УДК 517.949.2

И. И. Клевчук, В. И. Фодчук

О динамической эквивалентности дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа

Пусть E^n — n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$, $C = C[-\Delta, 0]$ — пространство непрерывных на $[-\Delta, 0]$ функций со значениями в E^n с нормой $|\varphi| = \sup\limits_{-\Delta \leqslant \theta \leqslant 0} |\varphi(\theta)|$. Через x_t обозначим элемент пространства C, заданный функцией $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-\Delta \leqslant \theta \leqslant 0$.

Рассмотрим автономное дифференциально-функциональное уравнение нейтрального типа

$$d[D(x_t) - G(x_t)]/dt = L(x_t) + F(x_t), \tag{1}$$

где $D(x_t)$ и $L(x_t)$ — линейные непрерывные функционалы от x_t со значениями в E^n, $G(x_t)$ и $F(x_t)$ — нелинейные функционалы от x_t со значениями в E^n.

Предположим, что $G(\varphi)$ имеет непрерывную производную Фреше $G'(\varphi)$, причем $G(\varphi)$ и $G'(\varphi)$ равномерно непрерывны на любом замкнутом ограниченном множестве из C и $G(\varphi)$ зависит только от значений $\varphi(\theta)$ при $\theta < 0$, т. е. для произвольного $a \in E^n$ и произвольной последовательности непрерывных функций φ_n, $\varphi_n(0) = a$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся к φ равномерно на компактном подмножестве полусегмента $[-\Delta, 0)$, существует $\lim\limits_{n\to\infty} G(\varphi_n) = G(\varphi)$.

Кроме того, предположим, что существуют постоянные $\nu > 0$, $M > 0$, непрерывная при $s \geqslant 0$ функция $\gamma(s)$, $\gamma(0) = 0$, и постоянные матрицы A, A_1, $\det A \neq 0$, $\det A_1 \neq 0$, такие, что

$$|D(\varphi) - A\varphi(0)| \leqslant \gamma(s)|\varphi|, \ \varphi(\theta) \equiv 0, \ -\Delta \leqslant \theta < -s < 0, \ \varphi \in C[-s, 0],$$

$$|D(\psi) - A_1\psi(-\Delta)| \leqslant \gamma(s)|\psi|, \ \psi(\theta) \equiv 0, \ -\Delta + s < \theta \leqslant 0,$$

$$\psi \in C[-\Delta, -\Delta + s], \ |G(\varphi')| \leqslant M, \ |G(\varphi') - G(\psi')| \leqslant \nu|\varphi' - \psi'|,$$

$$|F(\varphi')| \leqslant M, \ |F(\varphi') - F(\psi')| \leqslant \nu|\varphi' - \psi'|, \ \varphi', \psi' \in C. \tag{2}$$

Эти условия гарантируют продолжимость решений основной начальной задачи для уравнения (1) влево и вправо от начальной точки на всю действительную ось (см. [1]).

Наряду с (1) рассмотрим линейное уравнение

$$dD(\tilde{x}_t)/dt = L(\tilde{x}_t), \tag{3}$$

обозначим через $\tilde{x}_t(\varphi)$ его решение с начальной функцией $\varphi \in C$. В [2] показано, что уравнение (1) с непрерывной начальной функцией φ эквивалентно уравнению

$$x_t - X_0G(x_t) = T(t)[\varphi - X_0G(\varphi)] +$$

$$+ \int\limits_0^t \{-[d_sT(t-s)X_0]G(x_s) + T(t-s)X_0F(x_s)\,ds\}, \tag{4}$$

где $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \leqslant \theta < 0$, $X_0(0) = I$, $T(t)\varphi = \tilde{x}_t(\varphi)$.

