УДК 511

Н. В. Тараненко (Одес. ун-т)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИИ В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

We consider a family of completely additive functions $\beta_q(n)$ defined on N. We find an asymptotic expression for a summatory function $\beta_q(n)$ and study its distribution in short intervals.

Розглядається сім'я цілком адитивних функцій $\beta_q(n)$, визначених на множині натуральних чисел. Знайдено асимптотичну формулу для суматорної функції $\beta_q(n)$ та вивчено розподіл її значень в коротких інтервалах.

Введение. Функция натурального аргумента $g(n)$ называется аддитивной, если имеет место равенство $g(n_1 n_2) = g(n_1) + g(n_2)$ для всех натуральных n_1, n_2 таких, что $(n_1, n_2) = 1$. Если $g(n_1 n_2) = g(n_1) + g(n_2)$ для любых натуральных n_1, n_2, функция $g(n)$ называется вполне аддитивной.

Для каждого простого q определим семейство вполне аддитивных функций $\beta = \beta_q$ следующим образом:

$$\beta(p) = \begin{cases} k, & \text{если } q^k \| (p+1); \\ 0, & \text{если } (q, p+1) = 1, \end{cases}$$

$$\beta(n) = \sum\nolimits_{p^\alpha \| n} \alpha \beta(p).$$

Функция $\beta(n)$ изучалась в работе [1]. Значения функции $\beta(n)$ распределены весьма хаотично (такова природа многих аддитивных функций). Обычно исследуют поведение аддитивной функции $g(n)$ в среднем, т. е. строят асимптотические формулы для сумматорной функции $\sum_{n \le x} g(n)$. В рассматриваемом случае мы также находим асимптотическую формулу для суммы $\sum_{n \le x} \beta(n)$ (лемма 3). Однако большую информацию о локальном поведении $\beta(n)$ дает асимптотическая формула для сумматорной функции на „коротком" интервале.

Обозначим

$$B(m, h) = \sum_{m \le n < m+h} \beta(n).$$

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть*

$$c_\beta = c_\beta(x, q) = \tilde{c}_1 \log\log x + \tilde{c},$$

где $\tilde{c}_1 = q/(q-1)^2$, $\tilde{c} = \tilde{c}(q)$ *— постоянные.*

Тогда для всех $m \le x$, *за исключением не более* $o(x)$ *из них, и каждого* h, $x^\alpha < h < x$, *при фиксированном* α, $0 < \alpha < 1$, *справедлива асимптотическая оценка*

$$\sum_{m \le x} (B(m, h) - c_\beta h)^2 = O(h^2 x \log\log x).$$

Следствие. *Для всех* $m \le x$, *за исключением не более* $o(x)$ *из них, и каждого* h, $x^\alpha < h < x$, *при фиксированном* α, $0 < \alpha < 1$, *справедлива асимптотическая оценка*

$$B(m, h) = c_\beta h + O(h\sqrt{\log\log x}) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Заметим, что в работе [2] разработан общий метод построения асимптотических формул для сумматорных функций в „коротких" интервалах, использующий метод производящих рядов Дирихле. Этим методом в работе [3] изучено распределение значений аддитивной функции $\omega(n)$ (число различных простых делителей n). В настоящей статье применяется другой метод.

Асимптотическая формула для $\sum_{n\le x}\beta_q(n)$. Пусть P — конечное множество простых чисел и $\Delta = \left\{D = \prod_{p\in P} p^{\alpha},\ \alpha \ge 0\right\}$ — множество целых чисел. Пусть $(l, D) = 1$. Тогда для $D \in \Delta$

$$\pi(x, D, l) = \frac{x}{\phi(D)\log x} + R(x, D, l),$$

где $R(x, D, l) = o\big(x/(\phi(D)\log x)\big)$, $\phi(x)$ — функция Эйлера.

В работе [4] показано, что для $D \in \Delta$, $D < x^{1/3}$ равномерно по D, l, x выполняется оценка

$$\pi(x, D, l) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\phi(D)}\left\{1 + O\left(e^{-c\sqrt{\log x}}\right)\right\},$$

где $\mathrm{li}(x)$ — интегральный логарифм, $c > 0$ — постоянная.

Результаты, сформулированные в леммах 1 и 2, несколько точнее результатов, полученных Вайсмюллер.

