УДК 519.21

А. Я. Дороговцев, С. Д. Ивасишен, А. Г. Кукуш

Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части

В настоящей работе изучается уравнение теплопроводности со случайными источниками, заданное в ограниченной области изменения пространственной переменной и на неограниченном временном интервале. Теории подобных и более общих уравнений посвящена обширная литература (см. [1]). Однако задача об асимптотическом поведении решений этих уравнений практически не исследовалась.

Рассмотрим нелинейное стохастическое уравнение теплопроводности

$$\partial u/\partial t - \partial^2 u/\partial x^2 = \sigma(u, t, x)\,\dot{w}(t), \quad t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(t, 0) = \psi_1(t), \quad u(t, 1) = \psi_2(t), \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Здесь $\{w(t)\}$ — стандартный винеровский процесс, согласованный с потоком σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$; σ — неслучайная измеримая функция трех переменных. Возможны два принципиально различных подхода к математически корректной постановке задачи (1)—(3). Один из них состоит в замене уравнения (1) некоторым стохастическим интегральным уравнением, содержащим функцию Грина [1]. При другом подходе уравнение (1) трактуется как стохастическое уравнение Ито с фазовым пространством $L_2[0, 1]$ и неограниченным оператором переноса [2] либо как уравнение Ито с пространством обобщенных функций в качестве фазового пространства и уже ограниченным оператором переноса [3]. Дадим соответствующие определения.

Рассмотрим невозмущенное уравнение

$$\partial u/\partial t - \partial^2 u/\partial x^2 = 0, \quad t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{4}$$

Обозначим через $F(t, x)$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, решение смешанной краевой задачи (2) — (4); через G_0 — функцию Грина,

$$G_0(t-\tau, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n (t-\tau)} \varphi_n(x)\,\varphi_n(\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t, \quad 0 \leqslant x, \quad \xi \leqslant 1.$$

Здесь $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$, $n \geqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, — собственные значения и нормированные собственные функции оператора $A = -\partial^2/\partial x^2$ в пространстве $H = L_2[0, 1]$.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (1)—(3) *называется случайный процесс* $\{\tilde{u}_t\}$ *со значениями в* H, *при каждом* t $\mathscr{F}_t$-*измеримый и такой, что с вероятностью* 1

$$\tilde{u}_t = \int_0^t dw(\tau) \int_0^1 \sigma(\tilde{u}_\tau(\xi), \tau, \xi)\, G_0(t-\tau, x, \xi)\, d\xi + F(t, x), \tag{5}$$

где равенство понимается при каждом фиксированном t *как равенство функций из* H; *под знаком стохастического интеграла стоит случайная функция со значениями в* H.

Рассмотрим случай однородных граничных условий

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{6}$$

Будем считать, что оператор A действует на функции из соболевского пространства $W_2^2 \subset H$. Обозначим $H_+ = \{f \in W_2^2 \mid f(0) = 0,\ f(1) = 0\}$. Рассмотрим в H стохастическое уравнение

$$du_t = -Au_t dt + \sigma(u_t, t)\, dw(t), \quad t \geqslant 0, \tag{7}$$

с начальным условием

$$u_0 = \varphi \in H_+. \tag{8}$$

Здесь $\sigma(u_t, t) = \sigma(u(t, \cdot), t, \cdot) \in H$, $t \geqslant 0$; $\varphi = \varphi(\cdot)$. Решением задачи (1), (2), (6) назовем решение задачи (7), (8); точнее, дадим следующее определение.

Определение 2. *Решением задачи* (1), (2), (6) *называется случайный процесс* $\{u_t\}$, *при каждом* t $\mathscr{F}_t$-*измеримый и такой, что с вероятностью* 1 $u_t \in H_+$, $t \geqslant 0$, *и*

$$u_t = u_0 - \int_0^t Au_s ds + \int_0^t \sigma(u_s, s)\, dw(s), \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

Пусть пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, на котором задан процесс $\{w(t)\}$, есть полное вероятностное пространство; поток σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$ пополнен по мере P. Положим $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1[0, 1]$ (определение и свойства этого соболевского пространства см., например, в [4]). Можно считать, что $\|f\|_V^2 = \int_0^1 (\partial f/\partial x)^2 dx$. Пространство V^* естественно отождествить с $W_2^{-1}[0, 1]$ [4]. Линейный оператор $\tilde{A}$, действующий по закону $\langle \tilde{A}v, \varphi\rangle = -\int_0^1 v'\varphi' dx$, $v \in V$, $\varphi \in V$, переводит функции из V в пространство V^*. Интенсивность σ будем считать функцией, действующей из $V \times [0, \infty)$ в H: $\sigma(v, t)(x) = \sigma(v(x), t, x)$, $v \in V$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, причем при каждом $v \in V$ функция $\sigma(v, t)$ измерима по t относительно меры Лебега. Указанные ограничения на σ выполняются, если функция $\sigma(u, t, x)$ измерима по совокупности трех вещественных переменных, а также при $v \in V$, $t \geqslant 0$ интеграл $\int_0^1 \sigma^2(v(x), t, x)\, dx$ сходится.

