УДК 519.21

Т. В. Каратаева, Т. А. Скороход

Обобщение некоторых результатов теории стохастических полугрупп

Эта статья является развитием результатов авторов [1].

Пусть (Ω, F, P) — вероятностное пространство, H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y), $(x, x) = \| x \|_H^2$, $\mathfrak{h}$ — гильбертово пространство операторов Гильберта — Шмидта со скалярным произведением $\langle A, B \rangle = \mathrm{sp}\, A^*B$. Норма в $\mathfrak{h}$ обозначается $\sigma(\cdot)$.

Определение 1. *Случайная функция $X(s, t)$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, со значениями в $E + \mathfrak{h}$ называется мультипликативной стохастической полугруппой, если выполнены условия:*

1) $X(s, u)\, X(u, t) = X(s,t)'$, $X(s, s), = E \pmod P$, $s \leqslant u \leqslant t$;

2) $M\sigma^2(X(s, t) - E) \to 0$, $|s - t| \to 0$;

3) *если* $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$, *то* $X(t_{k-1}, t_k)$, $k = \overline{1, n}$, *независимы в совокупности.*

Определение 2. *Случайная функция со значениями в $\mathfrak{h}$ называется аддитивной стохастической полугруппой, если выполнены условия:*

1) $Y(s, u) + Y(u, t) = Y(s, u)$, $Y(s, s) = 0 \pmod P$, $0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t \leqslant T$;

2) $M\sigma^2(Y(s, t)) \to 0$, $|s - t| \to 0$;

3) *если* $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$, *то* $Y(t_{k-1}, t_k)$, $k = \overline{1, n}$, *независимы в совокупности.*

Обозначим $M\sigma^2(\cdot) = d^2(\cdot)$. Здесь $d(\cdot)$ — это $|\cdot|_4$ в [2]. Пусть $X(s, t)$ — функция, удовлетворяющая условиям 2) и 3) в определении 1 со значениями в $E + \mathfrak{h}$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1. *Обозначим*

$$Z(s, t) = \lim \prod_{k=1}^{m_n} X(t_{k-1}^n, t_k^n), \tag{1}$$

$s = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t$, *предел в норме* $d(\cdot)$ *при* $\max(t_k^n - t_{k-1}^n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. *Предел (1) существует и будет стохастической полугруппой, если выполнены следующие условия:*

1) *существует неслучайная непрерывная полугруппа* $M(s, t) = \lim M_n(s, t) = \lim \prod_{k=1}^{m_n} MX(t_{k-1}^n, t_k^n)$, *предел в обычной операторной норме* $\|\cdot\|$ *при* $\max(t_{k-1}^n - t_k^n) \to 0$, *такая, что* $\| M(s, t) - E \| \to 0$, $|s - t| \to 0$;

2) *существует аддитивная полугруппа* $Y(s, t) = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (X(t_{k-1}^n, t_k) - MX(t_{k-1}^n, t_k^n))$, *предел в норме* $d(\cdot)$ *при* $\max(t_{k-1}^n - t_k^n) \to 0$, *такая, что* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} d(Y(t_{k-1}^n, t_k^n) - X(t_{k-1}^n, t_k^n) + MX(t_{k-1}^n, t_k^n)) < \infty$.

Доказательство теоремы приведено в [1].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда имеют место следующие формулы:*

$$Y(s, t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (Z(t_{k-1}^n, t_k^n) - M(t_{k-1}^n, t_k^n)), \quad Z(s, t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m_n} (Y(t_{k-1}^n, t_k^n) + M(t_{k-1}^n, t_k^n)).$$

Доказательство. Определим аддитивную полугруппу $Y_0(s, t) = \int_s^t M(0, u)\, Y(du)\, M(0, u)^{-1}$, где $Y(u) = Y(0, u)$. По $Y_0(s, t)$ построим мультипликативную полугруппу $X_0(s,t)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{m_n}(E+Y_0(t_{k-1}^n,t_k^n))$. (В дальнейшем вместо t_k^n будем писать t_k.)

