УДК 517.5

**В. Г. Доронин,** канд. физ.-мат. наук,
**А. А. Лигун,** д-р физ.-мат. наук (Днепродзерж. индустр. ин-т)

# ТОЧНАЯ КОНСТАНТА В НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2$

Exact constants in inequalities of Jackson type with the second-order modulus of continuity are studied for trigonometric polynomial approximation of differentiable periodic functions in the space $L_2$.

Досліджуються найменші константи в нерівностях типу Джексона з модулем неперервності другого порядку при наближенні тригонометричними поліномами диференційовних періодичних функцій у просторі $L_2$.

Пусть $L_2$ — пространство измеримых $2\pi$-периодических функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2},$$

$L_2^r$, $r > 0$, — множество всех $2\pi$-периодических функций, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(x)$, $f^{(0)} = f$, локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)} \in L_2$ (при нецелочисленном $r$ речь идет о производной в смысле Вейля).

Определим, как обычно, $p$-й модуль непрерывности функции $f(x)$ равенством

$$\omega_p(f, \delta)_2 = \sup\left\{ \left\| \Delta_h^p f(\cdot) \right\|_2 \,\Big|\, |h| \le \delta \right\}, \tag{1}$$

где

$$\Delta_h^p f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{p-1} f(x)), \quad \Delta_h f(x) = f(x + h/2) - f(x - h/2). \tag{2}$$

Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \varphi_k)$$

— разложение функции $f \in L_2$ в ряд Фурье. Как известно,

$$E_{n-1}^2(f)_2 = \left\{ \inf_{T \in T_{2n-1}} \|f - T\|_2 \right\}^2 = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \cos(k \cdot + \varphi_k) \right\|_2^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2. \tag{3}$$

Неравенства вида

$$E_{n-1}(f)_2 \le (\kappa / n^r)\, \omega_p(f^{(r)}, \delta)_2$$

принято называть неравенствами типа Джексона, а наименьшую константу $\kappa = \kappa_{n,r,p}(\delta)$ — точной константой в неравенстве типа Джексона. Ясно, что

$$\kappa_{n,r,p}(\delta) = \sup\{ n^r E_{n-1}(f)_2 / \omega_p(f^{(r)}, \delta)_2 \,|\, f \in L_2^r, \ f \not\equiv \text{const} \}. \tag{4}$$

Н. И. Черных [1, 2] доказал справедливость следующих соотношений:

$$\sup_{f \in L_2,\, f \not\equiv \text{const}} E_{n-1}(f)_2 / \omega_1(f, \pi/n)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sup_{f \in L_2^r,\, f \not\equiv \mathrm{const}} \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)_2}{\int_0^\pi \omega_1^2\left(f^{(r)}, t/n\right)_2 \sin t\, dt} = \frac{1}{4}. \tag{5}$$

Аналогичные соотношения им получены и для $p$-х модулей непрерывности.

Соотношения, аналогичные (5), в случае, когда функция $\sin t$ заменяется какой-то другой функцией $\theta(t)$, получены в работах [3 – 5]. Кроме того, в работе [5] исследована константа Джексона (4) при $p = 1$. Точную формулировку некоторых результатов из [5] мы дадим ниже.

В этой работе мы продолжим исследования в этом направлении. Положим

$$\xi = \xi(r) = (2/\pi) \arcsin 2^{-r/2-1}. \tag{6}$$

**Теорема 1.** *Пусть* $r \ge 2$ *таково, что для любой несократимой дроби* $m/M$ *выполняется условие*

$$|\xi - m/M| \ge 2M^{-r/2+1}. \tag{7}$$

*Тогда для любого* $\delta \ge (1+\xi)\pi$ *и любой функции* $f \in L_2^r$ *выполняется неравенство*

$$E_{n-1}(f)_2 \le \left(c_r/n^r\right) \omega_2(f^{(r)}, \delta/n)_2, \tag{8}$$

*где*

$$c_r = (4 - 2^{-r})^{-1}. \tag{9}$$

***Доказательство.*** В работе [4] доказано, что для произвольных $r \ge 0$; $a > 0$; $n, p \in \mathbb{N}$; $f \in L_2^r$ и любой суммируемой на $[0, a]$ функции $\theta(t)$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{\int_0^a \omega_p^2\left(f^{(r)}, \frac{t}{n}\right)_2 \theta(t)\, dt}{n^{2r}\, 2^p \inf\left\{\Phi_{r,p}(a, \theta, y) \mid y \ge 1\right\}}, \tag{10}$$

