УДК 519.48

А. А. Бовди, П. М. Гудивок, М. С. Семирот

Нормальные групповые кольца

Пусть G — произвольная группа, K — коммутативное кольцо с единицей, $U(K)$ — мультипликативная группа кольца K и KG — групповое кольцо группы G над кольцом K. Взаимно однозначное отображение φ кольца KG на кольцо KG называется инволюцией кольца KG, если $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(xy)=\varphi(y)\varphi(x)$ и $\varphi^2(x)=x$, $x, y \in KG$. Пусть f — гомоморфное отображение группы G в группу $U(K)$. Каждому элементу $x=\sum\limits_{g\in G}\alpha_g g$, $\alpha_g\in K$, из кольца KG поставим в соответствие элемент этого кольца $x^f=\sum\limits_{g\in G}\alpha_g f(g)g^{-1}$.

Очевидно, отображение $\varphi: x\to x^f$ является инволюцией кольца KG. Свойства инволюции φ используются при изучении мультипликативной группы кольца KG (см. [1, 2]), а также в топологии (см. [3]). Кольцо KG называется f-нормальным, если $xx^f=x^fx\ \forall x\in KG$. В случае $\ker f=G$ f-нормальное кольцо KG будем называть нормальным, а x^f обозначим через x^*. В [1] изучены нормальные групповые кольца конечной группы над кольцом целых рациональных чисел. В настоящей работе описываются f-нормальные групповые кольца KG (G — произвольная группа). Очевидно, если G — абелева, то кольцо KG f-нормально.

Теорема 1. *Пусть G — неабелева группа, K — коммутативное кольцо с единицей,* $\operatorname{char} K$ *— характеристика кольца K и f — гомоморфизм группы G в группу $U(K)$. Групповое кольцо KG f-нормально тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

а) $\operatorname{char} K\neq 2$; *$G$ — полупрямое произведение абелевой подгруппы H и циклической подгруппы $\langle b\rangle$ второго порядка,* $bhb^{-1}=h^{-1}\ \forall h\in H$; $\ker f=H$; $f(b)=-1$;

б) $\operatorname{char} K=2$; *G — полупрямое произведение абелевой подгруппы H и подгруппы $\langle b\rangle$ второго порядка,* $bhb^{-1}=h^{-1}\ \forall h\in H$; $\ker f=G$;

в) *G — гамильтонова 2-группа и* $\ker f=G$;

г) $\operatorname{char} K\neq 2$; *$G$ — прямое произведение циклической группы $\langle c\rangle$ четвертого порядка и гамильтоновой 2-группы Γ с объединенной подгруппой $\langle c^2\rangle$, совпадающей с коммутантом группы* Γ; $\ker f=\Gamma$ и $f(c)=-1$;

д) $\operatorname{char} K=2$; *G — прямое произведение экстраспециальной 2-группы E и группы T показателя $n\leqslant 2$*;

е) $\operatorname{char} K=2$; *G — прямое произведение групп T и L, где T — группа показателя $n\leqslant 2$, а L — прямое произведение экстраспециальной 2-группы E и циклической группы $\langle c\rangle$ порядка 4 с объединенной подгруппой $\langle c^2\rangle$, совпадающей с коммутантом группы E*; $\ker f=G$.

Отметим, что p-группа называется экстраспециальной, если ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют порядок p. Конечные экстраспециальные p-группы описаны в [4].

В конце настоящей работы приведено аналогичное теореме 1 описание нормальных скрещенных групповых колец (G, K, λ) в случае, когда K — область целостности.

1. Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть KG есть f-нормальное групповое кольцо, т. е. выполняется тождество

$$x^fx=xx^f,\quad x\in KG. \tag{1}$$

Если $a, b \in G$ и $[a, b] \neq 1$, то подставляя в (1) вместо x элементы $a + b$ и $a(1 + b)$, получаем:

$$f(a)\, a^{-1}b + f(b)\, b^{-1}a = f(a)\, ba^{-1} + f(b)\, ab^{-1},$$
$$aba^{-1} + f(b)\, ab^{-1}a^{-1} = b + f(b)\, b^{-1}. \tag{2}$$

Отсюда вытекает, что если $[a, b] \neq 1$, $a^2 \neq 1$ и $b^2 \neq 1$, то

$$aba^{-1} = b^{-1}, \quad a^2 = b^2, \quad f(a) = f(b) = 1. \tag{3}$$

В случае $[a, b] \neq 1$, $a^2 = 1$ и $b^2 \neq 1$ из (2) следует, что

$$aba^{-1} = b^{-1}, \quad f(a) = -1, \quad f(b) = 1. \tag{4}$$

Пусть W — совокупность всех элементов группы G, порядки которых не делят 2. Так как G — неабелева группа, то W — не пустое множество.

Предположим, что все элементы из W попарно перестановочны. Тогда подгруппа H группы G, порожденная всеми элементами из W, абелева, и в силу (3) H — нормальная подгруппа группы G. Пусть $b \in W$ и $a \in G \setminus H$. Тогда $a^2 = 1$ и $ab \in H$. Отсюда следует, что $(ab)^2 = 1$ и $aba^{-1} = b^{-1} \forall b \in W$. Поэтому централизатор $C(W)$ подмножества W совпадает с подгруппой H и G представима как полупрямое произведение абелевой нормальной подгруппы H и подгруппы $\langle a \rangle$ второго порядка, причем $a^{-1}ha = h^{-1}$ $\forall h \in H$. Ввиду (4) $f(a) = -1$ и $f(h) = 1$, $h \in H$. Следовательно, группа G и кольцо K удовлетворяют условию а) или б).

Пусть далее в множестве W существуют такие элементы a и b, что $[a, b] \neq 1$. Тогда в силу (3) $aba^{-1} = b^{-1}$, $a^2 = b^2$, $f(a) = f(b) = 1$. Отсюда вытекает, что $b^4 = 1$. Поэтому подгруппа Q, порожденная элементами a и b, является группой кватернионов восьмого порядка и $Q \subseteq \ker f$. Если элемент c принадлежит централизатору $C(Q)$ подгруппы Q и $(ac)^2 \neq 1$, то ввиду (3) $bacb^{-1} = (ac)^{-1}$. Следовательно, $c^2 = 1$. Тогда, если $d \in C(Q)$, то либо $d^2 = 1$, либо $d^2 = a^2$. Докажем, что $G = Q \cdot C(Q)$. Если $g \in G \setminus C(Q)$, то в силу (3) $[a, g] = a^{2i}$ и $[b, g] = a^{2j}$, где $i, j \in \{0, 1\}$. Поэтому $\exists\, k, r \in \{0,1\}$ такие, что $ga^kb^r \in C(Q)$. Значит, $G = Q \cdot C(Q)$ и $Q \cap C(Q) = \langle a^2 \rangle$. Отсюда вытекает, что для любого элемента $g \in G$ либо $g^2 = 1$, либо $g^2 = a^2$. Нетрудно показать, что $G' = \langle a^2 \rangle$, G/G' — элементарная абелева 2-группа и подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G совпадает с G'. Очевидно, G — локально конечная 2-группа.