В [1] показано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{m_n}X(t_{k-1},\ t_k)$ существует и равен $M(0,s)^{-1}\times$ $\times X_0(s,t)\,M(0,t)=Z(s,t)$. Докажем, что существует

$$Y(s,t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}(Z(t_{k-1},t_k)-M(t_{k-1},t_k)).$$

Для этого оценим нормы разности

$$d(\Sigma Z(t_{k-1},t_k)-MZ(t_{k-1},t_k)-Y(t_{k-1},t_k))=d(\Sigma M(0,t_{k-1})^{-1}X_0(t_{k-1},t_k)\times$$
$$\times M(0,t_k)-M(0,t_{k-1})^{-1}M(0,t_k)-\int_{t_{k-1}}^{t_k}M(0,u)^{-1}Y_0(du)\,M(0,u))=$$
$$=d(\Sigma M(0,t_{k-1})^{-1}(X_0(t_{k-1},t_k)-E-Y_0(t_{k-1},t_k))\,M(0,t_k)+M(0,t_{k-1})^{-1}\times$$
$$\times Y_0(t_{k-1},t_k)\,M(0,t_k)-M(0,t_{k-1})\int_{t_{k-1}}^{t_k}Y_0(du)\,M(0,u)+\int_{t_{k-1}}^{t_k}M(0,t_{k-1})^{-1}\times$$
$$\times Y_0(du)\,M(0,u)-\int_{t_{k-1}}^{t_k}M(0,u)^{-1}Y_0(du)\,M(0,u))=d(\Sigma M(0,t_{k-1})^{-1}\times$$
$$\times(X_0(t_{k-1},t_k)-E-Y_0(t_{k-1},t_k))\,M(0,t_k)+M(0,t_{k-1})^{-1}\times$$
$$\times\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}Y_0(du)\,(M(0,t_k)-M(0,u))+\int_{t_{k-1}}^{t_k}(M(0,t_{k-1})^{-1}-M(0,u)^{-1})\times\right.$$
$$\left.\times Y_0(du)\,M(0,u)\right)\leqslant d(\Sigma M(0,t_{k-1})^{-1}(X_0(t_{k-1},t_k)-E-Y_0(t_{k-1},t_k))\times$$
$$\times M(0,t_k))+d(\Sigma M(0,t_{k-1})^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}Y_0(du)\,(M(0,t_k)-M(0,u))+$$
$$+d\left(\sum\int_{t_{k-1}}^{t_k}(M(0,t_{k-1})^{-1}-M(0,u)^{-1})\,Y_0(du)\,M(0,u)\right).\qquad(2)$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. Рассмотрим квадрат нормы первого слагаемого

$$d^2(\Sigma M(0,t_{k-1})^{-1}(X_0(t_{k-1},t_k)-E-Y_0(t_{k-1},t_k))\,M(0,t_k))=$$
$$=\Sigma d^2(M(0,t_{k-1})^{-1}(X_0(t_{k-1},t_k)-E-Y_0(t_{k-1},t_k))\,M(0,t_k))\leqslant$$
$$\leqslant\sup_n\sup_k\|M(0,t_{k-1})^{-1}\|^2\sup_n\sup_k\|M(0,t_k)\|^2\,\Sigma\,d^2(X_0(t_{k-1},t_k)-E-$$
$$Y_0(t_{k-1},t_k)=\sup_n\sup_k\|M(0,t_{k-1})^{-1}\|^2\sup_n\sup_k\|M(0,t_k)\|^2d^2(\Sigma(X_0(t_{k-1},t_k)-$$
$$-E-Y_0(t_{k-1},t_k)).\qquad(3)$$

Так как первые два сомножителя ограничены, а третий $d^2(\Sigma(X_0(t_{k-1},t_k)-$ $-E-Y_0(t_{k-1},t_k)))=d^2(\Sigma(X_0(t_{k-1},t_k)-E-Y_0(s,t))\to 0,\quad n\to\infty$, то (3) также стремится к нулю при $n\to\infty$.