Рассмотрим на множестве $[0, \infty) \times \Omega$ эволюционное стохастическое уравнение с начальным условием $u_0 \in H$:

$$v(t, \omega) = u_0 + \int_0^t \tilde{A}v(s, \omega)\, ds + \int_0^t \sigma(v(s, \omega), s)\, dw(s, \omega). \tag{10}$$

Определение 3. V-*решением задачи* (1), (2), (6) *называется функция* $v(t, \omega)$ *со значениями в* V, *определенная на* $[0, \infty) \times \Omega$, *измеримая по* (t, ω), $\mathscr{F}_t$-*согласованная и при каждом* $T > 0$ *удовлетворяющая неравенству*

$$E \int_0^T (\partial v(t)/\partial x)^2 dt < \infty \tag{11}$$

и равенству (10), *понимаемому как равенство элементов* V^* *при почти всех* $(t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega$ (*по мере* $\lambda \otimes P$, λ — *мера Лебега*).

Определение 4. H-*решением задачи* (1), (2), (6) *называется функция* $u(t, \omega)$ *со значениями в* H, *определенная на* $[0, \infty) \times \Omega$, *сильно непрерывная в* H *по* t, $\mathscr{F}_t$-*согласованная и такая, что* 1) *для почти всех* (t, ω) $u \in V$, *при каждом* $T > 0$ $E\int_0^T (\partial u(t)/\partial x)^2\, dt < \infty$; 2) *существует множество* $\Omega' \subset \Omega$ *полной вероятности, на котором при всех* $t \geqslant 0$ *функция* $u(t, \omega)$ *удовлетворяет уравнению* (10), *в котором равенство понимается как равенство элементов* V^*.

Введем понятия V- и H-решений для неоднородной краевой задачи. Обозначим $u_1(t, x) = F(t, x)|_{\varphi=0}$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. В уравнении (1) сделаем замену $u = v + u_1$. Для v получим следующую смешанную задачу с однородными граничными условиями:

$$\partial v/\partial t = \partial^2 v/\partial x^2 + \sigma(v + u_1(t, x), t, x)\, \dot{w}(t), \quad t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{12}$$

$$v(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{13}$$

$$v(t, 0) = 0, \quad v(t, 1) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{14}$$

Определение 5. $V(H)$-*решением задачи* (1)—(3) *называется функция* $u(t, x) = u_1(t, x) + v(t, x)$, *где* $v(t, x)$ *есть* $V(H)$-*решение задачи* (12)—(14).

З а м е ч а н и е 1. В случае $\psi_i \in L_\infty^{\text{loc}}(R_+)$, $R_+ = (0, \infty)$, $i = 1, 2$, u_1 задает непрерывную функцию от t со значениями в H. Поэтому если функция интенсивности σ действует из $H \times [0, \infty)$ в H и измерима по t, то функция интенсивности уравнения (12) $\tilde{\sigma}(v, t) = \sigma(v + u_1(t), t)$ также действует из $H \times [0, \infty)$ в H и измерима по t.

Исследуем асимптотику обобщенного решения. Нам понадобится следующая оценка функции Грина G_0, вытекающая из результатов [5].

Л е м м а 1. *Справедливо неравенство* $|G_0(t-\tau, x, \xi)| \leqslant C_0(t-\tau)^{-1/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau) - \delta(t-\tau)\}$, *где* C_0, c, δ — *некоторые положительные постоянные,* $\delta < \pi^2$, $0 \leqslant \tau < t < \infty$, $0 \leqslant x, \xi \leqslant 1$.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\varphi \in H$;

2) ψ_i — *ограниченная функция,* $e^{-\pi^2 t}\int_0^t e^{\pi^2\tau}|\psi_i(\tau)|d\tau \to 0$, $t \to \infty$, $i = 1, 2$;