Пусть $Z(G)$ — центр группы G. Очевидно, $Z(G) = \langle a^2 \rangle \times T$ или $Z(G) = \langle d \rangle \times T$, где $d^2 = a^2$ и показатель $\exp T$ группы T делит 2. Обозначим через $\overline{T}$ образ подгруппы T в факторгруппе $\overline{G} = G/\langle a^2 \rangle$. Так как $\exp \overline{G} = 2$, то $\overline{G} = \overline{L} \times \overline{T}$. Пусть L — полный прообраз группы $\overline{L}$ в G. Легко видеть, что

$$G = L \times T. \tag{5}$$

Очевидно, $Z(L) = \langle a^2 \rangle$ или $Z(L) = \langle d \rangle$. Если $Z(L) = \langle a^2 \rangle$, то $\Phi(L) = L' = \langle a^2 \rangle$. Следовательно, в этом случае L — экстраспециальная 2-группа. Пусть далее $Z(L) = \langle d \rangle$. Тогда $L/H = \overline{L}_1 \times \langle dH \rangle$, где $H = \langle a^2 \rangle$. Отсюда получаем, что полный прообраз L_1 группы $\overline{L}_1$ в группе L — экстраспециальная 2-группа и L представимо как прямое произведение подгрупп L_1 и $\langle d \rangle$ с объединенной подгруппой $\langle a^2 \rangle$, совпадающей с коммутантом группы L_1.

Покажем, что группа $G = Q \cdot C(Q)$ и кольцо K удовлетворяют одному из условий в)—е). Как было установлено выше, $Q \subset \ker f$. Пусть $c \in C(Q)$ и $x = ac + b$. Тогда из (1) находим

$$f(c)\, ab + a^3bc^2 = abc^2 + f(c)\, a^3b. \tag{6}$$

Если $c^2 = 1$, то из (6) получаем, что $f(c) = 1$. Таким образом, если $\exp C(Q) \leqslant 2$, то G — гамильтонова 2-группа и $\ker f = G$. Значит, в этом случае имеет место условие в). Пусть далее $\exp C(Q) > 2$. Тогда существует такой элемент $c \in C(Q)$, что $c^2 = a^2$. В силу (6)

$$(1 + f(c))(ab - a^3b) = 0. \tag{7}$$

Следовательно, $f(c) = -1$. Нетрудно показать, что если $\operatorname{char} K \neq 2$, то в рассматриваемом случае $\Gamma = \ker f$ — гамильтонова 2-группа и $G = \Gamma \curlyvee \langle c\rangle$, где $\Gamma \cap \langle c\rangle = a^2 = \Gamma'$, т. е. выполняется условие г).

Пусть далее $\operatorname{char} K = 2$. Тогда из (6) и (7) вытекает, что группа G удовлетворяет условиям д) или е). Необходимость доказана.

Достаточность. а). Пусть $\operatorname{char} K \neq 2$ и G — полупрямое произведение абелевой подгруппы H и циклической подгруппы $\langle b\rangle$ второго порядка, $bhb^{-1} = h^{-1}$, $h \in H$, и $\ker f = H$. Очевидно, любой элемент $x \in KG$ имеет вид $x = x_1 + x_2b$, $x_i \in KH$; $i = 1, 2$, причем $f(b) = -1$. Легко видеть, что $xx^f = (x_1 + x_2b)(x_1^* - x_2b) = x_1x_1^* - x_2x_2^* = x^fx$. Следовательно, групповое кольцо KG является f-нормальным.

Аналогично доказывается случай б).

Докажем в). Пусть G — гамильтонова 2-группа и $\ker f = G$. Тогда $G = Q \times T$, где $Q = \langle a, b \mid a^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ bab^{-1} = a^2\rangle$ и $\exp T \leqslant 2$. Элемент $x \in KQ$ можно представить в виде $x = x_1 + x_2b$, $x_i \in KH$, $H = \langle a\rangle$; $i = 1, 2$. Нетрудно показать, что $xx^* = (x_1 + x_2b)(x_1^* + x_2a^2b) = x_1x_1^* + x_1x_2b + x_1x_2a^2b + x_2x_2^*a^2$, $x^*x = x_1x_1^* + x_1^*x_2a^2b + x_1^*x_2b + x_2x_2^*a^2$. Так как $x_1^* + x_1^*a^2 = x_1 + x_1a^2$, то $xx^* = x^*x$, т. е. KQ — нормальное групповое кольцо.

