УДК 517.958

О. М. Боценюк (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ГЛОБАЛЬНІ МАЛІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНІЄЇ НАПІВЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

For a semilinear system of thermoelasticity equations, we obtain a theorem on the existence and uniqueness of global solutions in a many-dimensional space under condition that initial data are sufficiently small. We also establish estimates of the decrease of solutions in time.

Для однієї напівлінійної системи рівнянь термопружності одержано теорему існування та єдиності глобальних розв'язків у багатовимірному просторі за умови, що початкові дані достатньо малі. Встановлено також оцінки спадання розв'язків за часом.

Розглядається задача Коші для системи рівнянь термопружності з нелінійними збуреннями

$$\rho\, c_D \frac{\partial\theta}{\partial t} - k\Delta\theta + \beta\,\theta_0 \operatorname{div}\frac{\partial v}{\partial t} = f_1\!\left(\theta, \operatorname{div} v, \frac{\partial v_\pi}{\partial t}\right), \tag{1}$$

$$\rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \mu\Delta v - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} v + \beta \operatorname{grad}\theta = f_2\!\left(\theta, \operatorname{div} v, \frac{\partial v_\pi}{\partial t}\right), \tag{2}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Тут $\theta(x,t) \in \mathbb{R}$ — відхилення температури середовища, $v(x,t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор переміщення, $v_\pi(x,t) \in \mathbb{R}^n$ — градієнтна складова переміщення, яка отримується через розклад Гельмгольца $v = v_\pi + v_\sigma$, якщо $n \geq 2$, і покладемо $v_\pi = v$, якщо $n = 1$. Припустимо, що коефіцієнти системи (1), (2) є постійними та додатними (однак можна також розглядати $\beta < 0$), функції f_1, f_2 є достатньо гладкими і

$$f_i(y) = O(|y|^m), \quad y \to 0, \quad y \in \mathbb{R}^{2+n}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m > 1 + \frac{2}{n}. \tag{4}$$

Початково-крайові задачі нелінійної теорії термопружності досліджувались в багатьох працях (див., наприклад, [1–3]). Задача Коші в $\mathbb{R}$ для системи рівнянь нелінійної термопружності досліджувалась в роботах [4–6]. Деякі загальні нелінійні гіперболо-параболічні системи в $\mathbb{R}^n$ із штучною в'язкістю розглядались в [7].

Відзначимо, що якщо розглядати члени f_i, залежні від похідних θ, v вищого порядку, ніж в (1), (2), і якщо ця залежність є лінійною, то цей випадок можна дослідити таким же способом, як і при доведенні теореми 1, у поєднанні з енергетичним методом. У цьому випадку можна вважати, що система (1), (2) є лінеаризованою в околі деякого постійного стану $\{\overline{\theta}, \overline{v}\}$ для відповідної загальної нелінійної системи рівнянь термопружності [1].

1. Позначення і означення. Через $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ і $\dot{H}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty$, $s, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > -n(p')^{-1}$, $p^{-1} + (p')^{-1} = 1)$ позначаємо поповнення простору $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ за нормами

$$\|v\|_{H^{s,p}} = \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \mathcal{F}(v)\right)\right\|_{L^p},$$

$$\|v\|_{\dot{H}^{\sigma,p}} = \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{\sigma} \mathcal{F}(v)\right)\right\|_{L^p}.$$

Перетворення Фур'є функції v позначаємо через $\mathcal{F}(v)$ або $\hat{v}$, а обернене перетворення — через $\mathcal{F}^{-1}(v)$. Аналогічно означаються простори $H^{s,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$, $\dot{H}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$, $L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$ для функцій $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. В основному позначення $H^{s,p}$, $\dot{H}^{s,p}$, L^p використовуємо як для скалярних, так і для векторних функцій. Замість $H^{s,2}$, $\dot{H}^{s,2}$ будемо писати H^s, $\dot{H}^s$. Нехай H_σ і H_π є замиканнями множин відповідно $\left\{\psi \mid \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \operatorname{div}\psi = 0\right\}$ і $\left\{\operatorname{grad}\varphi \mid \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\right\}$ в $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Тоді

$$H_\sigma = \{\, u \mid u \in L^2, \operatorname{div} u = 0 \,\},$$

$$H_\pi = \left\{\, u \mid u \in L^2, u = \operatorname{grad} p,\ p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\right\}$$

і $L^2 = H_\sigma \oplus H_\pi$. Ортопроектор Q простору L^2 на H_π задається формулою

$$(Qv)_j = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2}\, \hat{v}_k\right)$$

і $P = I - Q$ є ортопроектором L^2 на H_σ. Оператори P і Q обмежені на $H^{s,p}$, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Через $C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, позначаємо множину функцій, що мають неперервні похідні порядку k, а через $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ — підпростір простору $C^k(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою $\sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)|$. Літерою c будемо позначати різні додатні сталі. Нарешті, $\nabla_l = \{D^\alpha\}$, де $|\alpha| = l$ і $\nabla = \nabla_1$.