Обозначим через PC банахово пространство функций $\varphi: [-\Delta, 0] \to E^n$, непрерывных на полусегменте $[-\Delta, 0)$ и имеющих предел $\lim\limits_{\theta\to 0-}\varphi(\theta)$, с нормой $|\varphi| = |\varphi(0)| + \sup\limits_{-\Delta\leqslant\theta<0}|\varphi(\theta)|$. Пусть PC_G — замкнутое множество в PC, определяемое как $PC_G = \{\varphi \in PC : \varphi(0) = \varphi(0-) - G(\varphi)\}$. Рассмотрим преобразование $f(\varphi) = \varphi - X_0G(\varphi)$, отображающее C в PG_G. Поскольку $G(\varphi)$ не зависит от $\varphi(0)$, то $G(f(\varphi)) = G(\varphi)$, и поэтому преобразование $f_1(\psi) = \psi + X_0G(\psi)$, отображающее PC_G в C, обратное к преобразованию $f(\varphi)$.

В уравнении (4) сделаем замену $z_t = f(x_t)$; тогда получим уравнение для z_t в PC_G:

$$z_t = T(t)z_0 + \int\limits_0^t \{-[d_sT(t-s)X_0]G(z_s) + T(t-s)X_0F(f_1(z_s))\,ds\}. \tag{5}$$

Пусть характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (3), имеет l корней на мнимой оси и в правой полуплоскости (с учетом их кратности), а остальные корни лежат в левой полуплоскости на некотором положительном расстоянии от мнимой оси. Обозначим через R собственное подпространство в C, порожденное решениями уравнения (3), соответствующими корням на мнимой оси и в правой полуплоскости. Разложим пространство C в прямую сумму $C = R \oplus Q$. Пусть $\Phi = \Phi(\theta)$, $-\Delta \leqslant \theta \leqslant 0$, — базис в R. Рассматривая уравнение, сопряженное к уравнению (3), можно аналогично определить функцию $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \Delta$. Тогда каждый элемент $z_t \in PC_G$ единственным образом можно представить в виде $z_t = \Phi u(t) + w_t$, $u(t) = (\Psi, z_t)$, $w_t = z_t - \Phi u(t)$, $u(t) \in E^l$, $w_t \in Q$, где (Ψ, z_t) — некоторый билинейный функционал [2]. Уравнение (5) эквивалентно системе уравнений

$$du(t)/dt = Bu(t) + F_1(u(t), w_t),\ w_t = T(t)w_0 +$$
$$+ \int_0^t \{-[d_sT(t-s)X_0^Q]G_0(u(s), w_s) + T(t-s)X_0^Q F_0(u(s), w_s)\,ds\}, \qquad (6)$$

где $F_1(u, \varphi) = \Psi(0)F(f_1(\Phi u + \varphi)) + B\Psi(0)G(\Phi u + \varphi)$; $G_0(u, \varphi) = G(\Phi u + \varphi)$; $F_0(u, \varphi) = F(f_1(\Phi u + \varphi))$, $u \in E^l$, $\varphi \in Q$; B — $l \times l$-матрица, собственные значения которой совпадают с упомянутыми выше корнями с неотрицательными действительными частями.

Справедливы неравенства [2, 3]

$$|T(t)\varphi| \leqslant K_1 \exp[-(\alpha + \beta_1)t]|\varphi|,\ t \geqslant 0,\ \varphi \in Q,$$
$$|T(t)X_0^Q| + \int_0^1 |d_sT(t-s)X_0^Q| \leqslant K_1 \exp[-(\alpha + \beta_1)t], \qquad t \geqslant 0, \qquad (7)$$

где K_1, α, β_1, $\beta_1 < \alpha$, — некоторые положительные постоянные.

В силу предположения относительно собственных значений матрицы B справедлива также оценка

$$|\exp(Bt)| \leqslant K \exp[(-\alpha + \beta)t], \qquad t \leqslant 0, \qquad (8)$$

где K, β, $\beta < \alpha$, — некоторые положительные постоянные.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (2).*Тогда найдется такое* $\nu_0 > 0$, *что при* $\nu < \nu_0$ *существует функция* $g(u) \in Q$, *определенная на* E^l, *удовлетворяющая условиям* $|g(u)| \leqslant \rho$, $|g(u)| - g(u')| \leqslant 0{,}5|u - u'|$, $\rho > 0$, *и такая, что множество* $S^- = \{\varphi : \varphi = \Phi u + \zeta,\ u \in E^l,\ \zeta = g(u),\ \zeta \in Q\}$ *является интегральным множеством уравнения* (1).