3) $\|\sigma(h(\cdot), s, \cdot)\|_H^2 \leqslant \tilde{C}(s)(1 + \|h\|_H^2)$, $h \in H$, $s > 0$, *где* $\tilde{C}$ — *ограниченная функция,* $\tilde{C}(s) \to 0$, $s \to \infty$;

4) $\|\sigma(h_2, s) - \sigma(h_1, s)\|_H \leqslant L(s)\|h_1 - h_2\|_H$, $h_i \in H$, $i = 1, 2$, $s > 0$, *где* L — *локально ограниченная функция.*

Тогда обобщенное решение $\{\tilde{u}_t\}$ *задачи* (1) — (3) *существует и единственно, причем* $\sup\limits_{t \geqslant 0} E\|\tilde{u}_t\|_H^2 < \infty$; $E\|\tilde{u}_t\|_H^2 \to 0$, $t \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из явного выражения для $F(t, x)$ (см. [6]) легко вывести, что $\sup\limits_{t \geqslant 0}\|F(t, \cdot)\|_H^2 < \infty$. Существование и единственность обобщенного решения доказывается теперь так же, как в [1]. Далее, $E\tilde{u}_t = F(t, \cdot)$, $t \geqslant 0$, и снова из явного выражения для F следует $\|E\tilde{u}_t\|_H^2 \to 0$, $t \to \infty$. Оценим второй момент $D(t) = E\|\tilde{u}_t - E\tilde{u}_t\|_H^2$, $t \geqslant 0$. Его конечность и локальная ограниченность следуют из доказательства существования и единственности. Из равенства (5) при $t > 0$ и некотором $C_1 > 0$ получаем

$$D(t) = E\int_0^t d\tau\int_0^1 dx\left[\int_0^1 \sigma(\tilde{u}_\tau(\xi), \tau, \xi)\,G_0(t-\tau, x, \xi)\,d\xi\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_1[1 + \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} E\|\tilde{u}_\tau\|_H^2]\int_0^t d\tau\int_0^1 dx\int_0^1 G_0^2(t-\tau, x, \xi)\,d\xi.$$

С учетом леммы 1 после очевидных оценок имеем

$$D(t) \leqslant C_2[1 + \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} E\|\tilde{u}_\tau\|_H^2]\int_0^t \tilde{C}(\tau)(t-\tau)^{-1/2}e^{-\tilde{\delta}(t-\tau)}d\tau, \tag{15}$$

где C_2, $\tilde{\delta}$ — некоторые положительные постоянные, $\tilde{\delta} < 2\pi^2$, $\tilde{C}$ — функция из условия 3). Интеграл

$$\int_0^t \tilde{C}(\tau)(t-\tau)^{-1/2}e^{-\tilde{\delta}(t-\tau)}d\tau = \int_0^t \tilde{C}(t-u)\,u^{-1/2}e^{-\tilde{\delta}u}du \to 0, \quad t \to \infty,$$

по условию 3) и теореме Лебега об интегрируемой мажоранте. Тогда из (15) несложно получить, что $\sup\limits_{\tau \geqslant 0} E\|\tilde{u}_\tau\|_H^2 < \infty$ и $D(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия* 1), 3), 4) *теоремы* 1 *и, кроме того,* а) ψ_i — *абсолютно непрерывная функция,* $\psi_i(t) \to 0$, $e^{-\pi^2 t} \times \int_0^t e^{\pi^2\tau}|\psi_i'(\tau)|d\tau \to 0$, $t \to \infty$, $i = 1, 2$; б) $\int_0^\infty \tilde{C}(s)\,ds < \infty$.

Тогда для обобщенного решения $\{\tilde{u}_t\}$ *с вероятностью* 1 $\|\tilde{u}_t\|_H^2 \to 0$, $t \to \infty$.

Доказательство. Обозначим $\eta(t)=\|\tilde{u}_t - E\tilde{u}_t\|_H^2$, $t\geqslant 0$. Из представления $\eta(t)$ в виде ряда $\eta(t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t}\left[\int_0^t e^{\lambda_n\tau}dw(\tau)\int_0^1 \varphi_n(\xi)\,\sigma(\tilde{u}(\tau,\xi),\tau,\xi)\,d\xi\right]^2$ легко получить, что процесс $\xi(t)=\eta(t)-\int_0^t\|\sigma(\tilde{u}(\tau,\cdot),\tau,\cdot)\|_H^2 d\tau$, $t\geqslant 0$, является субмартингалом. Далее, $\int_0^t\|\sigma(\tilde{u}(\tau,\cdot),\tau,\cdot)\|_H^2 d\tau\to\int_0^\infty\|\sigma(\tilde{u}(\tau,\cdot),\tau,\cdot)\|_H^2 d\tau$, $t\to\infty$, с вероятностью 1. Предел есть случайная величина, принимающая конечные значения с вероятностью 1, что следует из условия 3) теоремы 1, условия б) и равномерной по τ ограниченности моментов $E\|u_\tau\|_H^2$. Кроме того, $\sup_{t\geqslant 0} E|\xi(t)|<\infty$. Применение теоремы о сходимости субмартингалов, с учетом сходимости $\{\eta(t)\}$ к нулю по вероятности при $t\to\infty$, завершает доказательство.