2. Формулювання задач. *Задача* 1. Для заданих $\theta_0 \in H^s \cap L^1$, $\nabla v_0 \in H^s \cap L^1$, $v_1 \in H^s \cap L^1$ знайти сильний розв'язок $\{\theta, v\}$ системи (1)–(3), який задовольняє включення $\nabla\theta \in L^2(\mathbb{R}_+; H^s)$, $\theta \in C(\mathbb{R}_+; H^s)$, $\theta' \in C(\mathbb{R}_+; H^{s-2}) \cap L^2(\mathbb{R}_+; H^{s-1})$, $\nabla v \in C(\mathbb{R}_+; H^s)$, $v' \in C(\mathbb{R}_+; H^s)$, $v'' \in C(\mathbb{R}_+; H^{s-1})$, $s > n/2$, $s \ge 2$.

Подіємо проекторами P і Q на обидві частини рівняння (2). Тоді, врахувавши рівності $Q\Delta v = \Delta Qv$, $\operatorname{grad}\operatorname{div} Qv = \Delta Qv$, отримаємо систему рівнянь

$$\theta' - a\Delta\theta + \gamma_1 \operatorname{div} v'_\pi = \frac{1}{\rho c_D} f_1(\theta, \operatorname{div} v_\pi, v'_\pi), \tag{5}$$

$$v_\pi'' - b\Delta v_\pi + \gamma_2 \operatorname{grad}\theta = \frac{1}{\rho} Q f_2(\theta, \operatorname{div} v_\pi, v_\pi'), \tag{6}$$

$$v_\sigma'' - d\Delta v_\sigma = \frac{1}{\rho} P f_2(\theta, \operatorname{div} v_\pi, v_\pi'), \tag{7}$$

де $v_\sigma = Pv$, $v_\pi = Qv$, v_σ і v_π — соленоїдна і градієнтна складові v; $a = k/\rho c_D$, $b = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $\gamma_1 = \beta\theta_0/\rho c_D$, $\gamma_2 = \beta/\rho$, $d = \mu/\rho$, $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$ (можна також розглядати випадок $\gamma_i < 0$, $i = 1, 2$, з заміною γ_i на $-\gamma_i$).

Зауважимо, що рівняння (5), (6) зв'язані, а рівняння (7) можна розглядати окремо. Якщо знайдемо розв'язок $\{\theta, v_\pi\}$ системи рівнянь (5), (6), то, підставивши значення θ, v_π в праву частину (7), знайдемо v_σ.

Запишемо (5), (6) у вигляді

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = \tilde{Q}F(u), \quad u(0) = u_0, \quad \tilde{Q}u_0 = u_0, \tag{8}$$

де

$$u = \begin{pmatrix} \theta \\ v_\pi \\ v_\pi' \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -a\Delta & 0 & \gamma_1 \operatorname{div} \\ 0 & 0 & -1 \\ \gamma_2 \nabla & -b\Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \operatorname{diag}\{1, Q, Q\}, \tag{9}$$

$$F(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho c_D} f_1(\theta, \operatorname{div} v_\pi, v_\pi') \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} f_2(\theta, \operatorname{div} v_\pi, v_\pi') \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Позначимо $u_1 = v_\pi$, $u_2 = v_\pi'$, тобто $u = (\theta, u_1, u_2)^t$. Введемо простори

$$X_s = \dot{H}^s(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1) \oplus \dot{H}^{s+1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \oplus \dot{H}^s(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n),$$

$$Y_p = L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1) \oplus \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \oplus L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \quad 1 \le p \le \infty.$$

Тут через $\dot{W}^{1,p}$ позначено поповнення простору $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ за нормою $\|\nabla\varphi\|_{L^p}$. Маємо $\dot{W}^{1,p} = \dot{H}^{1,p}$ при $1 < p < \infty$ [8, с. 289]. Розглянемо оператор $\mathcal{A}$ в X_0 з областю визначення $D(\mathcal{A}) = H^2 \oplus (\dot{H}^2 \cap \dot{H}^1) \oplus H^1$. Тоді за теоремою Лумера – Філліпса [9, с. 267] оператор $-\mathcal{A}$ породжує неперервну стискаючу півгрупу $W(t)\colon X_0 \to X_0$, якщо X_0 наділити скалярним добутком

$$(\varphi, \psi)_{X_0} = \gamma_2(\varphi_1, \psi_1)_{L^2} + b\gamma_1(\nabla\varphi_2, \nabla\psi_2)_{L^2} + \gamma_1(\varphi_3, \psi_3)_{L^2}.$$