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству теоремы 3.1 работы [2].

Наряду с системой (6) рассмотрим систему уравнений

$$d\overline{u}(t)/dt = B\overline{u}(t) + \overline{F}_1(\overline{u}(t), \overline{w}_t),\ \ \overline{w}_t = T(t)\overline{w}_0 +$$
$$+ \int_0^t \{-[d_sT(t-s)X_0^Q]\overline{G}_0(\overline{u}(s), \overline{w}_s) + T(t-s)X_0^Q\overline{F}_0(\overline{u}(s), \overline{w}_s)\,ds\}, \qquad (9)$$

где $\overline{u}(t) \in E^l$, $\overline{w}_t \in Q$; $\overline{F}_1 : E^l \times Q \to E^l$; $\overline{G}_0 : E^l \times Q \to E^n$; $\overline{F}_0 : E^l \times Q \to E^n$. Пусть $p = \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$, $\overline{p} = \begin{pmatrix} \overline{u}_0 \\ \overline{w}_0 \end{pmatrix}$, где $u_0 \in E^l$, $\overline{u}_0 \in E^l$, $w_0 \in Q$, $\overline{w}_0 \in Q$. Обозначим через $X(t, p) = \begin{pmatrix} U(t, u_0, w_0) \\ W(t, u_0, w_0) \end{pmatrix}$ решение системы (6) с начальным значением p, через $\overline{X}(t, \overline{p})$ — решение системы (9) с начальным значением $\overline{p}$.

Определение. *Система уравнений* (6) *динамически эквивалентна системе уравнений* (9), *если существует гомеоморфизм* $J : E^l \times Q \to E^l \times Q$ *такой, что* $J(X(t, p)) = \overline{X}(t, J(p))$ *для* $t \in (-\infty, \infty)$, $p \in E^l \times Q$.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (2). *Тогда найдется такое* $\nu_1 > 0$, *что при* $\nu < \nu_1$ *система* (6) *динамически эквивалентна системе*

$$dy/dt = By + F_1(y, g(y)),\ v_t = T(t)v_0 + \int_0^t \{-[d_sT(t-s)X_0^Q]G_2(y(s), v_s) +$$
$$+ T(t-s)X_0^Q F_2(y(s), v_s)\,ds\}, \qquad (10)$$

где $G_2(y, v)$, $F_2(y, v)$ — некоторые непрерывные по совокупности аргументов функции, удовлетворяющие условиям

$$G_2(y, 0) \equiv 0, \quad F_2(y, 0) \equiv 0, \quad |G_2(y, v)| \leqslant 2M, \quad |F_2(y, v)| \leqslant 2M,$$
$$|G_2(y, v) - G_2(y, v')| \leqslant L|v - v'|, \ |F_2(y, v) - F_2(y, v')| \leqslant L'|v - v'|. \quad (11)$$

Доказательство. Системы (6) и (10) обладают групповым свойством, поэтому для доказательства леммы достаточно доказать динамическую эквивалентность при $t \geqslant 0$.

В системе (6) сделаем замену переменных $\xi = u - y$, $v = w - g(y)$, тогда

$$d\xi/dt = B\xi + F_4(\theta_t, p_t), \ v_t = T(t)v_0 +$$
$$+ \int_0^t \{-[d_s T(t-s) X_0^Q] G_1(\theta_s, p_s) + T(t-s) X_0^Q F_3(\theta_s, p_s) ds\}, \quad (12)$$

