УДК 512.715

Ю. В. Боднарчук (Ун-т „Києво-Могилянська Академія")

ПРО ЕНДОМОРФІЗМИ ТРАНСЛЯЦІЙНИХ МОДУЛІВ ПОЛІНОМІВ

We establish the construction of a ring of endomorphisms of translation module whose structure is determined by a group of translations of the affine space acting by means of displacement on the polynomial algebra.

Встановлено будову кільця ендоморфізмів трансляційного модуля, структуру якого визначає група трансляцій афінного простору, що діє зсувом на алгебрі многочленів.

1. Вступ. Поліноміальна алгебра $K[\boldsymbol{x}] = K[x_1, \ldots, x_r]$ розглядається як нескінченновимірний векторний простір над полем K. Трансляції поліномів

$$f(\boldsymbol{x}) \mapsto f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}), \tag{1}$$

де $\boldsymbol{a} \in A_r = (K^r)^+ \cong K^+ \oplus K^+ \oplus \ldots \oplus K^+$, визначають на $K[\boldsymbol{x}]$ структуру модуля над груповою алгеброю KA_r. Такі модулі ми називаємо трансляційними. Очевидно, що підпростір $K[\boldsymbol{x}]^{\boldsymbol{m}}$, що складається з поліномів $f: \deg_{x_i} f < m_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, є трансляційним підмодулем для будь-якого набору $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$. Зауважимо, що якщо $|K| = q$, $\boldsymbol{q} = (q, q, \ldots, q)$, то $K[\boldsymbol{x}]^{\boldsymbol{q}}$ можна ототожнити з векторним простором функцій $\mathrm{Fun}(K^{(r)}, K)$.

Метою цієї роботи є опис ендоморфізмів трансляційних модулів, які ми будемо називати K^+-ендоморфізмами, та встановлення структури кільця $\mathrm{End}_{KA_r} K[\boldsymbol{x}]$. Згадане кільце можна розглядати як нескінченний аналог V-кільця (кільця централізаторів) групи трансляцій афінного простору.

Будемо використовувати наступні позначення: $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ — набір невід'ємних цілих чисел, зокрема 1_j позначає вектор, j-та координата якого рівна $1 \in K$, а інші — нульові; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — векторна змінна, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}} = x_1^{m_1} \ldots x_r^{m_r}$ — моном, а $|\boldsymbol{m}| = m_1 + \ldots + m_r$ — його степінь. Для $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$ визначимо узагальнені біноміальні коефіцієнти $\binom{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}} = \prod_{l=1}^{r} \binom{m_l}{s_l}$ як добуток звичайних коефіцієнтів, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$. Тоді справедлива формула бінома Ньютона

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{m}} = \sum_{\boldsymbol{s}=0}^{\boldsymbol{m}} \binom{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}-\boldsymbol{s}}, \tag{2}$$

де підсумовування проводиться за наборами, для яких $0 \le s_i \le m_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Розглянемо множину Λ_r нескінченних послідовностей $(\lambda_{\boldsymbol{m}})$ елементів з K, індекси яких є невід'ємними цілочисельними векторами $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$.

Покоординатне додавання і згортка з біноміальним ядром

$$((\lambda_k) * (\mu_k))_m = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \lambda_l \mu_{m-l} \tag{3}$$

визначають на Λ_r структуру локального комутативного кільця, де послідовності, у яких $\lambda_0 = 0$, утворюють єдиний максимальний ідеал; позначимо його $\Lambda_r^{(0)}$. Для будь-якого s маємо ідеал

$$\Lambda_r^{(s)} = \{(\lambda_m) \mid \lambda_l = 0 \ \ \forall l = (l_1, l_2, \dots, l_r) : l_i < s_i\}.$$

Замість нескінченних послідовностей можна розглядати скінченні набори $(\lambda_m) : m_i < s_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, для вибраного s з тим же додаванням і множенням. Ці набори можна ототожнити з елементами фактор-кільця $\lambda_r(s) = \Lambda_r / \Lambda_r^{(s)}$. Легко бачити, що Λ_r є проективною границею цих фактор-кілець. Для поля нульової характеристики Λ_r є нетеровим регулярним кільцем і, згідно з структурною теоремою Коена [1], ізоморфне кільцю формальних степеневих рядів. Ізоморфізм легко встановити і безпосередньо. Для поля ненульової характеристики p ситуація складніша, адже в цьому випадку кільце не є нетеровим. Дійсно, припустимо, що $h_1, h_2, \dots, h_t$ породжують ідеал $\Lambda_r^{(0)}$. Це означає, що для будь-якого елемента $\nu = (\nu_m) \in \Lambda_r^{(0)}$ існують елементи $g_1, g_2, \dots, g_t \in \Lambda_r : \sum_{i=1}^{t} g_i * h_i = \nu$. Зауважимо, що для $p^k = (p^k, p^k, \dots, p^k)$-ї координати послідовності $g_i * h_i$ згортка (3) перетвориться в звичайний добуток $\lambda_0^i \mu_{p^k}^i$, де $g_i = (\lambda_m^i)$, $h_i = (\mu_m^i)$, а k — довільне. Таким чином, маємо нескінченну систему лінійних рівнянь

$$\sum_i \lambda_0^i \mu_{p^k}^i = \nu_{p^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