Для $w = (w_1, w_2, w_3)$, $w \in D(\mathcal{A})$, маємо $(\mathcal{A}w, w)_{X_0} = a\gamma_2 |\nabla w_1|^2 \ge 0$. Розглянемо систему рівнянь $(\lambda + \mathcal{A})w = f$, $f \in X_0$, $\lambda > 0$. Із другого рівняння цієї системи визначимо $w_2 = (w_3 + f_2)/\lambda$ і підставимо в перше і третє рівняння. Тоді отримаємо

$$-a\Delta w_1 + \lambda w_1 + \gamma_1 \operatorname{div} w_3 = f_1,$$

$$-\frac{b}{\lambda}\Delta w_3 + \lambda w_3 + \gamma_2 \nabla w_1 = f_3 + \frac{b}{\lambda}\Delta f_2, \quad \Delta f_2 \in H^{-1}.$$

Розв'язуючи цю систему за допомогою леми Лакса – Мільграма, одержимо

$w_1 \in H^1$, $w_3 \in H^1$. Тоді із системи $(\lambda + \mathcal{A})w = f$ випливає $w \in D(\mathcal{A})$. Отже, $R(\lambda I + \mathcal{A}) = X_0$ і тому виконуються умови теореми Лумера – Філліпса.

Переформулюємо задачу (8) у вигляді інтегрального рівняння

$$u(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-\tau)\tilde{Q}F(u(\tau))\,d\tau. \tag{11}$$

Теорема 1. *Нехай* $f_i \in C^{m+s+1}(\mathbb{R}^{2+n})$, $D^\gamma f_i \in C_b(\mathbb{R}^{2+n})$ *для всіх* $\gamma \in \mathbb{Z}_+^{2+n}$ *таких, що* $m \le |\gamma| \le m+s+1$, $i = 1, 2$, $m, s \in \mathbb{N}$; $s > n/2$, $s \ge 2$ *і виконується умова* (4). *Тоді існує таке* $\nu > 0$, *що якщо* $u_0 \in Y_1 \cap X_s \cap X_0$ *і* $\|u_0\|_{Y_1} + \|u_0\|_{X_s} + \|u_0\|_{X_0} < \nu$, *то задача* (8) *має єдиний глобальний розв'язок*

$$u \in C(\mathbb{R}_+; X_s \cap X_0), \qquad u \in C^1(\mathbb{R}_+; X_0).$$

Для цього розв'язку виконуються оцінки

$$\|u(t)\|_{X_s} \le c(1+t)^{-\kappa_{1,s}}\left(\|u_0\|_{Y_1} + \|u_0\|_{X_s} + \|u_0\|_{X_0}\right), \qquad t \ge 0, \tag{12}$$

де $\kappa_{1,s} = n/4 + s/2$ *і*

$$\|u(t)\|_{X_0} \le c(1+t)^{-n/4}\left(\|u_0\|_{Y_1} + \|u_0\|_{X_s} + \|u_0\|_{X_0}\right), \qquad t \ge 0. \tag{13}$$

Наслідок. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* 1 *за умови, що* θ_0, ∇v_0, v_1 *є достатньо малими в нормі* $H^s \cap L^1$. *Крім того, має місце оцінка*

$$\|\nabla_l \theta(t)\|_{L^2} + \|\nabla_{l+1} Qv(t)\|_{L^2} + \|\nabla_l Qv'(t)\|_{L^2} \le c(1+t)^{-\kappa_{1,l}} \times$$
$$\times\left(\|\theta_0\|_{H^s} + \|\nabla v_0\|_{H^s} + \|v_1\|_{H^s} + \|\theta_0\|_{L^1} + \|\nabla v_0\|_{L^1} + \|v_1\|_{L^1}\right),$$
$$0 \le l \le s, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Перед доведенням теореми 1 наведемо ряд тверджень.

3. Властивості півгрупи $W(t)$. Розглядаємо однорідне рівняння

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0, \qquad u(0) = u_0. \tag{14}$$

Позначимо $U(D) = \operatorname{diag}\{1, \operatorname{div}, \operatorname{div}\}$, $w = (w_1, w_2, w_3)^t$, де $w_1 = \theta$, $w_2 = \operatorname{div} u_1$, $w_3 = \operatorname{div} u_2$, тобто $w = U(D)u$. Подіявши оператором $U(D)$ на (14), одержимо

$$\begin{aligned} &\frac{dw}{dt} + L(D)w = 0, \\ &w(0) = w_0, \\ &w_0 = U(D)u_0, \end{aligned} \qquad L(D) = \begin{pmatrix} -a\Delta & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \gamma_2\Delta & -b\Delta & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Застосувавши перетворення Фур'є $\mathcal{F}_x$ до обох частин (15), отримаємо