Оценим квадрат второго слагаемого

$$d^2(\Sigma M(0,t_{k-1})^{-1}\int_{k-1}^{t_k}Y_0(du)\,(M(0,t_k)-M(0,u))=\Sigma d^2(M(0,t_{k-1})^{-1}\times$$

$$\times \int_{t_{k-1}}^{t_k} Y_0(du)(M(0,t_k)-M(0,u)) \leqslant \sup_k \|M(0,t_{k-1})^{-1}\|^2 \times$$

$$\times \sup_k \sup_{t_{k-1}\leqslant u\leqslant t_k} \|M(0,t_k)-M(0,u)\|^2 d^2(\Sigma Y(t_{k-1},t_k)).$$

Так как (см. [1]) $\sup_n \sup_k \|M(0,t_{k-1})^{-1}\| < \infty$, $\sup_n \sup_k \sup_{t_{k-1}\leqslant u\leqslant t_k} \|M(0,t_k) - M(0,u)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то квадрат второго слагаемого также стремится к нулю.

Аналогично можно показать, что квадрат третьего слагаемого стремится к нулю при $n\to\infty$. Здесь надо отметить, что (см. [1])

$$\sup_k \sup_{t_{k-1}\leqslant u\leqslant t_k} \|M(0,u)^{-1} - M(0,t_{k-1})^{-1}\| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Из полученных оценок следует, что (2) стремится к нулю при $n\to\infty$ и справедлива формула $Y(s,t) = \lim \Sigma(Z(t_{k-1},t_k) - M(t_{k-1},t_k))$. Справедливость формулы $Z(s,t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m_n} (Y(t_{k-1},t_k) + M(t_{k-1},t_k))$ следует из работы [3].

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *предел* $Z(s,t) = \lim \Pi X(t_{k-1},t_k)$ *существует и является стохастической полугруппой;*

2) $\sup_{\{t_k\}} \sum_{k=1}^{m_n} d(Z(t_{k-1},t_k) - X(t_{k-1},t_k)) < \infty$, $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m_n} = t$,

$$\max(t_{k-1}-t_k) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Тогда существует аддитивная полугруппа $Y(s,t) = \lim \Sigma(X(t_{k-1},t_k) - MX(t_{k-1},t_k)) = \lim \Sigma(Z(t_{k-1},t_k) - MZ(t_{k-1},t_k))$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда из [3, 4] следует существование аддитивной полугруппы

$$Y(s,t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (Z(t_{k-1},t_k) - MZ(t_{k-1},t_k)).$$

Оценим

$$d^2(\Sigma X(t_{k-1},t_k) - MX(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k) + MZ(t_{k-1},t_k)) =$$

$$= \Sigma d^2(X(t_{k-1},t_k) - MX(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k) + MZ(t_{k-1},t_k)) \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma d(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)) + \sigma(M(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},\ _k)))^2 =$$

$$= \Sigma d^2(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)) + 2d(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)) \times$$

$$\times \sigma(M(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k))) + \sigma^2(M(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)) \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sup_k d(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)) \sup_{\{t_k\}} \Sigma d(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)), \quad (4)$$

так как $\sigma(MX(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)) \leqslant d(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k))$. По условию теоремы

$$\sup_{\{t_k\}} \Sigma d(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)) < \infty, \ d(X(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)) \leqslant$$

$$\leqslant d(X(t_{k-1},t_k) - E) + d(Z(t_{k-1},t_k) - E) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Следовательно, (4) стремится к нулю при $n\to\infty$ и $\lim \Sigma(X(t_{k-1},t_k) - MX(t_{k-1},t_k)) = \lim \Sigma(Z(t_{k-1},t_k) - MZ(t_{k-1},t_k)) = Y(s,t)$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если в условиях теоремы* $\sup_{\{t_k\}} \Sigma \|MX(t_{k-1},t_k) - E\| < \infty$, *то для* $Y(s,t)$ *выполняется условие* $\sup_{\{t_k\}} \Sigma d(Y(t_{k-1},t_k) - X(t_{k-1},t_k) + MX(t_{k-1},t_k)) < \infty$.