Пусть $G_1 = \Gamma \times \langle c\rangle$, где Γ — конечная гамильтонова 2-группа, а $\langle c\rangle$ — группа порядка 2. Докажем, что если кольцо $K\Gamma$ нормально, то кольцо KG_1 также нормально.

Очевидно, любой элемент $x \in KG_1$ имеет вид $x = x_1 + x_2c$, $x_i \in K\Gamma$; $i = 1, 2$. Тогда

$$xx^* = x_1x_1^* + x_2x_2^* + x_2x_1^*c + x_1x_2^*c, \tag{8}$$

$$x^*x = x_1^*x_1 + x_2^*x_2 + x_2x_1^*c + x_1^*x_2c. \tag{9}$$

В силу нормальности кольца $K\Gamma$ $x_i^*x_i = x_ix_i^*$, $i = 1, 2$, $(x_1 + x_2)(x_1 + x_2)^* = (x_1 + x_2)^*(x_1 + x_2)$, т. е.

$$x_2x_1^* + x_1x_2^* = x_1^*x_2 + x_2^*x_1. \tag{10}$$

Из (8)—(10) получаем $xx^* = x^*x$. Следовательно, KG_1 — нормальное групповое кольцо. Таким образом, доказано, что если B — конечная гамильтонова 2-группа, то кольцо KB нормально. Отсюда и из локальной конечности произвольной гамильтоновой 2-группы вытекает, что кольцо KG также нормально.

Пусть $\operatorname{char} K \neq 2$, G — прямое произведение гамильтоновой 2-группы Γ и циклической группы $\langle c\rangle$ четвертого порядка с объединенной подгруппой $\langle c^2\rangle$, совпадающей с коммутантом группы Γ; $\ker f = \Gamma$ и $f(c) = -1$. Представим элемент x из KG в виде $x = x_1 + x_2c$, $x_i \in K\Gamma$; $i = 1, 2$. Тогда $xx^f = x_1x_1^* - x_2x_2^* + (x_2x_1^* - x_1x_2^*c^2)c$, $x^fx = x_1^*x_1 - x_2^*x_2 + (x_1^*x_2 - x_2^*x_1c^2)c$. Так как $K\Gamma$ — нормальное кольцо, то $x_ix_i^* = x_i^*x_i$, $i = 1, 2$, и в силу (10) $x_2x_1^* - x_1^*x_2 - x_1x_2^*c^2 + x_2^*x_1c^2 = x_2x_1^* + x_1x_2^* - x_1x_2^*(1 + c^2) - x_1^*x_2 - x_2^*x_1 + x_2^*x_1(1 + c^2) = (x_2^*x_1 - x_1x_2^*)(1 + c^2) = (x_2x_1 - x_1x_2)(1 + c^2) = 0$. Следовательно, $xx^f = x^fx$, т. е. KG — f-нормальное групповое кольцо. Условие г) доказано.

Докажем д) и е). Пусть $\operatorname{char} K = 2$, $\ker f = G$ и группа G удовлетворяет условию д) или е). Так как группа G локально конечна, то, очевидно, достаточно доказать нормальность кольца KH для каждой конечной подгруппы H группы G. Рассмотрим ряд случаев.

Пусть H — экстраспециальная 2-группа. Известно [4], что группа H — прямое произведение n экземпляров группы диэдра восьмого порядка с объединенным центром или прямое произведение группы кватернионов восьмого порядка и $n - 1$ экземпляров группы диэдра восьмого порядка с объединенным центром. Обозначим группу H через H_n. Методом индукции по n докажем нормальность кольца KH_n. Из б), в) вытекает, что при $n=1$ KH_1 — нормальное кольцо. Предположим, что KH_m — нормальное кольцо при $m<n$ и $n>1$. Нетрудно показать, что группа H_n является прямым произведением группы диэдра $D=\langle c, d \mid c^4=d^2=1,\ dcd^{-1}=c^{-1}\rangle$ и экстраспециальной подгруппы H_{n-1} с объединенной подгруппой $\langle c^2\rangle$, причем $H'_{n-1}=$ $=\langle c^2\rangle$. Очевидно, элемент $x\in KH_n$ можно представить в виде $x=x_0+$ $+x_1c+x_2d+x_3cd$, $x_i\in KH_{n-1}$; $i=1, 2, 3, 4$. Тогда $x^*=x_0^*+x_1^*c^3+x_2^*d+$ $+x_3^*cd$. Так как кольцо KH_{n-1} нормально, то