Лемма 1. *Для фиксированных q и k оценка*

$$\sum_{\substack{p\le x \\ p\equiv -1 (\mathrm{mod}\ q^k)}} \frac{1}{p} = \frac{\log\log x}{\phi(q^k)} + c_1(q^k) + O\left(\frac{1}{\log x\,\phi(q^k)}\right)$$

выполняется равномерно для $q^k < x^{1/3}$. Здесь $c_1(q^k)$ — вычислимая постоянная.

Лемма 2. *Для фиксированного q имеем*

$$\sum_{p\le x} \frac{\beta^j(p)}{p} = \tilde{c}_j \log\log x + c_j + O\left(\frac{1}{\log x}\right), \tag{1}$$

где $c_j = c_j(q)$, $\tilde{c}_j = \tilde{c}_j(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k^j/q^k$ — вычислимые постоянные.

Для каждого многочлена $f(n)$ определим мультипликативную функцию $\rho = \rho_f$ следующим образом:

$$\rho_f(d) = \sum_{\substack{f(n)\equiv 0 (\mathrm{mod}\, d) \\ 1\le n\le d}} 1 .$$

Следствие. *Пусть $f(n) = n(n+l)$, где $l \le x$. Тогда*

$$\sum_{p\le x} \frac{\rho_f(p)\beta^j(p)}{p} = 2\tilde{c}_j \log\log x + 2c_j + g_j(l) + O\left(\frac{1}{\log x}\right), \tag{2}$$

где

$$g_j(l) = -\sum_{p\mid l} \frac{\beta^j(p)}{p}. \tag{3}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\rho_f(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } l \equiv 0 \pmod p; \\ 2, & \text{если } (l, p) = 1. \end{cases}$$

Из леммы 2 находим

$$\sum_{p \le x} \frac{\rho_f(p)\beta^j(p)}{p} = 2\sum_{p \le x} \frac{\beta^j(p)}{p} - \sum_{p | l} \frac{\beta^j(p)}{p} =$$

$$= 2\tilde{c}_j \log\log x + 2c_j + g_j(l) + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Лемма 3. *При* $x \to \infty$

$$\sum_{n \le x} \beta(n) = \tilde{c}_1 x \log\log x + \tilde{c} x + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Доказательство. В силу аддитивности $\beta(n)$ имеем

$$\sum_{n \le x} \beta(n) = \sum_{n \le x} \sum_{p^\alpha \| n} \beta(p^\alpha) = \sum_{p^\alpha \le x} \beta(p^\alpha)\left(\frac{x}{p^\alpha} - \frac{x}{p^{\alpha+1}} + O(1)\right) =$$

$$= x\sum_{p \le x} \frac{\beta(p)}{p} + x \sum_{\substack{p^\alpha \le x \\ \alpha \ge 2}} \frac{\beta(p^\alpha) - \beta(p^{\alpha-1})}{p^\alpha} + O\left(\sum_{p^\alpha \le x} \beta(p^\alpha)\right). \qquad (4)$$

Пользуясь леммой 2 и леммой Абеля о частном суммировании, находим

$$\sum_{p \le x} \beta(p) = \tilde{c}_1 x \log\log x + c_1 x + O\left(\frac{x}{\log x}\right) -$$

$$- \int_2^x \left(\tilde{c}_1 \log\log t + c_1 + O(\log^{-1} t)\right) dt = O\left(\frac{x}{\log x}\right), \qquad (5)$$

$$\sum_{\substack{p^\alpha \le x \\ \alpha \ge 2}} \beta(p^\alpha) = \sum_{2 \le \alpha \le \log_p x} \alpha \sum_{p^\alpha \le x} \beta(p) = O\left(\sum_{p \le \sqrt{x}} \log p (\log_p^2 x)\right) = O(\sqrt{x} \log^2 x). \quad (6)$$

Теперь оценим второе слагаемое справа в выражении (4). Имеем

$$\sum_{p \le \sqrt{x}} \beta(p) \sum_{2 \le \alpha \le \log_p x} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{p \le \sqrt{x}} \beta(p)\left(\frac{1}{p(p-1)} + O(1/x)\right) = \sum_p \frac{\beta(p)}{p(p-1)} + O\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right). \quad (7)$$

Объединяя (1), (4) – (7) и полагая

$$\tilde{c} = c_1 + \sum_p \frac{\beta(p)}{p(p-1)},$$

получаем утверждение леммы.