$$\begin{aligned} &\frac{d\hat{w}(\xi,t)}{dt} + L(\xi)\hat{w}(\xi,t) = 0, \\ &\hat{w}(\xi,0) = \hat{w}_0(\xi), \end{aligned} \qquad L(\xi) = \begin{pmatrix} a|\xi|^2 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\gamma_2|\xi|^2 & b|\xi|^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Позначимо $V(\xi) = \operatorname{diag}\{1, 1, |\xi|^{-1}\}$, $A(\xi) = V(\xi)L(\xi)V^{-1}(\xi)$. Введемо матрицю

$$\Phi(\xi, t) = V(\xi)\exp(-tL(\xi))V^{-1}(\xi) = \exp(-tA(\xi)).$$

Лема 1. *Для матриці* $\Phi(\xi, t)$ *виконується оцінка*

$$\|\Phi(\xi, t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} \leq c\exp\left(-c\min\left\{|\xi|^2, 1\right\}t\right). \tag{17}$$

Доведення. Розглянемо задачу $z' + A(\xi)z = 0$, $z(0) = z_0$, де $z = (z_1, z_2, z_3)^t$. Тоді маємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$z_1' + a|\xi|^2 z_1 + \gamma_1|\xi|z_3 = 0, \tag{18}$$

$$z_2' - |\xi|z_3 = 0, \tag{19}$$

$$z_3' - \gamma_2|\xi|z_1 + b|\xi|z_2 = 0. \tag{20}$$

Помножимо рівняння (18) на $\gamma_2 z_1$, (19) — на $b\gamma_1 z_2$, (20) — на $\gamma_1 z_3$ і додамо. В результаті одержимо

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_2 z_1^2 + b\gamma_1 z_2^2 + \gamma_1 z_3^2\right) + 2a\gamma_2|\xi|^2 z_1^2 = 0. \tag{21}$$

Помножимо (18) на z_3:

$$\gamma_1|\xi|z_3^2 + \frac{d}{dt}(z_1 z_3) - z_1 z_3' + a|\xi|^2 z_1 z_3 = 0. \tag{22}$$

Підставимо у рівняння (22) значення z_3' із (20):

$$\gamma_1|\xi|z_3^2 + \frac{d}{dt}(z_1 z_3) - \gamma_2|\xi|z_1^2 + b|\xi|z_1 z_2 + a|\xi|^2 z_1 z_3 = 0. \tag{23}$$

Помножимо рівняння (20) на z_2:

$$b|\xi|z_2^2 + \frac{d}{dt}(z_2 z_3) - z_3 z_2' - \gamma_2|\xi|z_1 z_2 = 0. \tag{24}$$

Підставимо $z_2' = |\xi|z_3$ із (19) у (24):

$$b|\xi|z_2^2 + \frac{d}{dt}(z_2 z_3) - |\xi|z_3^2 - \gamma_2|\xi|z_1 z_2 = 0. \tag{25}$$

Помножимо (23) на $2/\gamma_1$ і додамо до (25):

$$b|\xi|z_2^2 + |\xi|z_3^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{\gamma_1}z_1 z_3 + z_2 z_3\right) = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1}|\xi|z_1^2 +$$

$$+\left(\gamma_2 - \frac{2b}{\gamma_1}\right)|\xi|z_1 z_2 - \frac{2a}{\gamma_1}|\xi|^2 z_1 z_3. \tag{26}$$

Використавши нерівності

$$\left(\gamma_2 - \frac{2b}{\gamma_1}\right)|\xi|z_1 z_2 \leq \frac{b}{2}|\xi|z_2^2 + c|\xi|z_1^2,$$

$$-\frac{2a}{\gamma_1}|\xi|^2 z_1 z_3 \leq \frac{1}{2}|\xi|z_3^2 + c|\xi|^3 z_1^2,$$

із (26) одержимо

$$b|\xi|z_2^2 + |\xi|z_3^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{\gamma_1}z_1 z_3 + 2z_2 z_3\right) \leq c\left(|\xi| + |\xi|^3\right)z_1^2. \tag{27}$$

Позначимо $\omega(|\xi|) = \min\{|\xi|, |\xi|^{-1}\}$,

$$E_\varepsilon(z) = \gamma_2 z_1^2 + b\gamma_1 z_2^2 + \gamma_1 z_3^2 + \varepsilon\omega(|\xi|)\left(\frac{4}{\gamma_1} z_1 z_3 + 2z_2 z_3\right).$$

Помножимо (27) на $\varepsilon\omega(|\xi|)$ і додамо до (21). Тоді отримаємо $(\varepsilon > 0)$

$$E_\varepsilon(z)' + 2a\gamma_2|\xi|^2 z_1^2 + \varepsilon\omega(|\xi|)|\xi|\left(b z_2^2 + z_3^2\right) \le c\varepsilon\omega(|\xi|)|\xi|\left(1+|\xi|^2\right)z_1^2. \quad (28)$$

Вибравши ε достатньо малим, із (28) одержимо

$$E_\varepsilon(z(t))' + c\min\left\{|\xi|^2, 1\right\}|z(t)|^2 \le 0. \quad (29)$$

Оскільки $E_\varepsilon(z)$ і $|z|^2$ еквівалентні при достатньо малому ε, із (29) випливає (17). Лему доведено.