яка повинна мати розв'язок для будь-якої правої частини, що неможливо. Отже, ідеал $\Lambda_r^{(0)}$ не є скінченнопородженим.

Будова групи одиниць кільця Λ_r описується наступною лемою.

Лема 1. *Має місце розклад групи в напівпрямий добуток*

$$\Lambda_r^* \cong \overline{K^{+\infty}} \leftthreetimes K^*,$$

де $\overline{K^{+\infty}}$ *— адитивна група нескінченних послідовностей елементів поля* K.

Доведення. Використаємо мультиплікативний розклад Жордана Λ_r^* в добуток напівпростої та уніпотентної підгруп. Легко бачити, що перший співмножник ізоморфний K^*. На множині уніпотентних елементів можна побудувати експоненту, яка визначає ізоморфізм на адитивну групу кільця $\Lambda_r^{(0)+} \cong \overline{K^{+\infty}}$.

2. Будова K^+-ендоморфізмів.

Теорема 1.

$$\mathrm{End}_{KA_r} K[x]^m \cong \Lambda_r(m)$$

для всіх m, *для яких* $m_i < |K|$.

Якщо K *— нескінченне поле, то існує ізоморфізм*

$$\mathrm{End}_{KA_r} K[x] \cong \Lambda_r.$$

Доведення. Кожний K-ендоморфізм $K[x]^+$ визначається дією на мономах. Нехай $\lambda \in \operatorname{End}_{KA_r} K[x]$ — деякий ендоморфізм і

$$(x^m)^\lambda = \varphi_m(x) \tag{4}$$

— нескінченна послідовність поліномів, які визначають ендоморфізм λ однозначно. Якщо ми подіємо на формулу (2) ендоморфізмом λ і врахуємо, що він комутує з трансляціями, то отримаємо тотожність

$$\varphi_m(x + a) = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} a^s \varphi_{m-s}(x) \tag{5}$$

для будь-якого $a \in K^{(r)}$. Зрозуміло, що (5) є необхідною і достатньою умовою того, що K-ендоморфізм λ, визначений формулою (4), є K^+-ендоморфізмом. Щоб отримати явну формулу для поліномів φ_m, треба покласти в (5) $x = 0$. Розглянемо нескінченну послідовність з $\Lambda_r : \lambda_m = \varphi_m(0)$. Якщо $m_i < |K|$, то ця послідовність визначає послідовність поліномів λ_m у вигляді

$$\varphi_m(x) = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} x^s \lambda_{m-s}. \tag{6}$$

Навпаки, проста перевірка показує, що для будь-якої послідовності (λ_m) поліноми, визначені формулою (6), задовольняють тотожність (5), тобто визначають K^+-ендоморфізм. Таким чином, маємо взаємно однозначну відповідність $\lambda \leftrightarrow (\lambda_m)$ між множиною K^+-ендоморфізмів і множиною нескінченних послідовностей Λ_r. Нехай $\lambda \leftrightarrow (\lambda_k)$, $\mu \leftrightarrow (\mu_k)$. Очевидно, що $\lambda + \mu \leftrightarrow (\lambda_k) + (\mu_k)$. Розглянемо композицію ендоморфізмів $\lambda \circ \mu$:

$$(x^m)^{\lambda \circ \mu} = \left(\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} x^{m-l} \lambda_l \right)^{\mu} = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \lambda_l \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m-l}{s} x^{m-l-s} \mu_s =$$

$$= \sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} x^{m-t} \left(\sum_{l=0}^{t} \binom{t}{l} \lambda_t \mu_{t-1} \right).$$

Отже,

$$(\lambda \circ \mu) \leftrightarrow (\lambda_k) * (\mu_k).$$

Теорему доведено.