Замечание. Аналогично проведенному доказательству, используя лемму 2, получаем

$$\sum_{p \le x} \beta^n(p) = O\left(\frac{x}{\log x}\right) \qquad (8)$$

с постоянной в символе O, зависящей от n.

Объединяя (12) – (16), получаем утверждение леммы.

Следствие. *Для целого* $l \le x$ *справедлива оценка*

$$\sum_{n\le x} \beta^2(n+l) = \tilde{c}_1^2 x (\log\log x)^2 + O(x \log\log x).$$

Доказательство. Из леммы 4 находим

$$\sum_{n\le x} \beta^2(n+l) = \sum_{l<k\le x+l} \beta^2(k) =$$

$$= \tilde{c}_1^2 x (\log\log x)^2 + \tilde{c}_1^2 l\Big((\log\log x)^2 - (\log\log l)^2\Big) + O(x\log\log x).$$

При $l \le x/\log\log x$ имеем

$$l(\log\log x)^2 = O(x\log\log x),$$

при $x/\log\log x < l \le x$

$$(\log\log l)^2 = (\log\log x)^2 + o(\log\log\log x).$$

Поэтому для $1 \le l \le x$ справедлива оценка

$$l\Big((\log\log x)^2 - (\log\log l)^2\Big) = O(x\log\log x),$$

откуда получаем утверждение следствия.

Лемма 5. *При* $x \to \infty$

$$\sum_{n\le x} \beta(n)\beta(n+l) = \tilde{c}_1^2 x(\log\log x)^2 + O\big(g_1(l)\, x\log\log x\big) + O(x\log\log x). \qquad (17)$$

Доказательство. Воспользуемся следующим тождеством:

$$2\sum_{n\le x} \beta(n)\beta(n+l) = \sum_{n\le x} \beta^2(n(n+l)) - \sum_{n\le x}\beta^2(n) - \sum_{n\le x}\beta^2(n+l). \qquad (18)$$

Нам понадобится оценка первой суммы, содержащейся в правой части (18):

$$\sum_{n\le x} \beta^2(n(n+l)) = \sum_{n\le x}\Bigg(\sum_{p^\alpha \| n(n+l)} \beta(p^\alpha)\Bigg)^2 =$$

$$= \sum_{n\le x}\sum_{p^\alpha\| n(n+l)} \beta^2(p^\alpha) + \sum_{n\le x}\sum_{\substack{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \| n(n+l)\\ p_1\ne p_2}} \beta(p_1^{\alpha_1})\beta(p_2^{\alpha_2}) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \qquad (19)$$

Через Σ_1 и Σ_2 обозначены соответственно первая и вторая суммы в правой части выражения (19).

Для Σ_1 имеем

$$\Sigma_1 = \sum_{p^\alpha \le x(x+l)} \beta^2(p^\alpha)\Bigg(\sum_{\substack{n\le x\\ n(n+l)\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^\alpha)}} 1 - \sum_{\substack{n\le x\\ n(n+l)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, p^{\alpha+1})}} 1\Bigg) =$$

$$= \sum_{p\le x+l} \rho(p)\beta^2(p)\left(\frac{x}{p} + O(1)\right) + O\Bigg(x \sum_{\substack{p^\alpha\le x(x+l)\\ \alpha\ge 2}} \frac{\rho(p^\alpha)\beta^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\Bigg).$$

В первой сумме, содержащейся в правой части, мы рассматриваем только простые числа $p \le x + l$, так как $p \mid n(n+l)$ означает, что $p \mid n$ или $p \mid n+l$. Объединяя (2), (8) и оценку

$$\sum_p \sum_{\alpha \ge 2} \frac{\rho(p^\alpha)\,\beta^j(p^\alpha)}{p^\alpha} \ll \sum_p \log^j p \sum_{\alpha \ge 2} \frac{\alpha^{j+1}}{p^\alpha} \ll \sum_p \frac{\log^j p}{p^2} = O(1),$$