Для розв'язку задачі (16) маємо $V(\xi)\hat{w}(\xi,t) = \Phi(\xi,t)V(\xi)\hat{w}_0(\xi)$. Звідси випливає $(s \in \mathbb{R})$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|V\hat{w}(t)|^2 d\xi = \int\limits_{|\xi|\le 1} |\xi|^{2s}|\Phi V\hat{w}_0|^2 d\xi +$$

$$+ \int\limits_{|\xi|\ge 1} |\xi|^{2s}|\Phi V\hat{w}_0|^2 d\xi = J_1 + J_2. \quad (30)$$

Оцінимо J_1. Використавши (17), маємо

$$J_1 \le c\int\limits_{|\xi|\le 1} |\xi|^{2s}\exp\left(-c|\xi|^2 t\right)|V\hat{w}_0|^2 d\xi =$$

$$= c\int\limits_{|\xi|\le 1}\left(|\xi|^{2(s-s_0)}\exp\left(-c|\xi|^2 t\right)\right)\left(|\xi|^{2s_0}|V\hat{w}_0|^2\right)d\xi \le$$

$$\le c\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left(|\xi|^{2(s-s_0)}\exp\left(-c|\xi|^2 t\right)\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s_0}|V\hat{w}_0|^2 d\xi \le$$

$$\le c t^{s_0-s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s_0}|V\hat{w}_0|^2 d\xi, \quad s_0 \le s. \quad (31)$$

Для J_2, використавши (17), одержимо

$$J_2 \le c\exp(-ct)\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}|V\hat{w}_0|^2 d\xi. \quad (32)$$

Із (30) – (32), враховуючи, що $w = U(D)u$, отримуємо

$$\|\theta(t)\|_{\dot{H}^s} + \|u_1(t)\|_{\dot{H}^{s+1}} + \|u_2(t)\|_{\dot{H}^s} \le$$

$$\le c t^{-(s-s_0)/2}\left(\|\theta_0\|_{\dot{H}^{s_0}} + \|u_{10}\|_{\dot{H}^{s_0+1}} + \|u_{20}\|_{\dot{H}^{s_0}}\right) +$$

$$+ c\exp(-ct)\left(\|\theta_0\|_{\dot{H}^s} + \|u_{10}\|_{\dot{H}^{s+1}} + \|u_{20}\|_{\dot{H}^s}\right), \quad s \ge s_0 > -n/2. \quad (33)$$

Отже,

$$W(t)\tilde{Q}: X_s \cap X_0 \to X_s \quad (s \ge s_0 > -n/2)$$

і

$$\|W(t)\tilde{Q}g\|_{X_s} \le c t^{-(s-s_0)/2}\|g\|_{X_{s_0}} + c\exp(-ct)\|g\|_{X_s}, \quad g \in X_s \cap X_{s_0}. \quad (34)$$

Встановимо ще оцінку $(s > -n/2)$

$$\| W(t)\tilde{Q}g\|_{X_s} \le ct^{-n/4-s/2}\|g\|_{Y_1} + c\exp(-ct)\|g\|_{X_s}, \quad g \in Y_1 \cap X_s. \quad (35)$$

Із (31) маємо

$$J_1 \le c\|V\hat{w}_0\|^2_{L^\infty} \int\limits_{|\xi|\le 1} |\xi|^{2s}\exp\left(-c|\xi|^2 t\right)d\xi \le ct^{-n/2-s}\|V\hat{w}_0\|^2_{L^\infty}. \quad (36)$$

Нехай u_0 в (14) має вигляд $u_0 = \tilde{Q}g$, де $g \in Y_1 \cap X_s$, $g = (g_1, g_2, g_3)$, $g_3 = (g_{31}, \ldots, g_{3n})$. Оскільки $U\tilde{Q}g = Ug$, то $\hat{w}_0 = \mathcal{F}(U(D)u_0) = \mathcal{F}(U(D)\tilde{Q}g) = \mathcal{F}(Ug)$. Отже, $V\hat{w}_0 = V\mathcal{F}(Ug)$. Звідси одержуємо

$$\|V\hat{w}_0\|_{L^\infty} = \|V\mathcal{F}(Ug)\|_{L^\infty} \le$$
$$\le \|\mathcal{F}(g_1)\|_{L^\infty} + \|\mathcal{F}(\operatorname{div} g_2)\|_{L^\infty} + \|\,|\xi|^{-1}\mathcal{F}(\operatorname{div} g_3)\|_{L^\infty} \le$$
$$\le c\|g_1\|_{L^1} + c\|\operatorname{div} g_2\|_{L^1} + \left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{|\xi|}\hat{g}_{3k}\right\|_{L^\infty} \le c\|g\|_{Y_1}.$$

Отже, $\|V\hat{w}_0\|_{L^\infty} \le c\|g\|_{Y_1}$ і тоді з (30), (32), (36) випливає (35).