где

$$\Phi_{r,p}(a, \theta, y) = y^{2r} \int_0^a (1 - \cos yt)^p\, \theta(t)\, dt. \tag{11}$$

Выберем $a = \pi$, $p = 2$, $\alpha_1 = (1+\alpha)/2$, $\alpha_2 = (1-\alpha)/2$, $\alpha = \xi + r/4\pi \operatorname{tg} \xi\pi$ и $\theta(t) = \alpha_1 \delta(t - \pi(1-\xi)) + \alpha_2 \delta(t - \pi(1+\xi))$, где $\delta(u)$ — $\delta$-функция Дирака. В этом случае неравенство (9) примет вид

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{1}{2\eta n^{2r}} \left( \alpha_1 \omega_2^2\left(f^{(r)}, \frac{\pi(1-\xi)}{n}\right)_2 + \alpha_2 \omega_2^2\left(f^{(r)}, \frac{\pi(1+\xi)}{n}\right)_2 \right), \tag{12}$$

где

$$\eta = 2 \inf\{\theta_r(z) \mid z \ge 1\} \tag{13}$$

и

$$\theta_r(z) = z^{2r} \{\alpha_1 (1 - \cos z\pi(1-\xi))^2 + \alpha_2 (1 - \cos z\pi(1+\xi))^2\}. \tag{14}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\theta_r(1) = \theta_r(2)$, $\theta_r'(2) = 0$. Опираясь на это и почти дословно повторяя рассуждения, приведенные в [5] при доказательстве леммы 7, легко установить, что

$$\min \{ \theta_r(z),\ z \in [1, 6] \} = \theta_r(1). \tag{15}$$

Далее нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть* $r \geq 2$ *и число* $y > 6$ *таково, что* $\theta_r(y) < \theta_r(1)$. *Тогда найдется дробь* $m/M$ *такая, что выполняется неравенство*

$$|\xi - m/M| < 2/M^{r/2+1}. \tag{16}$$

***Доказательство.*** Пусть $|||y|||$ — ближайшее к $y$ целое число, а $\{y\} = y - |||y|||$. Положим $m_{\pm} = |||y(1 \pm \xi)/2|||$ и $\delta_{\pm} = \{y(1 \pm \xi)/2\}$. Тогда

$$\pi y(1 \pm \xi)/2 = \pi m_{\pm} + \pi \delta_{\pm} \tag{17}$$

и, следовательно,

$$\sin^4 (\pi y(1 \pm \xi)/2) = \sin^4 \pi \delta_{\pm}. \tag{18}$$

В силу неравенства $|\sin t| \geq 2/\pi |t|$, $|t| \leq \pi/2$, из соотношения (18) и равенств (17) получаем

$$\theta_r(y) \geq 16 y^{2r} (\alpha_1 \delta_+^4 + \alpha_2 \delta_-^4). \tag{19}$$

Отсюда и из неравенства

$$\alpha a^4 + \beta b^4 \geq \alpha\beta (a+b)^4 \left(\alpha^{1/3} + \beta^{1/3}\right)^{-3}, \quad a, b, \alpha, \beta \geq 0,$$

следует

$$\theta_r(y) \geq 16 y^{2r} \alpha_1 \alpha_2 \left(\alpha_1^{1/3} + \alpha_2^{1/3}\right)^{-3} (\delta_+ \pm \delta_-)^4. \tag{20}$$