$$x_ix_i^*=x_i^*x_i,\quad x_ix_j^*+x_jx_i^*=x_i^*x_j+x_j^*x_i,\qquad i, j=0, 1, 2, 3. \tag{11}$$

Легко проверить, что

$$x_i^*(1+c^2)=x_i(1+c^2),\quad x_ix_j(1+c^2)=x_jx_i(1+c^2),\quad i, j=0, 1, 2, 3. \tag{12}$$

Отсюда получаем

$$x_ix_j^*+x_i^*x_j+(x_i^*x_j+x_ix_j^*)c^2=0. \tag{13}$$

Из (11)—(13) вытекает, что $xx^*=x^*x$. Значит, кольцо KH_n нормально.

Пусть, далее, H — прямое произведение экстраспециальной 2-группы E и циклической группы $\langle c\rangle$ порядка 4 с объединенной подгруппой $\langle c^2\rangle$, совпадающей с коммутантом группы E. Как было показано выше, кольцо KE нормально. Очевидно, если $x\in KH$, то $x=x_0+x_1c$, $x_i\in KE$; $i=0, 1$. Тогда $xx^*=x_0x_0^*+x_1x_1^*+(x_1x_0^*+x_0x_1^*c^2)c$, $x^*x=x_0^*x_0+x_1^*x_1+(x_0^*x_1+x_1^*x_0c^2)c$. Отсюда и из (11)—(13) получаем, что $xx^*=x^*x$. Следовательно, кольцо KH нормальное.

Пусть, наконец, $H=B\times T$, где T — элементарная абелева 2-группа и B либо экстраспециальная 2-группа E, либо $B=E\curlyvee\langle c\rangle$, причем $E\cap$ $\cap\langle c\rangle=\langle c^2\rangle$ и $E'=\langle c^2\rangle$. Учитывая, что кольцо KB нормально, такими же рассуждениями, как при доказательстве в), получаем, что кольцо KH также нормально.

Все остальные случаи очевидны. Теорема полностью доказана.

2. Нормальные скрещенные групповые кольца. Пусть, как и раньше, G — произвольная группа и K — коммутативное кольцо с единицей. Обозначим через (G, K, λ) скрещенное групповое кольцо группы G и кольца K при системе факторов $\lambda=\{\lambda_{a,b}\in U(K)\mid a, b\in G\}$. Будем считать, что λ — нормированная система факторов группы G над кольцом K, т. е. $\lambda_{1,a}=\lambda_{a,1}=1, a\in G$. Как известно, любой элемент x из (G, K, λ) однозначно представляется в виде $x=\sum\limits_{g\in G}\alpha_gu_g$, $\alpha_g\in K$, где $u_au_b=\lambda_{a,b}\times$ $\times u_{ab}$ и $\alpha u_a=u_a\alpha$, $a, b\in G$; $\alpha\in K$. Элемент u_1 — единица кольца (G, K, λ), и $u_a^{-1}=\lambda_{a^{-1},a}^{-1}u_{a^{-1}}$. Пусть $x^*=\sum\limits_{g\in G}\alpha_gu_g^{-1}$. Отображение $x\to x^*$ является инволюцией кольца (G, K, λ) тогда и только тогда, когда система факторов λ удовлетворяет условию

$$\lambda_{a,b}^2=1,\ a, b\in G. \tag{14}$$

В дальнейшем будем предполагать, что условие (14) выполняется. Кольцо (G, K, λ) называется нормальным, если $xx^*=x^*x\ \forall x\in(G, K, \lambda)$. Очевидно, если K — область целостности и $\operatorname{char} K=2$, то $(G, K, \lambda)=KG$.