Доказательство. Легко видеть, что имеет место неравенство

$$\Sigma d(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + MX(t_{k-1}, t_k)) = \Sigma d(Y(t_{k-1}, t_k) - Z(t_{k-1}, t_k) + Z(t_{k-1}, t_k) - MZ(t_{k-1}, t_k) + MZ(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + MX(t_{k-1}, t_k)) \leqslant \Sigma d(Y(t_{k-1}, t_k) - Z(t_{k-1}, t_k) + MZ(t_{k-1}, t_k)) + 2\Sigma d(X(t_{k-1}, t_k) - Z(t_{k-1}, t_k)).$$

Так как по условию теоремы $\Sigma d(X(t_{k-1}, t_k) - Z(t_{k-1}, t_k)) < \infty$, то остается оценить сумму $\Sigma d(Y(t_{k-1}, t_k) - Z(t_{k-1}, t_k) + MZ(t_{k-1}, t_k))$. По $Z(s, t)$ построим мартингальную полугруппу $Z_0(s, t) = M(0, s) Z(s, t) M(0, t)^{-1}$, где $M(s, t) = MZ(s, t)$. Ей соответствует аддитивная полугруппа $Y_0(s, t) = \lim \Sigma (Z_0(t_{k-1}, t_k) - E)$.

В [4] показано, что $Y_0(s, t)$ можно представить в виде $Y_0(s, t) = \int\limits_s^t M(0, u) Y(du) M(0, u)^{-1}$. Тогда $\int\limits_s^t M(0, u)^{-1} Y_0(du) M(0, u) = Y(s, t)$. Представим $Y(s, t)$, $Z(s, t)$ через $Y_0(s, t)$, $Z_0(s, t)$. Получим

$$\Sigma d(Y(t_{k-1}, t_k) - Z(t_{k-1}, t_k) + MZ(t_{k-1}, t_k)) = \Sigma d\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} M(0, u)^{-1} Y_0(du) \times M(0, u) - M(0, t_{k-1}) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} Y_0(du) M(0, u) + M(0, t_{k-1})^{-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} Y_0(du) M(0, u) - M(0, t_{k-1})^{-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} Y_0(du) M(0, t_k) + M(0, t_{k-1})^{-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} Y_0(du) M(0, t_k) - M(0, t_{k-1})^{-1} Z_0(t_{k-1}, t_k) M(0, t_k) + M(0, t_{k-1})^{-1} M(0, t_k)\right) =$$

$$= \Sigma d \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (M(0, u)^{-1} - M(0, t_{k-1})^{-1}) Y_0(du) M(0, u) + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} M(0, t_{k-1})^{-1} \times Y_0(du)(M(0, u) - M(0, t_k)) + M(0, t_{k-1})^{-1} (Y_0(t_{k-1}, t_k) - Z_0(t_{k-1}, t_k) + E) M(0, t_k) \leqslant \Sigma d\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (M(0, u)^{-1} - M(0, t_k)^{-1}) \times Y_0(du) M(0, u)\right) + \Sigma d\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} M(0, t_{k-1}) Y_0(du)(M(0, u) - M(0, t_k))\right) + \Sigma d(M(0, t_{k-1})^{-1} (Y_0(t_{k-1}, t_k) - Z_0(t_{k-1}, t_k) + E) M(0, t_k)).$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Для первого имеем

$$\Sigma d\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (M(0, u)^{-1} - M(0, t_{k-1})^{-1}) Y_0(du) M(0, u)\right) \leqslant \Sigma \sup_{t_{k-1} \leqslant u \leqslant t_k} \| M(0, u)^{-1} - M(0, t_{k-1})^{-1} \| d(Y_0(t_{k-1}, t_k)) \times \sup_{t_{k-1} \leqslant u \leqslant t_k} \| M(0, u) \| \leqslant \Sigma \sup_{t_{k-1} \leqslant u \leqslant t_k} \| M(0, u)^{-1} \| \| M(t_{k-1}, u) - E \| \times d(Y_0(t_{k-1}, t_k)) \sup_{t_{k-1} \leqslant u \leqslant t_k} \| M(0, u) \| \leqslant \sup_n \sup_k \sup_{t_{k-1} \leqslant u \leqslant t_k} \| M(0, u) \| \times \sup_k d(Y_0(t_{k-1}, t_k)) \sup_n \sup_k \sup_{t_{k-1} \leqslant u \leqslant t_k} \| M(0, u)^{-1} \| \sup_{\{t_k\}} \Sigma \| E - M(t_{k-1}, t_k) \|. \quad (5)$$