Лема 2. *Для будь-якого* $n : n_i \le |K|$, *існує епіморфізм* $KA_r \mapsto \Lambda_r(n)$, *зокрема для скінченного поля маємо ізоморфізм*

$$KA_r \cong \Lambda_r(q).$$

Доведення. Необхідно показати, що будь-який K^+-ендоморфізм $K[x]^n$ можна реалізувати дією деякого елемента $h = \sum_{a \in A_r} \alpha_a a \in KA_r$. Скориставшись формулою (2), отримаємо

$$(x^m)^h = \sum_{a \in A_r} \alpha_a (x + a)^m = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} x^{m-s} \sum_{a \in A_r} \alpha_a a^s.$$

Згідно з (6), треба довести, що система лінійних рівнянь

$$\sum_{a \in A_r} \alpha_a a^s = \lambda_s$$

має розв'язок $(\alpha_a \in K \,|\, a \in A_r)$ для будь-якої правої частини λ_s, $0 \le s_i < n_i$. Матриця цієї системи є ітерованим кронекеровим добутком матриць Вандермонда. Якщо $n_i \leq q$ для всіх i, то можна вибрати n_i різних елементів $a_i \in K$. Для $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}$ маємо $\dim_K KA_r = q^r = \dim_K \Lambda_r(q)$.

Наслідок. *Має місце ізоморфізм*

$$\mathrm{End}_{KA_r} K[x]^q \cong KA_r.$$

Нехай $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — набір змінних. Розглянемо адитивну групу поліномів $K[y, x]^+$.

K^+-ендоморфізм простору $K[y, x]$ називається $K[y]^+$-ендоморфізмом, якщо він комутує з усіма ендоморфізмами вигляду $y_i \mapsto y_i,\ x_j \mapsto x_j + a_j(y)$, де $a_j(y)$ — довільні поліноми, $i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, r$.

Лема 3. *Для поля нульової характеристики кожний K^+-ендоморфізм $K[x]$ має єдине продовження до $K[y]^+$-ендоморфізму $K[y, x]$.*

Доведення. Нехай λ — довільний $K[y]^+$-ендоморфізм $K[y, x]$ і $(y^l x^m)^\lambda = \varphi_{l,m}(y, x)$. Якщо $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ — вектор-константа, а $T = (t_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{r}$ — прямокутна матриця невід'ємних цілих чисел, то запис $\boldsymbol{a}y^T$ означає вектор-моном вигляду

$$\left(a_1 y_1^{t_{11}} y_2^{t_{21}} \ldots y_p^{t_{n1}}, a_2 y_1^{t_{12}} y_2^{t_{22}} \ldots y_p^{t_{n2}}, \ldots, a_r y_1^{t_{1r}} y_2^{t_{2r}} \ldots y_p^{t_{nr}}\right).$$

Легко бачити, що після підстановки кожної його i - ї координати замість x_i в моном $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_r^{s_r}$, $i = 1, 2 \ldots, r$, отримаємо моном $a^s y^{Ts}$, де Ts — звичайний добуток матриці на вектор. Іншими словами, справедлива формула $(ay^T)^s = a^s y^{Ts}$. Оскільки λ є $K[y]^+$-ендоморфізмом, то

$$(x^m)^{\lambda a y^T} = ((x + ay^T)^m)^\lambda. \tag{7}$$

Ліву частину цієї рівності можна записати у вигляді $\varphi_{0,m}(x + ay^T)$. Оскільки тотожність (5) справедлива для всіх значень $\boldsymbol{a}$, одержуємо рівність

$$\varphi_{0,m}(x + ay^T) = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} a^s y^{Ts} \varphi_{0,m-s}(x), \tag{8}$$

яка справджується для всіх значень $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{y}$. Для нескінченного поля це означає, що ми маємо поліноміальну рівність. Праву частину формули (7) можна перетворити:

$$\left(\sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} a^s y^{Ts} x^{m-s}\right)^\lambda = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} a^s \varphi_{Ts,m-s}(y, x). \tag{9}$$

Порівнюючи коефіцієнти при мономах a^s в правих частинах (8) і (9), отримуємо

$$\varphi_{Ts, m-s} = y^{Ts} \varphi_{0, m-s}.$$

Оскільки вектори $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{m}$ і матриця T довільні, справедлива формула

$$\varphi_{l,m} = y^l \varphi_{0,m}$$

для всіх значень $\boldsymbol{l}$ та $\boldsymbol{m}$. Це означає, що λ є ендоморфізмом $K[y, x]$ як вільного $K[y]$-модуля і визначається дією на $K[x]$.

З іншого боку, формула (5) справедлива для всіх значень полінома $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(y)$. Для нескінченного поля це означає, що (5) справджується для будь-якого полінома $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(y)$ і K^+-ендоморфізм $K[x]^+$, продовжений до $K[y]$-ендоморфізму модуля $K[y, x]$, буде $K[y]^+$-ендоморфізмом. Лему доведено.