где $\theta_t = \Phi\xi(t) + v_t$, $p_t = \Phi y(t) + g(y(t))$, $F_4(\varphi, \chi) = \Psi(0) F(f_1(\varphi + \chi)) + B\Psi(0) G(\varphi + \chi) - \Psi(0) F(f_1(\chi)) - B\Psi(0) G(\chi)$, $G_1(\varphi, \chi) = G(\varphi + \chi) - G(\chi)$, $F_3(\varphi, \chi) = F(f_1(\varphi + \chi)) - F(f_1(\chi))$. Рассмотрим также систему интегральных уравнений

$$\xi(t) = -\int_t^\infty e^{B(t-s)} F_4(\theta_s, p_s) ds, \quad v_t = T(t)v_0 +$$
$$+ \int_0^t \{-[d_s T(t-s) X_0^Q] G_1(\theta_s, p_s) + T(t-s) X_0^Q F_3(\theta_s, p_s) ds\}. \quad (13)$$

Умножая первое равенство системы (13) на Φ и складывая эти равенства, получим

$$\theta_t = T(t)v_0 - \Phi \int_t^\infty e^{B(t-s)} F_4(\theta_s, p_s) ds +$$
$$+ \int_0^t \{-[d_s T(t-s) X_0^Q] G_1(\theta_s, p_s) + T(t-s) X_0^Q F_3(\theta_s, p_s) ds\}. \quad (14)$$

Наоборот, из уравнения (14) можно получить систему уравнений (13). Существование решения уравнения (14) докажем с помощью метода последовательных приближений:

$$\theta_t^{(0)} = 0, \ \theta_t^{(n+1)} = T(t)v_0 - \Phi \int_t^\infty e^{B(t-s)} F_4(\theta_s^{(n)}, p_s) ds +$$
$$+ \int_0^t \{-[d_s T(t-s) X_0^Q] G_1(\theta_s^{(n)}, p_s) + T(t-s) X_0^Q F_3(\theta_s^{(n)}, p_s) ds\},$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

По индукции докажем, что справедливо неравенство

$$|\theta_t^{(m)} - \theta_t^{(m-1)}| \leqslant K_1 2^{1-m} |v_0| \exp(-\alpha t), \qquad m = 1, 2, \ldots; \ t \geqslant 0. \quad (15)$$

При $m = 1$ неравенство (15) следует из (7).

Пусть неравенство (15) справедливо при $m = n$. Тогда, учитывая (2), (7), (8), получим

$$|\theta_t^{(n+1)} - \theta_t^{(n)}| \leqslant \int_0^t \{|d_s T(t-s) X_0^Q| \nu |\theta_s^{(n)} - \theta_s^{(n-1)}| +$$
$$+ |T(t-s) X_0^Q| \nu (1+\nu) |\theta_s^{(n)} - \theta_s^{(n-1)}| ds\} +$$

$$+ |\Phi| \int^{\infty} K \exp [(\alpha - \beta)(s - t)] \, |\Psi(0)| \, \nu (1 + \nu + |B|) \, |\theta_s^{(n)} - \theta_s^{(n-1)}| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \mu K_1 2^{1-n} |v_0| \exp(-\alpha t),$$

где $\mu = \nu K_1 [(\exp \beta_1 - 1)^{-1} + \exp(-\beta_1)] + \nu (1 + \nu) K_1 \beta_1^{-1} + \nu (1 + \nu + |B|) \times \times |\Psi(0)| \, K |\Phi| \beta^{-1}$. Выберем ν такое, чтобы выполнялось условие $\mu < 0,5$. Тогда неравенство (15) справедливо при $m = n + 1$; следовательно, оно справедливо при всех натуральных m.

Из (15) следует, что последовательность $\{\theta_t^{(m)}\}$ сходится равномерно при $0 \leqslant t < \infty$ к функции $\theta_t = \theta_t(y, v_0)$ — решению уравнения (14). Выбирая в равенстве (14) вместо v_0 другую постоянную — v_0', получим решение $\theta_t(y, v_0')$. При $\mu < 0,5$ имеет место оценка

$$|\theta_t(y, v_0) - \theta_t(y, v_0')| \leqslant 2K_1 |v_0 - v_0'| \exp(-\alpha t). \qquad (16)$$

Полагая в (13) $t = 0$, обозначим $j(y, v_0) = -\int\limits_0^{\infty} e^{-BS} F_4(\theta_s(y, v_0), p_s) \, ds$.