находим

$$\Sigma_1 = 2\tilde{c}_2 x \log\log x + g_2(l)x + O(x). \tag{20}$$

Найдем теперь оценку для Σ_2:

$$\Sigma_2 = 2x \sum_{\substack{p_1 p_2 < x \\ p_1 < p_2}} \frac{\rho(p_1)\,\beta(p_1)}{p_1} \frac{\rho(p_2)\,\beta(p_2)}{p_2} + O\left(\sum_{p_1 p_2 < x} \rho(p_1)\,\beta(p_1)\,\rho(p_2)\,\beta(p_2)\right) +$$

$$+ O\left(\sum_{n \le x} \sum_{\substack{p_1 p_2 \mid n(n+l) \\ p_1 p_2 > x}} \beta(p_1)\,\beta(p_2)\right) + O\left(x \sum_{\alpha_1 \ge 1,\, \alpha_2 > 1} \frac{\beta(p_1^{\alpha_1})\,\beta(p_2^{\alpha_2})}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}}\right). \tag{21}$$

Из леммы 2 следует, что последнее слагаемое в (21) не превышает $O(x \log\log x)$.

Используя следствие из леммы 2 и преобразование Абеля, находим

$$\sum_{p_2 \le x} \frac{\rho(p_2)\,\beta(p_2)}{p_2} \sum_{p_1 \le \min\left(p_2, \frac{x}{p_2}\right)} \frac{\rho(p_1)\,\beta(p_1)}{p_1} = \sum_{p_2 \le \sqrt{x}} \frac{\rho(p_2)\beta(p_2)}{p_2} (2\tilde{c}_1 \log\log p_2 + 2c_1 +$$

$$+ O(g_1(l)) + O(\log^{-1} p_2)) + \sum_{\sqrt{x} < p_2 \le x} \frac{\rho(p_2)\beta(p_2)}{p_2} \left(2\tilde{c}_1 \log\log x + 2c_1 + g_1(l) + O(\log^{-1} x)\right) =$$

$$= 2\tilde{c}_1^2 (\log\log x)^2 + O\big(g_1(l) \log\log x\big) + O(\log\log x). \tag{22}$$

Далее, при $p_1 p_2 < x$ справедлива оценка

$$\sum_{p_1 p_2 < x,\, p_1 < p_2} \beta(p_1)\,\beta(p_2) = \sum_{p_2 < x} \beta(p_2) \sum_{p_1 < \min\left(p_2, \frac{x}{p_2}\right)} \beta(p_1) =$$

$$= \sum_{p_2 < \sqrt{x}} \beta(p_2) \sum_{p_1 < p_2} \beta(p_1) + \sum_{\sqrt{x} < p_2 < x} \beta(p_2) \sum_{p_1 < x/p_2} \beta(p_1) = O(x).$$

Поэтому с учетом формул (21) и (22) находим

$$\Sigma_2 = 4\tilde{c}_1^2 x (\log\log x)^2 + O\big(g_1(l)\, x \log\log x\big) +$$

$$+ O(x \log\log x) + O\left(\sum_{n \le x} \sum_{\substack{p_1 p_2 \mid n(n+l) \\ p_1 p_2 > x}} \beta(p_1)\,\beta(p_2)\right). \tag{23}$$

Оценим последнее выражение в (23). При $p_1 p_2 > x$ имеем

$$\sum_{n \le x} \sum_{\substack{p_1 p_2 \mid n(n+l) \\ p_1 p_2 > x}} \beta(p_1)\,\beta(p_2) \ll \sum_{n \le x} \sum_{p_1 \mid n} \beta(p_1) \sum_{\substack{p_2 \mid n+l \\ p_2 > \max(\sqrt{x},\, x/p_1)}} \beta(p_2).$$

По определению функции β при $\beta(p_2) \neq 0$ существует целое ν такое, что $q^k\nu = p_2 + 1$. Так как $p_2 | n+l$, причем $p_2 > \sqrt{x}$ и $l < x$, имеем $n + l = n_1(q^k\nu - 1)$ для некоторого целого $n_1 < 2\sqrt{x}$. Но $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p_1)$, поэтому $n_1(q^k\nu - 1) - l \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p_1)$.