Аналогічно, користуючись теоремою Хаусдорфа – Юнга, можна встановити оцінку

$$\| W(t)\tilde{Q}g\|_{X_s} \le ct^{-\kappa_{p,s}}\|g\|_{Y_p} + c\exp(-ct)\|g\|_{X_s}, \quad g \in Y_p \cap X_s,$$

де $\kappa_{p,s} = n/2(p^{-1} - 1/2) + s/2$, $s > -n(p^{-1} - 1/2)$ при $1 \le p < 2$ і $s \ge 0$ при $p = 2$.

4. Властивості нелінійного відображення F (10).

Лема 2. *Нехай* $f \in C^{m+k}(\mathbb{R}^d)$, $\sup\{|D^\alpha f(y)| : y \in \mathbb{R}^d, m \le |\alpha| \le m + k\} \le M$ *і* $|f(y)| \le c|y|^m$, *для* $|y| \le \varepsilon$, $m, k \in \mathbb{Z}_+$. *Тоді існують* $g(\cdot, \beta) \in C_b^k(\mathbb{R}^d)$ $(\beta \in \mathbb{Z}_+^d, |\beta| = m)$ *такі, що*

$$\|g(\cdot, \beta)\|_{C_b^k} \le cM, \quad f(y) = \sum_{|\beta|=m} g(y, \beta)y^\beta.$$

Доведення цієї леми випливає з формули Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі.

За допомогою нерівності [8, с. 332]

$$\|D_{x_i}^j v\|_{L^q} \le c\|v\|_{L^\infty}^{1-\theta}\|D_{x_i}^k v\|_{L^2}^\theta, \quad \theta = \frac{j}{k}, \quad q = \frac{2}{\theta}, \quad 1 \le j \le k,$$

доводиться наступна лема [12, с. 242].

Лема 3. *Якщо* $g \in C_b^k(\mathbb{R}^d)$, $w_j \in \dot{H}^k(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j = \overline{1, d}$, *то виконується нерівність*

$$\|D_{x_i}^k g(w_1, \ldots, w_d)\|_{L^2} \le c_g \sum_{j=1}^{d}\|D_{x_i}^k w_j\|_{L^2}\left(1 + \sum_{j=1}^{d}\|w_j\|_{L^\infty}\right)^{k-1}, \quad k \ge 1.$$

Позначимо

$$E_s(v, t) = (1+t)^{(n/4+s/2)}\|v\|_{\dot{H}^s} + (1+t)^{n/4}\|v\|_{L^2}, \quad v \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad t \ge 0.$$

З використанням леми 3 і мультиплікативної нерівності Гальярдо – Ніренберга [13, с. 236] доводиться така лема.

Лема 4. *Нехай* $g \in C_b^s(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{N}$, $s > n/2$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\gamma| = s$, $v_j, w_k \in H^s(\mathbb{R}^n)$. *Тоді*

$$\|D_x^\gamma (g(w_1, \ldots, w_d) v_1 \ldots v_m)\|_{L^2} \le c(1+t)^{-\lambda_{s,2}} \prod_{j=1}^m E_s(v_j, t) \left[1 + \left(\sum_{k=1}^d E_s(w_k, t) \right)^s \right].$$

Тут і в наступних твердженнях

$$\lambda_{\sigma, p} = \frac{\sigma}{2} + \frac{n}{2}(m - p^{-1}), \quad 1 \le p \le \infty, \quad \sigma \ge 0.$$

Лема 5. *Нехай* $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $m \ge 1$, *якщо* $2 \le p \le \infty$, *і* $m \ge 2$, *якщо* $1 \le \le p < 2$, $s \in \mathbb{N}$, $s > n/2$, $v_j, w_k \in H^s(\mathbb{R}^n)$. *Тоді*

$$\|g(w_1, \ldots, w_d) v_1 \ldots v_m\|_{L^p} \le c(1+t)^{-\lambda_{0,p}} \prod_{j=1}^m E_s(v_j, t).$$

Позначимо

$$B_s(u, t) = (1+t)^{(n/4+s/2)} \|u\|_{X_s} + (1+t)^{n/4} \|u\|_{X_0}, \quad u \in X_s \cap X_0.$$

Використовуючи попередні леми, одержимо наступну лему.