Функция $j(y, v_0)$ непрерывна по совокупности аргументов как равномерный предел последовательности непрерывных функций. Кроме того, функция $j(y, v_0)$ удовлетворяет условию $j(y, 0) \equiv 0$, а также условию Липшица по второму аргументу

$$|j(y, v_0) - j(y, v_0')| \leqslant 2\nu (1 + \nu + |B|) \, |\Psi(0)| \, K K_1 \beta^{-1} |v_0 - v_0'|. \qquad (17)$$

Обозначим через $Y(t, y)$ решение первого уравнения системы (10) с начальным условием $Y(0, y) = y$. Положим $V(t, y, v_0) = T(t) v_0 + \int\limits_0^t \{-[d_s T(t - s) X_0^Q] \, G_1(\theta_s(y, v_0), p_s) + T(t - s) X_0^Q F_3(\theta_s(y, v_0), p_s) \, ds\}$. Функция $\theta_s(y, v_0)$ удовлетворяет групповому свойству $\theta_s(Y(t, y), V(t, y, v_0)) = \theta_{s+t}(y, v_0)$, поэтому $j(Y(t, y), V(t, y, v_0)) = -\int\limits_t^{\infty} e^{B(t-s)} F_4(\theta_s(y, v_0), p_s) \, ds$. Учитывая (12), получим, что $\begin{pmatrix} Y(t, y) + j(Y(t, y), V(t, y, v_0)) \\ V(t, y, v_0) + g(Y(t, y)) \end{pmatrix}$ — решение системы (6) с начальным условием $\begin{pmatrix} y + j(y, v) \\ v_0 + g(y) \end{pmatrix}$. Рассмотрим отображение $J \begin{pmatrix} y \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + j(y, v_0) \\ v_0 + g(y) \end{pmatrix}$. Функция J отображает решение системы (10) в решение системы (6), если положить $G_2(y, v) = G_1(\theta_0(y, v), \Phi y + g(y))$, $F_2(y, v) = F_3(\theta_0(y, v), \Phi y + g(y))$. Функции $G_2(y, v)$, $F_2(y, v)$ удовлетворяют условиям (11) с постоянными $L = 2\nu K_1$, $L' = 2\nu (1 + \nu) K_1$.

Как было показано в [4], сюръективность отображения J при $2\nu (1 + \nu + |B|) \, |\Psi(0)| \, K K_1 \beta^{-1} < 0,5$ следует из теоремы Брауэра.

Докажем взаимную однозначность отображения J. Предположим, что J не является однозначным, т. е. существуют $y_1, y_2, v_1, v_2, y_1 \neq y_2$, для которых $y_1 + j(y_1, v_1) = y_2 + j(y_2, v_2)$, $v_1 + g(y_1) = v_2 + g(y_2)$. Тогда $Y(t, y_1) + j(Y(t, y_1) \, V(t, y_1, v_1)) = Y(t, y_2) + j(Y(t, y_2), V(t, y_2, v_2))$; следовательно,

$$e^{\alpha t} [Y(t, y_1) - Y(t, y_2)] = e^{\alpha t} [j(Y(t, y_2), V(t, y_2, v_2)) - - j(Y(t, y_1), V(t, y_1, v_1))]. \qquad (18)$$

В силу неравенств (16) и (17) правая часть равенства (18) ограничена при $t \in [0, \infty)$. Можно доказать, что $|Y(t, y_1) - Y(t, y_2)| \geqslant K |y_1 - y_2| \times \times \exp[(-\alpha + \beta - \varkappa) t]$, где $t \geqslant 0$, $\varkappa = \nu K |\Psi(0)| \times (1 + \nu + |B|)(|\Phi| + + 0,5)$. Следовательно, при $\varkappa < \beta$ левая часть равенства (18) неограничена на полуоси $[0, \infty)$. Противоречие доказывает, что наше предположение неверно. Значит $y_1 = y_2$, следовательно, $v_1 = v_2$.

