) \frac{t^{m-1+j/\nu}}{\Gamma(m + j/\nu)} \kappa_n(t), \tag{39}$$

где при $p = \sigma + i\omega$ ввиду (37)

$$\begin{aligned} |\kappa_n(t)| &:= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} p^{-m-1-1/\nu} \, \Phi_{\nu+1}(x, p^{-1/\nu}) e^{pt} dp \right| \le \\ &\le \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma^2 + \omega^2\right)^{-(m+1+1/\nu)/2} \| \Phi_{\nu+1}\|_C \, d\omega \le A_0 e^{\sigma t} \Theta^{n-r}, \quad A_0 = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{40}$$

По соотношениям (39) и (40), учитывая (37), находим

$$| \Delta_n^r(x, t)| \le \left(\sum_{i=1}^{\nu} A_i \frac{t^{m-1+i/\nu}}{\Gamma(m + i/\nu)} + A_0 e^{\sigma t} \right) \Theta^{n-r}.$$

Отсюда для произвольного промежутка $0 < t_0 \le t \le t_1$ следует оценка (29). Теорема доказана.

Числовая иллюстрация изложенного выше подхода на примере одной задачи механики содержится в статье [10].

4. В процессе построения приближения решения (17) задачи (4) – (6) возникает необходимость отыскания оригинала $b(t)$ по его изображению вида

$$\tilde{b}(p) := \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} d_{k-j+1}\, p^{\alpha(j-1)}}{\sum\limits_{j=0}^{k} a_{k-j}\, p^{\alpha j}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} d_j\, p^{-\alpha j}}{\sum\limits_{j=0}^{k} a_j\, p^{-\alpha j}}, \quad 0 < \alpha \le 1. \tag{41}$$

При достаточно большом $|p|$ трансформанта (41) раскладывается в ряд

$$\tilde{b}(p) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{b}_j \, p^{-\alpha(j+1)},$$

почленное обращение которого определяет функцию $b(t)$ в форме сходящегося $\forall t > 0$ разложения [8, с. 224]

$$b(t) = t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{b}_j \, t^{\alpha j} / \Gamma[\alpha(j+1)]. \tag{42}$$

Медленная сходимость ряда (42) при малых значениях α затрудняет его практическое использование и побуждает к поиску более удобных аппроксимаций. Эффективное приближение функции $b(t)$ посредством а-метода возможно и в этом случае.

Согласно (41) имеем

$$\tilde{b}(p) + \tilde{b}(p) \sum_{j=1}^{k} (a_j / a_0) \, p^{-\alpha j} = \sum_{j=1}^{k} (d_j / a_0) \, p^{-\alpha j}.$$

Переходя к оригиналам, получаем уравнение

$$b(t) + \int_0^t K(t-s) \, b(s) \, ds = g(t). \tag{43}$$

Здесь

$$K(t) = \sum_{j=1}^{k} (a_j / a_0) \, t^{\alpha j - 1} / \Gamma(\alpha j), \quad g(t) = \sum_{j=1}^{k} (d_j / a_0) \, t^{\alpha j - 1} / \Gamma(\alpha j). \tag{44}$$

Вспомогательное уравнение

$$b_n(t) + \int_0^t K(t-s) \, b_n(s) \, ds = g(t) - \varepsilon_n(t) \tag{45}$$

с невязкой

$$\varepsilon_n(t) := t^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{k} \tau_i \, T_{n+i}^0[(t/t_0)^\alpha], \tag{46}$$

где τ_i — некоторые параметры, $T_j^0(\eta)$ — смещенные полиномы Чебышева, $\eta = (t/t_0)^\alpha$, $0 \le \eta \le 1$, произвольное число $t_0 > 0$, допускает решение в следующей форме:

$$b_n(t) = t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{n} b_{nj} \, t^{\alpha j}. \tag{47}$$

Числа b_{nj}, $j = \overline{0, n}$, и τ_i, $i = \overline{1, k}$, отыскиваются методом неопределенных коэффициентов в результате подстановки (46) и (47) в (45).

Пусть $R(t)$ — резольвента уравнения (43). Ее изображение выражается через изображение ядра $K(t)$: $\tilde{R}(p) = \tilde{K}(p) / [1 + \tilde{K}(p)]$. Как и функция $b(t)$, резольвента $R(t)$ $\forall t > 0$ раскладывается в ряд вида (42). В обозначениях $(t/t_0)^\alpha = \eta$, $(s/t_0)^\alpha = \xi$ справедливо представление

$$R(t - s) = (\eta^{1/\alpha} - \xi^{1/\alpha})^{\alpha - 1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\Gamma[\alpha(j+1)]} (\eta^{1/\alpha} - \xi^{1/\alpha})^{\alpha_j} =: \rho(\eta, \xi), \tag{48}$$

причем числа $|\lambda_j|$ могут возрастать не быстрее, чем в геометрической прогрессии.