Кроме того,

$$\theta_r(1) = (\alpha_1 + \alpha_2)(1 + \cos \pi\xi)^2 = (1 + \cos \pi\xi)^2 < 4. \tag{21}$$

Из неравенств (20), (21) и условия леммы вытекает неравенство

$$4 > \theta_r(1) > \theta_r(y) \geq 16 y^{2r} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\left(\alpha_1^{1/3} + \alpha_2^{1/3}\right)^3} (\delta_+ \pm \delta_-)^4. \tag{22}$$

Следовательно,

$$|\delta_+ \pm \delta_-| < \frac{1}{\sqrt{2}\, y^{r/2}} \left( \frac{\left(\alpha_1^{1/3} + \alpha_2^{1/3}\right)^3}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^{1/4}. \tag{23}$$

Из (22) следует

$$\frac{\left(\alpha_1^{1/3} + \alpha_2^{1/3}\right)^3}{\alpha_1 \alpha_2} = 2 \frac{\left((1+\alpha)^{1/3} + (1-\alpha)^{1/3}\right)^3}{1 - \alpha^2} \overset{\mathrm{df}}{=} 2\psi(\alpha). \tag{24}$$

Отметим, что если $r$ возрастает, то $\alpha$ монотонно убывает. Кроме того, функция $\psi(\alpha)$ монотонно возрастает на $(0, 1)$. Следовательно, величина $\psi(\alpha)$ принимает наибольшее значение при $\alpha$, соответствующему $r = 2$:

$$\psi(\alpha) < 9. \tag{25}$$

Отсюда, из (23) и (24) следует

$$|\delta_+ \pm \delta_-| < \sqrt[4]{\frac{18}{4}} \frac{1}{y^{r/2}} < 1{,}5 \frac{1}{y^{r/2}}. \tag{26}$$

Из неравенств (17) получаем соотношение

$$\delta_{\pm} = y(1 \pm \xi)/2 - m_{\pm}. \tag{27}$$

Значит,

$$\delta_{+} + \delta_{-} = y - M, \quad \delta_{+} - \delta_{-} = \xi y - m,$$

где $M = m_{+} + m_{-}$; $m = m_{+} - m_{-}$. Отсюда и из (26) имеем $|y - M| < \varepsilon$, $|\xi y - m| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 1{,}5/(y^{r/2})$. Значит, $M - \varepsilon \le y \le M + \varepsilon$ и $m - \varepsilon \le \xi y \le m + \varepsilon$. Поэтому

$$\frac{m-\varepsilon}{M+\varepsilon} \le \frac{m-\varepsilon}{y} \le \xi \le \frac{m+\varepsilon}{y} \le \frac{m+\varepsilon}{M-\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\frac{m-\varepsilon}{M+\varepsilon} - \frac{m}{M} \le \xi - \frac{m}{M} \le \frac{m+\varepsilon}{M-\varepsilon} - \frac{m}{M}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\left| \xi - \frac{m}{M} \right| \le \varepsilon \frac{M+m}{(M-\varepsilon)M} \le \frac{(1+\xi)(1+2\varepsilon)}{M} < \frac{2}{M^{r/2+1}}.$$

Из леммы 1 и соотношения (15) следует, что если $r \ge 2$ таково, что для любой несократимой дроби $m/M$ выполняется неравенство (7), то

$$\min_{z \ge 1} \theta_r(z) = \theta_r(1) = (1 + \cos \pi\xi)^2 = 2(1 - 2^{-r-2})^2.$$

Отсюда и из соотношений (12) – (14) получаем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{1}{4} \frac{1}{2\left(1 - 2^{-r-2}\right)^2} \frac{1}{n^{2r}} \left\{ \alpha_1 \omega_2^2 \left( f^{(r)}, \frac{\pi(1-\xi)}{n} \right)_2 + \right.$$

$$\left. + \alpha_2 \omega_2^2 \left( f^{(r)}, \frac{\pi(1+\xi)}{n} \right)_2 \right\}.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 остается учесть, что

$$\omega_2 ( f^{(r)}, \pi(1 \pm \xi)/n )_2 \le \omega_2 (f^{(r)}, \delta)_2$$

и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Теорему 1 дополняет следующая теорема.