Теорема 2. *Пусть K — область целостности с единицей характеристики $q\neq 2$ и (G, K, λ) — скрещенное групповое кольцо группы G и кольца K при системе факторов λ. Кольцо (G, K, λ) нормально тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1) *G — абелева группа и (G, K, λ) — коммутативное кольцо;*

2) *G — абелева группа показателя 2 и система факторов λ удовлетворяет условию $\lambda_{a,b}=\lambda_{b,a}$ либо $\lambda_{a,a}=\lambda_{b,b}$ $\forall\ a, b\in G$;*

3) *G — полупрямое произведение абелевой подгруппы H и подгруппы $\langle b\rangle$ порядка 2, $bhb^{-1}=h^{-1}$ $\forall\ h\in H$; система факторов λ удовлетворяет условиям $\lambda_{b,b}=-1$; $\lambda_{h^t,h}=\lambda_{h,h^t}$, $h, h^t\in H$; $\lambda_{b,h}\lambda_{h^{-1},b}\lambda_{h^{-1},h}=1$, $h\in H$;*

4) *G — гамильтонова 2-группа и (G, K, λ) — групповое кольцо KG;*

5) *G — прямое произведение циклической группы $\langle c\rangle$ порядка 4 и гамильтоновой 2-группы Γ с объединенной подгруппой $\langle c^2\rangle$, совпадающей с коммутантом группы Γ; (Γ, K, λ) — групповое кольцо $K\Gamma$ и система факторов λ удовлетворяет условиям $\lambda_{c,c} = -1$; $\lambda_{c,c^2} = 1$; $\lambda_{c,a} = \lambda_{a,c}$, $a \in \Gamma$.*

Доказательство. Пусть (G, K, λ) — нормальное кольцо, т. е. выполняется тождество

$$xx^* = x^*x, \quad x \in (G, K, \lambda). \tag{15}$$

Ввиду (14) $\lambda_{a,b} = \pm 1$, $a, b \in G$. Пусть $a, b \in G$ и $x = u_a + u_b$, $y = u_a + u_a u_b$. Тогда из (15) вытекает

$$\lambda_{b,a^{-1}}\lambda_{a^{-1},a}u_{ba^{-1}} + \lambda_{a,b^{-1}}\lambda_{b,b^{-1}}u_{ab^{-1}} = \lambda_{a^{-1},b}\lambda_{a^{-1},a}u_{a^{-1}b} + \lambda_{b^{-1},a}\lambda_{b,b^{-1}}u_{b^{-1}a}, \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{ab,a^{-1}}\lambda_{a^{-1},a}u_{aba^{-1}} + \lambda_{a,b^{-1}a^{-1}}\lambda_{b^{-1}a^{-1},ab}u_{ab^{-1}a^{-1}} = \\ = \lambda_{a^{-1},ab}\lambda_{a^{-1},a}u_b + \lambda_{b^{-1}a^{-1},a}\lambda_{b^{-1}a^{-1},ab}u_{b^{-1}}.\end{gathered} \tag{17}$$

Используя равенства (16) и (17), такими же рассуждениями, как в теореме 1, получаем, что нормальное кольцо (G, K, λ) удовлетворяет одному из условий 1)—5) в формулировке теоремы.

Докажем, что условия 1)—5) достаточны для нормальности кольца (G, K, λ).