Функция $\rho(\eta, \xi)$ удовлетворяет условиям леммы [11], согласно которой при достаточно больших n справедлива оценка

$$\eta^{1/\alpha - 1} \left| \int_0^{\eta} \rho(\eta, \xi)\, T_{n+i}^0(\xi) d\xi \right| \le \mathrm{const} / n^{\alpha}. \tag{49}$$

На основании (43) и (45) погрешность приближения $\Delta b(t) := b(t) - b_n(t)$ определяется равенствами

$$\Delta b(t) + \int_0^t K(t - s) \Delta b(s)\, ds = \varepsilon_n(t); \quad \Delta b(t) = \varepsilon_n(t) - \int_0^t R(t - s)\, \varepsilon_n(s)\, ds. \tag{50}$$

Согласно (42) и (47) при $t = t_0 \eta^{1/\alpha}$ имеем

$$t^{1-\alpha} b(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \eta^j =: \beta(\eta), \quad t^{1-\alpha} b_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{nj} \eta^j =: \beta_n(\eta). \tag{51}$$

Полагая $\Delta\beta(\eta) := \beta(\eta) - \beta_n(\eta) = t^{1-\alpha} \Delta b(t)$, по второму соотношению (50) с учетом (46), (48), (49) находим

$$\Delta\beta = \sum_{i=1}^{k} \tau_i [\, T_{n+i}^0(\eta) + O(n^{-\alpha})], \quad n \to \infty. \tag{52}$$

Пусть для произвольных натуральных чисел n и r

$$I_{nr} := \int_0^1 \Delta\beta(\eta) q(\eta)\, T_{n+r}^0(\eta) d\eta, \quad q(\eta) := \frac{2}{\pi}(\eta - \eta^2)^{-1/2}. \tag{53}$$

Если n-ю частную сумму ряда Фурье – Чебышева по полиномам $T_j^0(\eta)$ для функции $\beta(\eta)$ обозначить через $S_n(\beta)$, то ввиду условия ортогональности полиномов $T_j^0(\eta)$ можно записать

$$I_{nr} = \int_0^1 [\, \beta(\eta) - S_n(\beta)]\, q(\eta)\, T_{n+r}^0(\eta) d\eta.$$

Отсюда следует оценка, не зависящая от числа r:

$$|I_{nr}| = \left(\int_0^1 [\beta - S_n(\beta)]^2 q(\eta) d\eta \int_0^1 \left[T_{n+r}^0 \right]^2 q(\eta) d\eta \right)^{1/2} = E_n(\beta)_{L_q^2}, \tag{54}$$

где $E_n(\beta)_{L_q^2}$ — величина наилучшего приближения функции $\beta(\eta)$ полиномами степени не выше n в пространстве L_q^2.

Из соотношений (52), (53) с учетом условия ортогональности для полиномов

$T_j^0(\eta)$ получаем равенства

$$I_{nr} = \sum_{i=1}^{k} \tau_i \, [\delta_{ir} + O(n^{-\alpha})], \quad r = \overline{1, k}, \tag{55}$$

δ_{ir} — символ Кронекера.

Решение системы (55) относительно величин τ_i имеет вид

$$\tau_i = \sum_{r=1}^{k} [\, \delta_{ir} + O(n^{-\alpha})]\, I_{nr}, \quad i = \overline{1, k}. \tag{56}$$

Вследствие (56), (54), (52) получаем

$$|\tau_i| \le B_1 E_n(\beta)_{L_q^2} \le B_2 E_n(\beta)_C, \ \|\Delta\beta\|_{C[0,1]} = \|t^{1-\alpha}\Delta b(t)\|_{C[0,\, t_0]} \le B_3 E_n(\beta)_C,$$

где B_i, $i = 1, 2, 3,$ — постоянные.

В силу аналитичности функции $\beta(\eta)$, определенной рядом (51), справедливо неравенство $E_n(\beta)_C \le \mathrm{const}\,\Theta^n$, $0 < \Theta < 1$ [3]. Таким образом, многочлен (47), коэффициенты которого находятся по равенствам (45) – (47), приближает функцию $b(t)$ с оценкой

$$\|t^{1-\alpha}\Delta b(t)\|_{C[0,\, t_0]} \le B\Theta^n, \quad 0 < \Theta < 1,$$

где постоянная B не зависит от n.

1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
2. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – 38, № 4. – С. 937 – 967.
3. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.
4. *Дзядык В. К., Островецкий Л. А.* Аппроксимационный метод приближения многочленами решения краевой задачи и его производных для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, №5. – С. 1070 – 1081.
5. *Островецкий Л. А.* Решение по А-методу многочленных краевых задач // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 94 – 100.
6. *Бурлаченко В. П., Романенко Ю. И.* О приближении по методу В. К. Дзядыка решения задачи Гурса с многочленными коэффициентами // Теория функций и ее прил. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 50 – 60.
7. *Синайский Е. С.* Совместное приближение решения и его производных в краевой задаче для линейного дифференциального уравнения с многочленными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1991. – **55**, №3. – С. 560 – 580.
8. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1965. – 288 с.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5-х т. – М.: Наука, 1974. – Т. 3. – 672 с.
10. *Синайский Е. С.* Изгиб круглой пластины из материала с неоднородными наследственными и упругими свойствами // Прикл. механика. – 1992. – № 4. – С. 31 – 38.
11. *Синайский Е. С.* О равномерном приближении полиномами на сегменте функции типа Миттаг – Леффлера // Изв. вузов, Математика. – 1980. – № 4. – С. 81 – 86.

Получено 17.09.92