Лема 6. *Нехай функції* f_i, $i = 1, 2$, *задовольняють умови леми* 2 *при* $k = s$, $s > n/2$, $m \ge 2$. *Тоді для відображення* F *справедливі оцінки*

$$\|F(u)\|_{X_s} \le c(1+t)^{-\lambda_{s,2}} \left(B_s(u,t)^m + B_s(u,t)^{m+s} \right), \quad u \in X_s \cap X_0, \tag{37}$$

$$\|F(u)\|_{Y_p} \le c(1+t)^{-\lambda_{0,p}} B_s(u,t)^m, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{38}$$

Крім того, якщо f_i, $i = 1, 2$, *задовольняють умови леми* 2 *при* $k = s+1$, $s > > n/2$, $m \ge 2$, *то*

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{X_s} \le\ & c(1+t)^{-\lambda_{s,2}} B_s(u-v, t) \Big[(B_s(u,t) + B_s(v,t))^{m-1} + \\ & + (B_s(u,t) + B_s(v,t))^{m+s} \Big], \quad u, v \in X_s \cap X_0, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\|F(u) - F(v)\|_{Y_p} \le c(1+t)^{-\lambda_{0,p}} B_s(u-v, t) \Big[(B_s(u,t) + B_s(v,t))^{m-1} + B_s(v,t)^m \Big]. \tag{40}$$

5. Існування розв'язків. Для встановлення локальної розв'язності задачі (8) скористаємось наступним твердженням.

Лема 7. *Нехай* X_0, X — *гільбертові простори такі, що простір* X *неперервно вкладений в* X_0. *Припустимо, що лінійний оператор* $-\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset \subset X_0 \to X_0$ *породжує* C_0-*півгрупу* $W(t)$ *на* X_0 *і* $W(t)$ *є також* C_0-*півгрупою на* X. *Припустимо ще, що простір* X *неперервно вкладений в* $D(\mathcal{A})$ *і* $W(t)$ — *рівномірно обмежена півгрупа на* X_0 *і* X. *Нехай відображення* $G: X \to X$ *задовольняє умову*

$$\|G(\varphi) - G(\psi)\|_X \le K(\|\varphi\|_X, \|\psi\|_X) \|\varphi - \psi\|_X$$

для всіх $\varphi, \psi \in X$, *де* $K(x, y)$ — *монотонно зростаюча функція по* x *і* y. *Тоді для кожного* $u_0 \in X$ *існує таке* $T > 0$, *що задача* $u' + \mathcal{A}u = G(u)$, $u(0) = = u_0$ *має єдиний сильний розв'язок* $u \in C([0, T); X) \cap C^1([0, T); X_0)$. *Для кожної множини вигляду* $\{\varphi: \|\varphi\|_X \le a\}$ *можна вибрати* T *рівномірно для всіх* u_0 *з цієї множини.*

Для доведення цієї леми застосуємо принцип стискаючих відображень до метричного простору

$$Z = \{v : v \in C([0, T); X), \| v(t) - W(t)u_0 \|_X \le \varepsilon, 0 \le t < T\}$$

(див. [9] (§ X.13), [14, с. 134–136; 15; 16]).

Розглянемо в лемі 7 оператор $\mathcal{A}$ із (9), $X = X_s \cap X_0$, $G(u) = \tilde{Q}F(u)$ і простір X_0 такий же, як означений в п. 2. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді, враховуючи оцінки (34) при $s = s_0$ і (39), (40) при $t = 0$, із леми 7 отримуємо, що для кожного $u_0 \in X_s \cap X_0$ існує єдиний сильний розв'язок задачі (8)

$$u \in C([0, T_s); X_s \cap X_0) \cap C^1([0, T_s); X_0), \qquad T_s > 0,$$

з додатковою властивістю: або $T_s = \infty$, або $T_s < \infty$ і $\lim\limits_{t \to T_s} \| u(t) \|_{X_s \cap X_0} = \infty$.

***Доведення теореми* 1.** Нехай $[0, T_s)$ — максимальний інтервал існування розв'язку (8). Тоді з (11) при $t \in [0, T_s)$ маємо

$$\|u(t)\|_{X_s} \le \|W(t)u_0\|_{X_s} +$$

$$+ \int\limits_0^{t/2} \|W(t-\tau)\tilde{Q}F(u(\tau))\|_{X_s} d\tau + \int\limits_{t/2}^{t} \|W(t-\tau)\tilde{Q}F(u(\tau))\|_{X_s} d\tau . \tag{41}$$