Так как

$$\sup_n \sup_k \sup_{t_{k-1}\leqslant u\leqslant t_k} \| M(0, u)^{-1} \| < \infty, \quad \sup_n \sup_k d(Y_0(t_{k-1}, t_k)) \to 0,$$

$$\sup_n \sup_k \sup_{t_{k-1}\leqslant u\leqslant t_k} \| M(0, u) \| < \infty, \quad \sup_{\{t_k\}} \Sigma \| E - M(t_{k-1}, t_k) \| < \infty,$$

то (4) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Аналогично можно оценить второе слагаемое. Оно также стремится к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим третье слагаемое:

$$\Sigma d(M(0, t_{k-1})^{-1} Y_0(t_{k-1}, t_k) - Z_0(t_{k-1}, t_k) + E) M(0, t_k) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k \| M(0, t_{k-1})^{-1} \| \sup_k \| M(0, t_k) \| \sup_{\{t_k\}} \Sigma d(Y_0(t_{k-1}, t_k) - Z_0(t_{k-1}, t_k) + E).$$

Первые два сомножителя ограничены: $\sup_k \| M(0, t_{k-1})^{-1} \| < \infty$, $\sup_k \| M(0, t_k) \| < \infty$. Оценим

$$\sup_{\{t_k\}} \Sigma d(Y_0(t_{k-1}, t_k) - Z_0(t_{k-1}, t_k) + E). \tag{6}$$

Из оценки в [1, с. 138] следует, что

$$\Sigma d(Y_0(t_{k-1}, t_k) - Z_0(t_{k-1}, t_k) + E) \leqslant \Sigma C(T) d^2(Y(t_{k-1}, t_k)) \leqslant C(T) \times \times d^2(\Sigma Y(t_{k-1}, t_k)) \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $C(T)$ — константа, не зависящая от s и t. Следовательно, (6) стремится к нулю при $n \to \infty$ и $\Sigma d(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + MX(t_{k-1}, t_k)) < \infty$. Теорема доказана.

Докажем несколько следствий из теорем.

Следствие 1. *Предел* $Z(s, t) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{m_n} X(t_{k-1}, t_k)$, $S = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m_n} = T$, *в норме* $d(\cdot)$ *при* $\max(t_{k-1} - t_k) \to 0$ *существует и будет стохастической полугруппой, если выполнены условия:*

1) *существует неслучайная непрерывная полугруппа* $M(s, t) = \lim M_n(s, t) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{m_n} MX(t_{k-1}, t_k)$, *предел в обычной операторной норме* $\|\cdot\|$ *при* $\max(t_{k-1} - t_k) \to 0$, *такая, что* $\| M(s, t) - E \| \to 0$ *и* $\sup\limits_{\{tk\}} \Sigma \| M(t_{k-1}, t_k) - E \| < \infty$;

2) *существует аддитивная полугруппа* $V(s, t) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_n} (X(t_{k-1}, t_k) - E)$, *предел в норме* $d(\cdot)$ *при* $\max(t_{k-1} - t_k) \to 0$, $n \to \infty$, *такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_n} d(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E) < \infty$.

Доказательство. Предел $Z(s, t)$ существует и является стохастической полугруппой, если выполнены условия теоремы 1. Покажем, что они следуют из условий следствия 1.