***Теорема 2.*** *При любых $r$, $\delta > 0$ найдется функция $f_*(x) = f_*(n, r, x)$ такая, что*

$$E_{n-1}(f_*)_2 / \omega_2( f_*^{(r)}, \delta)_2 \ge c_r / n^r, \tag{28}$$

*где константа $c_r$ определена равенством* (9).

***Доказательство.*** Пусть $f_*(x) = \cos nx + \beta_r \cos 2nx$, где

$$\beta_r = 1 / \sqrt{2\left(2^{r+1} - 1\right)}.$$

Тогда

$$E_{n-1}^2(f_*)_2 = \| f_* \|_2^2 = (2^{r+2} - 1) / (2(2^{r+2} - 1)). \tag{29}$$

Поскольку

$$f_*^{(r)}(x) = n^r \cos(nx + \pi r/2) + \beta_r (2n)^r \cos(2nx + \pi r/2),$$

то

$$\left\| \Delta_h^2 f_*^{(r)}(\cdot) \right\|_2^2 = 4n^{2r}((1 - \cos nh)^2 + \beta_r 2^{2r}(1 - \cos 2nh)^2).$$

А значит, справедливо равенство

$$\omega_2^2 \left( f_*^{(r)}, \delta \right)_2 = 4n^{2r} \max_{0 \le h \le \delta} \Phi(nh),$$

где $\Phi(t) = (1 - \cos t)^2 + \beta_r^2 2^{2r}(1 - \cos 2t)^2$. Следовательно,

$$\omega_2^2 \left( f_*^{(r)}, \delta \right)_2 \le 4n^{2r} \max_t \Phi(t).$$

Положим $u = \cos t$. Тогда

$$\omega_2^2 \left( f_*^{(r)}, \delta \right)_2 \le 4n^{2r} \max_{|u| \le 1} \Psi(u), \tag{30}$$

где

$$\Psi(u) = (1 - u)^2 + \beta_r^2 2^{2r+2}(1 - u^2)^2 = (1 - u)^2 \left( 1 + \frac{2^{2r+2}}{2(2^{r+1} - 1)} (1 + u)^2 \right)$$

Нетрудно видеть, что

$$\max_{|u| \le 1} \Psi(u) = \Psi\left( -1 + \frac{1}{2^{r+1}} \right) + \frac{\left(2^{r+2} - 1\right)^3}{2^{2r+3}\left(2^{r+1} - 1\right)} . \tag{31}$$

Учитывая (31) в (30) и пользуясь (29), получаем

$$\frac{E_{n-1}^2(f_*)_2}{\omega_2^2 ( f_*^{(r)}, \delta)_2} \ge \frac{1}{n^{2r}} \frac{1}{16\left(1 - 1/2^{r+2}\right)^2} = \left(\frac{c_r}{n^r}\right)^2,$$

что означает справедливость теоремы 2.

Сопоставляя утверждения теорем 1 и 2, приходим к заключению, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда при всех* $\delta \ge \pi(1 + \xi)$ *справедливы равенства* $\kappa_{n,r}(\delta/n) = c_r$.


1. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в $L_2$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 71–74.
2. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в $L_2$ // Мат. заметки. – 1967. – **2**, вып. 5 – С. 513–522.
3. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшее приближение и модуль непрерывности в $L_2$ // Там же. – 1976. – **20**, вып. 3. – С. 433–438.
4. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве $L_2$ // Там же. – 1978. – **24**, вып. 3 – С. 785–792.
5 *Лигун А. А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве $L_2$ // Там же. – 1988. – **43**, вып. 6. – С. 757–769.


Получено 06.07.92