Обозначим $J_1(y) = y + j(y, v)$, где v фиксировано, и рассмотрим обратное отображение J_1^{-1}. Для доказательства непрерывности J_1^{-1} рассмотрим точку $y \in E^l$. Ей соответствует $J_1^{-1}(y) \in E^l$. Возьмем замкнутый шар B_l с центром в точке $J_1^{-1}(y)$. Так как B_l — компакт, то J_1 — гомеоморфизм на B_l [5, с. 191], а это значит, что J_1^{-1} непрерывно в точке y. Так как y — произвольная точка E^l, то J_1^{-1} непрерывно на E^l. Следовательно, отображение J^{-1} непрерывно. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* (2). *Тогда найдется такое* $\nu_2 > 0$, *что при* $\nu < \nu_2$ *система* (10) *динамически эквивалентна системе*

$$dy/dt = By + F_1(y, g(y)),\ R_t = T(t)r, \qquad r \in Q. \tag{19}$$

Доказательство. Во втором уравнении системы (10) сделаем замену $v_t = \eta_t + T(t)r$; получим

$$\eta_t = T(t)\eta_0 + \int_0^t \{-[d_sT(t-s)X_0^Q]\,G_2(y(s), \eta_s + T(s)r) + $$
$$+ T(t-s)X_0^Q F_2(y(s), \eta_s + T(s)r)\,ds\}. \tag{20}$$

Рассмотрим пространство $\mathfrak{M}$ непрерывных функций $H(y, r)$ со значениями в Q, определенных и ограниченных на $E^l \times Q$, с нормой $|H| = \sup\{|H(y, r)|;\ y \in E^l,\ r \in Q\}$. Рассмотрим также преобразование $(SH)(y, r)$ функций $H(y, r)$ пространства $\mathfrak{M}$, определяемое равенством

$$(SH)(y, r) = \int_{-\infty}^0 \{-[d_sT(-s)X_0^Q]\,G_2(y(s), H(y(s), T(s)r) + T(s)r) + $$
$$+ T(-s)X_0^Q F_2(y(s), H(y(s), T(s)r) + T(s)r)\,ds\}. \tag{21}$$

Справедлива оценка

$$\int_{-\infty}^0 |d_sT(-s)X_0^Q| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\int_0^1 |d_sT(j+1-s)X_0^Q| \leqslant K_1/(\exp(\alpha+\beta_1)-1).$$

Используя (11), находим $|S\overline{H} - SH| \leqslant [K_1L/(\exp(\alpha+\beta_1)-1) + K_1L'/(\alpha+\beta_1)]\,|\overline{H} - H|$. Мажорируя правую часть равенства (21), получим $|SH| \leqslant 2MK_1/(\exp(\alpha+\beta_1)-1) + 2NK_1/(\alpha+\beta_1)$.

Выберем L, L' такими, чтобы выполнялось неравенство $K_1L/(\exp(\alpha + \beta_1) - 1) + K_1L'/(\alpha+\beta_1) < 1$. Тогда отображение S отображает пространство $\mathfrak{M}$ в себя и является в этом пространстве сжимающим.

Поскольку подынтегральное выражение в (21) ограничено суммируемой функцией, то к пределу можно переходить под знаком интеграла. Отсюда следует, что функция $(SH)(y, r)$ непрерывна по совокупности аргументов. Таким образом, в силу принципа сжатых отображений уравнение $H = SH$ имеет единственное решение в пространстве $\mathfrak{M}$. Обозначим его $h(y, r)$. Функция $h(y, r)$ удовлетворяет уравнению

$$h(y, r) = \int_{-\infty}^0 \{-[d_sT(-s)X_0^Q]\,G_2(Y(s, y), h(Y(s, y), T(s)r) + T(s)r) + $$
$$+ T(-s)X_0^Q F_2(Y(s, y), h(Y(s, y), T(s)r) + T(s)r)\,ds\}. \tag{22}$$