Так как $Y(s, t) = \lim \Sigma (X(t_{k-1}, t_k) - E + MX(t_{k-1}, t_k) - MX(t_{k-1}, t_k)) = \lim \Sigma (X(t_{k-1}, t_k) - MX(t_{k-1}, t_k)) + \lim \Sigma (MX(t_{k-1}, t_k) - E) = \lim \Sigma (X(t_{k-1}, t_k) - MX(t_{k-1}, t_k)) + M \lim \Sigma (X(t_{k-1}, t_k) - E)$, то $\lim \Sigma(X(t_{k-1}, t_k) - MX(t_{k-1}, t_k)) = Y(s, t) - MY(s, t) = \tilde{Y}(s, t)$. Аналогично $\Sigma d(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + MX(t_{k-1}, t_k) - E + E) \leqslant \Sigma d(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E) + \Sigma \| MX(t_{k-1}, t_k) - E \| < \infty$. Значит, условия теоремы 1 выполняются и предел $Z(s, t) = \lim\limits_{n\to\infty} \Pi X(t_{k-1}, t_k)$ существует и является стохастической полугруппой.

Следствие 2. *Предел* $Z(s, t) = \lim \overleftarrow{\prod\limits_{k=1}^{m}} X(t_{k-1}, t_k)$, $s = t_0 < t_1 < \ldots$

$\ldots < t_{m_n} = t$ *в норме* $d(\cdot)$ *при* $\max(t_{k-1} - t_k) \to 0$, $n \to \infty$, *существует и будет стохастической полугруппой, если выполнены следующие условия:*

1) *существует неслучайная непрерывная полугруппа* $\overleftarrow{M}(s, t) = \lim \overleftarrow{M}_n(s, t) = \lim \overleftarrow{\Pi} MX(t_{k-1}, t_k)$, *предел в обычной операторной норме* $\|\cdot\|$ *при* $\max(t_{k-1} - t_k) \to 0$, $n \to \infty$, *такая, что* $\|\overleftarrow{M}(s, t) - E\| \to 0$, $|s - t| \to 0$;

2) *существует аддитивная полугруппа* $Y(s, t) = \lim \Sigma(X(t_{k-1}, t_k) - MX(t_{k-1}, t_k))$, *предел в норме* $d(\cdot)$ *при* $\max(t_{k-1} - t_k) \to 0$, *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} d(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + MX(t_{k-1}, t_k)) < \infty.$$

Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 1, только вместо правых произведений надо рассматривать левые и вместо последовательности $X_n(s, t) = \prod_{k=1}^{m_n} \overleftarrow{M}_n(0, t_{k-1}) X(t_{k-1}, t_k) \times \overleftarrow{M}_n(0, t_k)^{-1}$ — последовательность $X_n(s, t) = \overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} \overleftarrow{M}_n(0, t_k)^{-1} X(t_{k-1}, t_k) \times \overleftarrow{M}(0, t_{k-1})$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\lim X_n(s, t) = X_0(s, t)$, где $X_0(s, t) = \lim \overleftarrow{\Pi}(E + Y_0(t_k, t_{k-1}))$, $Y_0(s, t) = \int_s^t \overleftarrow{M}(0, u)^{-1} Y(du) \overleftarrow{M}(0, u)$. Но $X_n(s, t) = \overleftarrow{M}_n(0, t)^{-1} \overleftarrow{\Pi} X(t_{k-1}, t_k) \times \overleftarrow{M}(0, s)$. Отсюда $X_0(s, t) = \overleftarrow{M}(0, t)^{-1} \lim \overleftarrow{\Pi} X(t_{k-1}, t_k) \overleftarrow{M}(0, s)$ и $\lim \overleftarrow{\Pi} X(t_{k-1}, t_k) = \overleftarrow{M}(0, t) X_0(s, t) \overleftarrow{M}(0, s)^{-1}$.

1. *Каратаева Т. В., Скороход Т. А.* Предельная теорема для произведений случайных операторов.— В кн.: Проблемы теории вероятностных распределений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 67—75.
2. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 213 с.
3. *Буцан Г. П., Буцан С. П.* Неоднородные стохастические полугруппы.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 4, с. 437—443.
4. *Скороход Т. А.* О замыкании стохастических полугрупп.— В кн.: Вероятностные распределения в бесконечномерных пространствах. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978, с. 144—153.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 09.01.84