Установим асимптотику V- и H-решений краевой задачи с однородными граничными условиями.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\|\sigma(v_1,t)-\sigma(v_2,t)\|_H^2\leqslant L(t)\|v_1-v_2\|_H^2+2\|v_1-v_2\|_H^2$, $v_1\in V$, $v_2\in V$, $t\geqslant 0$, *где* $L\in L_\infty^{\mathrm{loc}}(R_+)$;

2) $\|\sigma(v,t)\|_H^2\leqslant f(t)+k(t)\|v\|_H^2$, $v\in V$, *где* $f\in L_1(R_+)$, $k\in L_1(R_+)\cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(R_+)$;

3) $\varphi\in H$.

Тогда H-решение $\{u(t)\}$ задачи (1), (2), (6) *существует и единственно, причем* $\sup_{t\geqslant 0}E\|u(t)\|_H^2<\infty$ *и с вероятностью* 1 $\|u(t)\|_H^2\to 0$, $t\to\infty$.

Доказательство. Существование и единственность доказаны в [3]. В дальнейшем будем ссылаться на работу [4], содержащую несколько более общие результаты. В [4] доказано существование V-решения $\{v(t)\}$, а также формула Ито для квадрата нормы

$$\|u(t)\|_H^2=\|\varphi\|_H^2-2\int_0^t\|v(s)\|_V^2 ds+2\int_0^t (u(s),\sigma(v(s),s))_H dw(s)+$$
$$+\langle\int_0^\tau \sigma(v(s),s)\,dw(s)\rangle_t. \tag{16}$$

Здесь $\langle\mu\rangle_t$ — компенсатор мартингала μ. Отсюда с помощью неравенства Гронуолла — Беллмана легко выводится, что

$$E\int_0^\infty\|v(t)\|_V^2 dt<\infty, \tag{17}$$

а моменты $E\|u(t)\|_H^2$ равномерно ограничены по t.

Рассмотрим правую часть равенства (16). При $t\to\infty$ имеем на множестве полной вероятности $\int_0^t\|v(s)\|_V^2 ds\to\int_0^\infty\|v(s)\|_V^2 ds<\infty$ ввиду неравенства (17); кроме того, почти наверное $\langle\int_0^\tau\sigma(v(s),s)\,dw(s)\rangle_t\to\int_0^\infty\|\sigma(v,s)\|^2 ds<\infty$, поскольку по условиям теоремы

$$E\int_0^\infty\|\sigma(v,s)\|_H^2 ds\leqslant\int_0^\infty f ds+\sup_{t\geqslant 0}E\|u(t)\|_H^2\int_0^\infty k(s)\,ds<\infty.$$

Далее, стохастический интеграл в правой части (16) есть мартингал, причем

$$\sup_{t\geqslant 0} E\left[\int_0^t (u, \sigma(v, s))_H dw(s)\right]^2 \leqslant E\int_0^\infty \|u(t)\|_H^2 dt +$$

$$+ E\int_0^\infty \|\sigma(v, s)\|_H^2 ds < \infty$$

по доказанному выше и неравенству (17). По теореме о сходимости мартингалов имеем, что $\|u(t)\|_H^2$ сходится с вероятностью 1 к некоторой случайной величине ξ_∞. Наконец, из (17) следует, что с вероятностью 1 конечен интеграл $\int\limits_0^\infty \|u(t)\|_H^2 dt$, откуда почти наверное $\xi_\infty = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\|\sigma(h_1, t) - \sigma(h_2, t)\|_H^2 \leqslant L(t)\|h_1 - h_2\|_H^2$, $h_1 \in H$, $h_2 \in H$, $t \geqslant 0$, *где* $L \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(R_+)$;

2) $\|\sigma(h, t)\|_H^2 \leqslant C_1(t)(1 + \|h\|_H^2)$, $h \in H$, $t \geqslant 0$, *где* $C_1 \in L_1(R_+) \cap \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(R_+)$;