С учетом последних замечаний получаем

$$\sum_{n \le x} \sum_{p_1 | n} \beta(p_1) \sum_{\substack{p_2 | n+l \\ p_2 > \sqrt{x}}} \beta(p_2) \ll \sum_{k=1}^{[\log 2x]} k \sum_{n_1 < 2\sqrt{x}} \sum_{\substack{\nu < 3x/(q^k n_1) \\ q^k\nu - 1 \text{ — простое}}} \sum_{p_1 | n_1(q^k\nu - 1) - l} \beta(p_1) \ll$$

$$\ll \sum_{k=1}^{[\log 2x]} k \sum_{p_1 < x} \beta(p_1) \sum_{n_1 < 2\sqrt{x}} \sum_{\substack{\nu < 3x/(q^k n_1) \\ q^k\nu - 1 \text{ — простое} \\ n_1(q^k\nu - 1) - l \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p_1)}} 1 .$$

Пусть $N \equiv \#\{\nu \le y \mid F(\nu) \text{ — простое}\}$, где $F(\nu)$ — многочлен. Верхняя граница для N может быть получена путем применения теоремы 5.4 из [5]:

$$N = O_F(y / \log y). \tag{24}$$

Выберем $\delta < 1/2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1/2$. Обозначим

$$S = \sum_{n_1 < 2\sqrt{x}} \sum_{\substack{\nu < 3x/(q^k n_1);\; q^k\nu - 1 \text{ — простое} \\ n_1(q^k\nu - 1) - l \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p_1)}} 1 .$$

Пусть $S = S_1 + S_2$. В S_1 рассмотрим те слагаемые, для которых $q^k n_1 < x^{1-\delta}$, в S_2 — оставшиеся слагаемые. С помощью (24) находим

$$S_1 \ll \sum_{n_1 < 2\sqrt{x}} \frac{x}{q^k n_1 p_1 \log \frac{x}{q^k n_1}} \ll \frac{x}{q^k p_1 \log x} \sum_{n_1 < 2\sqrt{x}} \frac{1}{n_1} = O\left(\frac{x}{q^k p_1}\right),$$

$$S_2 \ll \sum_{n_1 < 2\sqrt{x}} \frac{x}{q^k n_1 p_1} \ll x^{\frac{1}{2} - \varepsilon} \frac{1}{p_1} \sum_{n_1 < 2\sqrt{x}} 1 \ll \frac{1}{p_1} x^{1-\varepsilon}.$$

Далее имеем

$$\sum_{k=1}^{[\log 2x]} k \sum_{p_1 \le x} \beta(p_1) \left(\frac{x}{q^k p_1} + \frac{1}{p_1} x^{1-\varepsilon} \right) = O(x \log\log x).$$

С учетом формулы (23) находим окончательную оценку для Σ_2:

$$\Sigma_2 = 4\tilde{c}_1^2 (\log\log x)^2 + O(g_1(l)\, x \log\log x) + O(x \log\log x). \tag{25}$$

Из (19) с помощью формул (20) и (25) получаем

$$\sum_{n \le x} \beta^2(n(n+l)) = 4\tilde{c}_1^2 x (\log\log x)^2 + O(g_1(l)\, x \log\log x) + O(x \log\log x). \tag{26}$$

Используя асимптотические формулы для $\sum_{n \le x} \beta^2(n)$, $\sum_{n \le x} \beta^2(n+l)$ (см. лемму 4 и следствие из нее), а также соотношение (26), из формулы (18) находим

$$\sum_{n\le x}\beta(n)\beta(n+l) = \tilde{c}_1^2 x(\log\log x)^2 + O(g_1(l)\,x\log\log x) + O(x\log\log x).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Будем искать асимптотику суммы

$$\sum_{m\le x}(B(m,h)-c_\beta h)^2,$$

где c_β — „среднее значение" функции $\beta(n)$.

Так как при $x\to\infty$

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\beta(n) \sim \tilde{c}_1\log\log x + \tilde{c}$$

(лемма 3), то

$$c_\beta = c_\beta(x,q) = \tilde{c}_1\log\log x + \tilde{c}.$$

Обозначим

$$B(m,h,x) = \sum_{\substack{m\le n<m+h\\ n\le x}}\beta(n).$$

Ясно, что $B(m,h,x) = B(m,h)$, когда $0<m\le[x]-h+1$.