Для скінченного поля $|K| = q$ можна замінити простір поліномів $K[y, x]$

на простір функцій $K[\mathbf{y}, \mathbf{x}]^{\mathbf{q}}$ і аналогічно визначити $K[\mathbf{y}, \mathbf{x}]^{\mathbf{q}+}$-ендоморфізми. При ототожненні простору функцій з $K[\mathbf{y}, \mathbf{x}]^{\mathbf{q}}$, після $K[\mathbf{y}]^+$-дії треба здійснити операцію редукування $y_j^q \equiv y_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. В цьому випадку аналог леми 3 не має місця.

Приклад. Для простого поля $K, |K| = p, n = r = 1$, розглянемо ендоморфізм θ вигляду

$$y^m x^l \mapsto (y^m - (y+1)^m) \sum_{a \in K} a^l.$$

Оскільки $\sum_{a \in K} a^l = 0$ для всіх $l < p-1$ і $\sum_{a \in K} a^{p-1} = -1$, то

$$(f(y,x))^\theta = 0 \quad \forall f \colon \deg_x f(y,x) < p-1, \quad (x^m y^{p-1})^\theta = (y+1)^m - y^m.$$

Якщо β є трансляцією вздовж y на b_1 і вздовж x на $b_2(y)$, то

$$(y^m x^{p-1})^{\beta\theta} = ((y+b_1)^m (x + b_2(y))^{p-1})^\theta = ((y+b_1)^m x^{p-1})^\theta =$$
$$= (y + b_1 + 1)^m - (y+b_1)^m = (y^m x^{p-1})^{\theta\beta}.$$

Таким чином, θ є $K[y]^{p+}$-ендоморфізмом. З іншого боку, $\theta \neq 0$ і діє на функціях $f(x)$ як нульовий ендоморфізм.

Зауважимо, що одна з важливих серій автоморфізмів вінцевих добутків абелевих груп будується як продовження K^+-автоморфізмів. Таке продовження завжди можна побудувати стандартним способом. Якщо ж твердження леми 3 не є правильним, як, наприклад, у випадку скінченних абелевих p-груп, то існують і інші способи розширень, описані в [2]. В роботі [3] показано, що всі регулярні автоморфізми групи Жонк'єра над полем характеристики 0, яка є нормалізатором ітерованого вінцевого добутку груп K^+ в групі поліноміальних перетворень афінного простору (афінній групі Кремони), є внутрішніми. У випадку скінченних полів існують такі нестандартні продовження K^+-автоморфізмів, що їх можна поширити до зовнішніх автоморфізмів нормалізатора вінцевого добутку (групи Жонк'єра).

У випадку скінченного поля $(|K| = q)$ побудуємо спеціальний базис простору поліномів $K[\mathbf{x}]$. Легко бачити, що нескінченна серія поліномів $Y_{\mathbf{k}} = (\mathbf{x}^{\mathbf{q}} - \mathbf{x})^{\mathbf{k}}$, $\mathbf{q} = (q, q, \ldots, q)$, породжує нескінченновимірний простір поліномів, інваріантних при дії трансляцій (1). Беспосередньо перевіряється, що елементи $\mathbf{x}^{\mathbf{l}} Y_k$, $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_r)$, $0 \le l_i < q$, утворюють базис простору $K[\mathbf{x}]$.

Теорема 2. *Для скінченного поля маємо ізоморфізм*

$$\mathrm{End}_{KA_r} K[\mathbf{x}] \cong M_\infty(KA_r).$$

Доведення. Маємо розклад в суму трансляційно-інваріантних підпросторів:

$$K[\mathbf{x}] = \bigoplus_{\mathbf{k}=0}^{\infty} W^{\mathbf{k}},$$

$W^{\mathbf{k}} = (\mathbf{x}^{\mathbf{l}} Y_{\mathbf{k}} \mid 0 \le l_i < q) \cong K[\mathbf{x}]^{\mathbf{q}}$. Отже, кожен K^+-ендоморфізм визначається матрицею над кільцем $\mathrm{End}_{KA_r} K[\mathbf{x}]^{\mathbf{q}}$, яке ізоморфне (лема 2) KA_r.

1. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра: В 2-х т. —М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – Т. 2. – 363 с.
2. *Боднарчук Ю.В.* Автоморфизмы кратных сплетений абелевых p-групп // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7–8. – С. 889 – 894.
3. *Bodnarchuk Yu. V.* On automorphisms of block-triangular polynomial translation groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 1999. – **137**. – P. 103 – 123.

Одержано 27. 11. 97,
після доопрацювання — 20. 05. 98