Пусть G — абелева группа показателя 2 и система факторов λ удовлетворяет условию $\lambda_{a,b} = \lambda_{b,a}$ либо $\lambda_{a,a} = \lambda_{b,b}$ $\forall\, a, b \in G$. Тогда для любых $a, c \in G$ справедливо равенство

$$\lambda_{a,a}\lambda_{ac,a} + \lambda_{ac,ac}\lambda_{a,ac} = \lambda_{a,a}\lambda_{a,ac} + \lambda_{ac,ac}\lambda_{ac,a}. \tag{18}$$

Пусть $x = \sum_{a\in G} \alpha_a u_a$, $\alpha_a \in K$. Очевидно, $x^* = \sum_{a\in G} \alpha_a \lambda_{a,a} u_a$ и

$$xx^* = \sum_{c\in G}\left(\sum_{a\in G}\alpha_a\alpha_{ac}\lambda_{ac,ac}\lambda_{a,ac}\right)u_c = \sum_{c\in G}\beta_c u_c,$$

$$x^*x = \sum_{c\in G}\left(\sum_{a\in G}\alpha_a\alpha_{ac}\lambda_{ac,ac}\lambda_{ac,a}\right)u_c = \sum_{c\in G}\gamma_c u_c.$$

Нетрудно показать, что

$$\beta_c = \sum_{a\in V}\alpha_a\alpha_{ac}(\lambda_{ac,ac}\lambda_{a,ac} + \lambda_{a,a}\lambda_{ac,a}),\ \gamma_c = \sum_{a\in V}\alpha_a\alpha_{ac}(\lambda_{ac,ac}\lambda_{ac,c} + \lambda_{a,a}\lambda_{a,ac})$$

(V — некоторое подмножество группы G). Отсюда и из (18) вытекает, что $xx^* = x^*x$, т. е. кольцо (G, K, λ) нормально.

Пусть далее группа G и система факторов λ удовлетворяют условию 3). Легко видеть, что кольцо (H, K, λ) коммутативно и $u_b u_h^{-1} = u_h u_b$, $u_b u_h = u_{h^{-1}} u_b$, $h \in H$. Используя эти равенства, получаем, что если $x = x_1 + x_2 u_b$, $x_i \in (H, K, \lambda)$, $i = 1, 2$, то $x^* = x_1^* - x_2 u_b$ и $xx^* = x_1 x_1^* + x_2 x_2^* = x^* x$. Следовательно, в случае 3) кольцо (G, K, λ) нормально.

Наконец, пусть группа G и система факторов λ удовлетворяет условию 5). Представим элемент x из (G, K, λ) в виде $x = x_1 + x_2 u_c$, $x_i \in K\Gamma$. Нетрудно проверить, что $x_i u_c = u_c x_i$, $i = 1, 2$, и $x^* = x_1^* - x_2^* u_c u_{a^2}$. Поэтому $xx^* = x_1x_1^* - x_2x_2^* + (x_2x_1^* - x_1x_2^*u_{a^2})u_c$, $x^*x = x_1^*x_1 - x_2^*x_2 + (x_1^*x_2 - x_2^*x_1u_{a^2})u_c$. Так как групповое кольцо $K\Gamma$ нормально и $x_2x_1^* - x_1x_2^*u_{a^2} - x_1^*x_2 + x_2^*x_1u_{a^2} = 0$, то $xx^* = x^*x$. Значит, (G, K, λ) — нормальное кольцо.

Доказательство случая 4) следует из теоремы 1. Случай 1) очевиден. Теорема полностью доказана.

1. *Берман С. Д.* Об уравнении $x^m = 1$ в целочисленном групповом кольце.— Укр. мат. журн., 1955, 7, № 3, с. 253—261.
2. *Бовди А. А.* Унитарность мультипликативной группы целочисленного группового кольца.— Мат. сб., 1982, **119**, № 3, с. 387—400.
3. *Новиков С. П.* Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов *K*-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. II.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 3, с. 475—500.
4. *Huppert B.* Endliche Gruppen.— Berlin : Springer, 1971.— 410 S.

Ужгород. гос. ун-т

Поступила 19.12.83