Докажем, что $h(Y(t, y), T(t)r)$ — решение уравнения (20). Заменяя в (22) y на $Y(t, y)$ и r на $T(t)r$, получаем

$$h(Y(t, y), T(t)r) = \int_{-\infty}^t \{-[d_sT(t-s)X_0^Q]\,G_2(Y(s, y), h(Y(s, y), T(s)r) + $$
$$+ T(s)r) + T(t-s)X_0^Q F_2(Y(s, y), h(Y(s, y), T(s)r) + T(s)r)\,ds\},$$

или окончательно

$$h(Y(t,y),T(t)r)=T(t)h(y,r)+\int\limits_0^t\{-[d_sT(t-s)X_0^Q]\,G_2(Y(s,y),h(Y(s,y),T(s)r)+T(s)r)+T(t-s)X_0^QF_2(Y(s,y),\ h(Y(s,y),T(s)r)+T(s)r)\,ds\}.$$

Рассмотрим отображение $H^*\begin{pmatrix}y\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\r+h(y,r)\end{pmatrix}$, отображающее решение системы (19) в решение системы (10). Докажем, что отображение H^* — гомеоморфизм. Действительно, рассмотрим функцию $h_1: E^l\times Q\to Q$, определенную с помощью равенства

$$h_1(y,v)=-\int\limits_{-\infty}^{0}\{-[d_sT(-s)X_0^Q]\,G_2(Y(s,y),V(s,y,v))+ +T(-s)X_0^QF_2(Y(s,y),V(s,y,v))\,ds\}, \tag{23}$$

где $(Y(s,y),V(s,y,v))$ — решение системы (10) с начальным значением (y,v). В силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла функция $h_1(y,v)$ непрерывна. Рассмотрим отображение $H_1^*\begin{pmatrix}y\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\v+h_1(y,v)\end{pmatrix}$. Найдем суперпозицию отображений H_1^* и H^*:

$$H_1^*H^*\begin{pmatrix}y\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\r+h(y,r)+h_1(y,r+h(y,r))\end{pmatrix}.$$

Сопоставляя формулы (22) и (23), находим, что $h(y,r)+h_1(y,r+h(y,r))\equiv\equiv 0$. Таким образом, $H_1^*H^*\begin{pmatrix}y\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\r\end{pmatrix}$. Аналогично доказывается, что $H^*H_1^*\begin{pmatrix}y\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\v\end{pmatrix}$. Построено непрерывное отображение H_1^*, обратное к отображению H^*. Лемма 3 доказана.

Теорема. *Пусть выполняются условия* (2). *Тогда найдется такое* $\nu_3>0$, *что при* $\nu<\nu_3$ *система* (6) *динамически эквивалентна системе* (19).

Доказательство теоремы следует из лемм 2, 3.

Замечание. Вопросам существования интегральных множеств и динамической эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены работы [6—11] и др. Настоящая работа использует в основном методику работ [4, 12].

1. *Hale J. K.* Forward and backward continuation for neutral functional differential equations.— J. Different. Equat., 1971, **9**, № 1, p. 168—181.
2. *Hale J. K.* Critical cases for neutral functional differential equations.— J. Different. Equat., 1971, **10**, № 1, p. 59—82.
3. *Henry* D. Linear autonomous neutral functional differential eguations.—J. Different Eguat., 1974, **15**, № 1, p. 106—128.
4. *Фодчук В. И., Клевчук И. И.* Интегральные множества и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 3, с. 334—340.
5. *Келли Дж. Л.* Общая топология.— М. : Наука, 1968.— 383 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 410 с.
7. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М. и др.* Теория показателей Ляпунова.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
8. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, **28**, № 6, с. 1297—1324.
9. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.
10. *Осипенко Г. С.* Возмущение динамических систем вблизи инвариантных многообразий. I.— Дифференц. уравнения, 1979, **15**, № 11, с. 1967—1979.
11. *Осипенко Г. С.* Возмущение динамических систем вблизи инвариантных многообразий. II.— Дифференц. уравнения, 1980, **16**, № 4, с. 620—628.
12. *Фодчук В. И.* Интегральные многообразия для нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 5, с. 798.

Черновицк. гос. ун-т

Поступила 17.11.83