3) $\varphi \in H_+$;

4) *функция трех вещественных переменных* $\sigma(u, t, x)$ *при каждом* $t \geqslant 0$ *непрерывна по совокупности первой и третьей переменных;* $\sigma(u, t, 0) = \sigma(u, t, 1) \equiv 0$, *при каждом* $t \geqslant 0$ *производные* $\sigma_1'(\cdot, t)$ *и* $\sigma_3'(\cdot, t)$ *задают непрерывные функции соответственно из* H *в* $L_\infty[0, 1]$ *и из* H *в* H;

5) *функция* $C_2(t) = \sup\{|\sigma_1(v, t, x)|^2 \mid v \in \overset{0}{W}{}_2^1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\} + \sup\{\|\sigma_3(v, t)\|_H^2 \mid v \in \overset{0}{W}{}_2^1\}$, $t \geqslant 0$, *интегрируема на* R_+.

Тогда решение $\{v(t)\}$ *в смысле определения* 2 *задачи* (1), (2), (6) *существует, единственно, является обобщенным решением и* V*-решением, причем* $\sup\limits_{t\geqslant 0} E\|v(t)\|_V^2 < \infty$ *и с вероятностью* 1 $\|v(t)\|_V^2 \to 0$, $t \to \infty$.

Замечание 2. Условие 4) теоремы 4 позволяет при фиксированном t рассматривать σ как отображение из $\overset{0}{W}{}_2^1$ в $\overset{0}{W}{}_2^1$.

Доказательство теоремы 4. Существование и единственность обобщенного решения задачи (1), (2), (6) следует из теоремы 1. Обозначим это решение через $\{v(t)\}$. Оно удовлетворяет уравнению

$$v(t) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}(\sigma(v(\tau), \tau), \varphi_n)_H dw(\tau) + \sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n t}(\varphi_n, \varphi)_H \varphi_n,$$

где ряды сходятся по норме в H с вероятностью 1. Из принадлежности φ пространству H_+ непосредственно выводится, что $\{v(t)\}$ при каждом t принадлежит H_+ и удовлеторяет уравнению (9), т. е. подходит под определение 2. Из теоремы о единственности V-решения и замечания к ней (см. [4]) следует, что решение $\{v(t)\}$ является также V-решением. Единственность решения (в смысле определения 2) можно доказать, разложив его в ряд Фурье по $\{\varphi_k\}$ и выписав уравнение для его коэффициентов Фурье.

Чтобы доказать необходимые соотношения для $\{v(t)\}$, рассмотрим при $t \geqslant 0$

$$\|v(t)\|_V^2 = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n\left[\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}[(\sigma(v(\tau), \tau), \varphi_n)_H dw(\tau)\right]^2 +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty \lambda_n e^{-2\lambda_n t}(\varphi_n, \varphi)_H^2. \tag{18}$$

Легко показать, что процесс

$$\xi(t) = \| v(t) \|_V^2 - \int_0^t \| \sigma(v(\tau), \tau) \|_V^2 d\tau - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-2\lambda_n t} (\varphi_n, \varphi)_{H'}^2, \quad t \geqslant 0, \quad (19)$$

является субмартингалом. Конечность величины $E \int_0^{\infty} \| \sigma(v(\tau), \tau) \|_V^2 d\tau$ следует из условия 5) теоремы 4 и неравенства (17). В силу (18)

$$E \| v(t) \|_V^2 \leqslant \int_0^t E \| \sigma(v(\tau), \tau) \|_V^2 d\tau \leqslant \int_0^{\infty} E \| \sigma(v(\tau), \tau) \|_V^2 d\tau < \infty.$$

Применяя теорему о сходимости субмартингалов, получаем с вероятностью 1 $\| v(t) \|_V^2 \to \eta_\infty$ при $t \to \infty$. Из сходимости с вероятностью 1 интеграла $\int_0^{\infty} \| v(t) \|_V^2 dt$ следует, что $P\{\eta_\infty = 0\} = 1$.

З а м е ч а н и е 3. Условия совпадения обобщенных решений и решений для более общих уравнений, чем уравнение (1), изучались в работе [2]. Однако приведенные там условия слишком ограничительны по сравнению с условиями теоремы 4.

Как простые следствия теоремы 3 и неравенства (17) получаем утверждения об асимптотическом поведении V- и H-решений неоднородной краевой задачи. При этом аналог теоремы 4 получить не удается, поскольку отсутствует нужная гладкость решения u_1 невозмущенного уравнения теплопроводности.