Для оценки интересующей нас суммы представим ее в виде

$$\sum_{1\le m\le x}(B(m,h)-c_\beta h)^2 = \sum_{-h+1<m\le x}(B(m,h,x)-c_\beta h)^2 + \sum_{x-h<m\le x}(B(m,h)-c_\beta h)^2 -$$

$$-\sum_{x-h<m\le x}(B(m,h,x)-c_\beta h)^2 - \sum_{-h+1<m\le 0}(B(m,h,x)-c_\beta h)^2 = S_1+S_2-S_3-S_4. \quad (27)$$

Пусть $x/\log^2 x<h<x$. Оценим три последние суммы в выражении (27). В промежутке $x-h<m\le x$ положим $m=[x-h]+l$, $l=1,\ldots,h$. С учетом того, что

$$\log\log(x-h+l) = \log\log x + O(h/x\log x),$$

для таких m находим

$$B(m,h,x) = \sum_{x-h+l\le n<x}\beta(n) = c_\beta(h-l) + O(x/\log x),$$

$$B(m,h) = \sum_{x-h+l\le n<x+l}\beta(n) = c_\beta h + O(x/\log x).$$

Поэтому

$$S_3 = \sum_{1\le l\le h}(c_\beta(h-l)-c_\beta h+O(x/\log x))^2 =$$

$$= c_\beta^2\frac{h^3}{3} + O\left(\frac{h^2x\log\log x}{\log x}\right) + O\left(\frac{x^2h}{\log^2 x}\right), \quad (28)$$

$$S_2 = O\left(\frac{x^2h}{\log^2 x}\right). \quad (29)$$

Далее, при $-h+1<m\le 0$ для $B(m,h,x)$ получаем

$$B(m, h, x) = \sum_{n<m+h} \beta(n) = c_\beta(m+h) + O(h).$$

Поэтому

$$S_4 = \sum_{-h+1<m\le 0} (c_\beta(m+h) - c_\beta h + O(h))^2 = c_\beta^2 \frac{h^3}{3} + O(h^3 \log\log x). \qquad (30)$$

Для оценки S_1 нам понадобится тождество

$$\sum_{-h+1<m\le x} B^2(m, h, x) = h\sum_{n\le x} \beta^2(n) + 2\sum_{l=1}^{h-1} (h-l) \sum_{n\le x-l} \beta(n)\beta(n+l). \qquad (31)$$

Из определения $g_j(l)$ (формула (3)) следует, что $g_j(l) << \omega(l)$, где $\omega(l)$ — число различных простых делителей числа l. Можно показать [6, с. 13], что

$$\sum_{l\le x} \omega(l) \sim x\log\log x \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Поэтому

$$\sum_{l=1}^{h-1} (h-l)\, g(l) \log\log x = O(h\log\log x \sum_{l=1}^{h-1} g(l)) = O((h\log\log x)^2).$$

С учетом (31), используя (9), (17) и последнюю оценку, находим

$$S_1 = \sum_{-h+1<m\le x} B^2(m, h, x) - 2c_\beta h^2 \sum_{n\le x} \beta(n) + c_\beta^2 h^2 x + c_\beta^2 h^2 (h-1) =$$

$$= \frac{2}{3} c_\beta^2 h^3 + O(h^2 x\log\log x). \qquad (32)$$

Комбинируя (27) – (30) и (32), окончательно получаем

$$\sum_{m\le x} (B(m, h) - c_\beta h)^2 = O(h^2 x\log\log x).$$

Заметим, что формула (32) верна при любых значениях $h < x$. В случае $h < x/\log^2 x$ в силу (32) имеем

$$S_1 = O(h^2 x\log\log x)$$

и с учетом того, что $\beta(n) < \log n$, из (27) находим

$$S_k = O(h^3 \log^2 x) \quad \text{при} \quad k = 2, 3, 4,$$

откуда следует утверждение теоремы.

1. *Wijsmuller M.* The value distribution of an additive function // Ann. Univ. sci budapest., Sec. comp. – 1994. – **14**. – P. 279 – 291.
2. *Ramachandra K.* Some problems of analytic number theory // Acta arithm. – 1976. – **31**. – P. 313 – 324.
3. *Katai I.* A remark on a parer of K. Ramachandra // Lect. Notes Math. – 1985. – **1122**. – P. 147 – 152.
4. *Iwaniec H.* On zeros of Dirichlet's L-series // Invent. math. – 1974. – **23**. – P. 97 – 104.
5. *Halberstam H., Richert H.* Sieve methods. – London: Acad. Press, 1974. – 341 p.
6. *Кубилюс И. П.* Вероятностные методы в теории чисел. – Вильнюс: Госполитнаучиздат, 1962. – 221 с.

Получено 13.10.97,
после доработки — 09.08.99