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены условие* 3) *теоремы* 3, *условия* 1), 2) *теоремы* 4, *а также следующие условия*: а) ψ_i *абсолютно непрерывна и* $\psi_i \in L_2(R_+) \cap L_\infty(R_+)$, $i = 1, 2$; б) *для* $i = 1, 2$

$$e^{-\pi^2 t} \int_0^t e^{\pi^2 \tau} | \psi_i(\tau) | d\tau \to 0, \quad t \to \infty, \quad e^{-\pi^2 t} \int_0^t e^{\pi^2 \tau} | \psi_i'(\tau) | d\tau \in L_2(R_+).$$

Тогда H-решение $\{u(t)\}$ задачи (1) — (3) *существует и единственно, причем* $\sup_{t \geqslant 0} E \| u(t) \|^2 < \infty$ *и с вероятностью* 1 $\| u(t) \|_H^2 \to 0$, $t \to \infty$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть выполнены все условия следствия* 1, *а вместо условия* б) *выполнено условие*: б′) $\psi_i(t) \to 0$, $t \to \infty$, $i = 1, 2$; $e^{-\pi^2 t} \int_0^t e^{\pi^2 \tau} | \psi_i'(\tau) | d\tau$, $i = 1, 2$, *как функции от t принадлежат* $L_2(R_+)$ *и стремятся к нулю при* $t \to \infty$. *Тогда для компонентов V-решения* $\{u(t)\}$ *задачи* (1) — (3) *выполнены соотношения*: 1) $\max_{\delta \leqslant x \leqslant 1-\delta} | u_1(t, x) | \to 0$, $t \to \infty$ 2) $E \int_0^{\infty} \| v(t) \|_V^2 dt < \infty$.

З а м е ч а н и е 4. Условия, накладываемые в следствии 2 на граничные условия, выполняются, например, если функции ψ_i, $i = 1, 2$, абсолютно непрерывны и при некотором $\alpha > 0$

$$\psi_i = O(1/t^{1/2+\alpha}), \quad \psi_i' = O(1/t^{1/2+\alpha}), \quad t \to \infty, \quad i = 1, 2.$$

Если функция интенсивности σ линейно зависит от первого аргумента, а граничные условия однородны, то применима вся развитая выше теория, однако результаты работы [2] позволяют исследовать асимптотику решений в более сильной норме, чем в теореме 4.

Пусть функция σ представима в виде $\sigma(u, t, x) = uc(t, x) + d(t, x)$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, причем $d(t, \cdot) \in H_+$ при каждом $t \geqslant 0$; функция C дважды дифференцируема по x, причем производная C_{22}'' ограничена по x. Эти условия позволяют при фиксированном t рассматривать σ как функцию из H_+ в H_+.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\varphi \in H_+$;

2) $\sup\limits_{t,x} [c^2(t, x) + 2(c_2'(t, x))^2] < 2\pi^2$, $\sup\limits_{t,x} |c_{22}''(t, x)| < \infty$;

3) $\int\limits_0^\infty \| d_{22}''(t, \cdot) \|_H^2 dt < \infty$.

Тогда решение $\{u_t\}$ *задачи* (1), (2), (6) *существует и единственно, причем* $\sup\limits_{t\geqslant 0} E \| \partial^2 u_t / \partial x^2 \|_H^2 < \infty$ *и с вероятностью* 1 $\| \partial^2 u_t / \partial x^2 \|_H^2 \to 0$, $t \to \infty$.

Подробного доказательства проводить не будем. Отметим лишь, что существование и единственность доказаны в [2], а приведенные в теореме соотношения для $\{u_t\}$ доказываются с помощью результатов работы [2] по той же схеме, что и в теореме 4.

1. *Гихман И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными.— В кн.: Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 25—59.
2. *Баклан В. В.* Об одном классе стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.— В кн.: Теория случайных процессов / Республиканский межвед. сб. Киев, 1978, вып. 6, с. 10—15.
3. *Pardoux E.* Equations aux dérivées partielles stochastiques non lineaires monotones. Etude de solutions fortes de type Ito.— Thése doct. Sci. math. Univ. Paris Sud., 1975.
4. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях.— Итоги науки и техники. Современные проблемы математики / ВИНИТИ, 1979, 14, с. 71—146.
5. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи.— Тр. Моск. мат. об-ва, 1970, 23, с. 179—234.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1966.— 724 с.

Киев. гос. ун-т

Поступила 29.11.83