Звідси, використавши (35) і (34) при $s = s_0$, одержимо

$$\|u(t)\|_{X_s} \le ct^{-\kappa_{1,s}} \| u_0 \|_{Y_1} +$$

$$+ c\exp(-ct) \| u_0 \|_{X_s} + c \int\limits_0^{t/2} \Big[(t-\tau)^{-\kappa_{1,s}} \| F(u(\tau)) \|_{Y_1} +$$

$$+ c\exp(-c(t-\tau)) \| F(u(\tau)) \|_{X_s} \Big] d\tau + c \int\limits_{t/2}^{t} \| F(u(\tau)) \|_{X_s} d\tau . \tag{42}$$

Із (42) з урахуванням (37) і (38) при $p = 1$ отримаємо

$$t^{\kappa_{1,s}} \| u(t) \|_{X_s} \le c \| u_0 \|_{Y_1} + c \| u_0 \|_{X_s} + J_1 + J_2 + J_3 , \tag{43}$$

де

$$J_1 = ct^{\kappa_{1,s}} \int\limits_0^{t/2} (t-\tau)^{-\kappa_{1,s}} (1+\tau)^{-n\alpha/2} B_s(u(\tau), \tau)^m d\tau , \qquad \alpha = m - 1,$$

$$J_2 = ct^{\kappa_{1,s}} \int\limits_0^{t/2} \exp(-c(t-\tau))(1+\tau)^{-\lambda_{s,2}} \Big[B_s(u(\tau), \tau)^m + B_s(u(\tau), \tau)^{m+s} \Big] d\tau ,$$

$$J_3 = ct^{\kappa_{1,s}} \int\limits_{t/2}^{t} (1+\tau)^{-\lambda_{s,2}} \Big[B_s(u(\tau), \tau)^m + B_s(u(\tau), \tau)^{m+s} \Big] d\tau .$$

Позначимо $R(t) = \sup\limits_{0 \le \tau \le t} B_s(u(\tau), \tau)$. Маємо

$$J_1 \le ct^{\kappa_{1,s}} \left(\frac{t}{2} \right)^{-\kappa_{1,s}} R(t)^m \int\limits_0^{t/2} (1+\tau)^{-n\alpha/2} d\tau .$$

Оскільки $\alpha > 2/n$, то $J_1 \le cR(t)^m$. Аналогічно одержуємо $J_2 \le c\big(R(t)^m + R(t)^{m+s}\big)$. Оцінимо J_3. Оскільки $\lambda_{s,2} = \kappa_{1,s} + n\alpha/2$, $\alpha = m-1$, то

$$J_3 \le ct^{\kappa_{1,s}}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\kappa_{1,s}}\left(R(t)^m + R(t)^{m+s}\right)\int\limits_{t/2}^{t}(1+\tau)^{-n\alpha/2}d\tau .$$

Отже, $J_3 \le c\big(R(t)^m + R(t)^{m+s}\big)$ і тоді з (43) отримуємо

$$t^{\kappa_{1,s}}\|u(t)\|_{X_s} \le c\|u_0\|_{Y_1} + c\|u_0\|_{X_s} + cR(t)^m + cR(t)^{m+s} . \tag{44}$$

Аналогічно виводиться подібна оцінка за нормою X_0. Для цього треба покласти в (42) $s=0$ і використати (38) при $p=1$ і $p=2$ (враховуємо, що $X_0 = Y_2$). Тоді дістанемо

$$t^{n/4}\|u(t)\|_{X_0} \le c\|u_0\|_{Y_1} + c\|u_0\|_{X_0} + cR(t)^m . \tag{45}$$

Із (11) маємо

$$\|u(t)\|_{X_s} \le \|W(t)u_0\|_{X_s} + \int\limits_0^t \|W(t-\tau)\tilde{Q}F(u(\tau))\|_{X_s}d\tau . \tag{46}$$

Звідси, використавши (34) при $s_0 = s$ і (37), одержимо

$$\|u(t)\|_{X_s} \le c\|u_0\|_{X_s} + cR(t)^m + cR(t)^{m+s} . \tag{47}$$

Покладемо $s=0$ в (46). Тоді за допомогою (34) при $s_0 = s = 0$ і (38) при $p=2$ маємо

$$\|u(t)\|_{X_0} \le c\|u_0\|_{X_0} + cR(t)^m . \tag{48}$$

Додавши нерівності (44), (45), (47), (48), отримаємо

$$R(t) \le c\|u_0\|_{Y_1} + c\|u_0\|_{X_s} + c\|u_0\|_{X_0} + cR(t)^m + cR(t)^{m+s}, \quad 0 \le t < T_s . \tag{49}$$

Розглянемо нерівність

$$0 < x < a_0 + \sum_{j=1}^{r} a_j x^{m_j}, \quad a_j, a_0 > 0, \quad m_j > 1, \quad 1 \le j \le r . \tag{50}$$

Лема 8. *Існує таке* $\delta > 0$, *що якщо* $a_0 < \delta$, *то розв'язки нерівності* (50) *утворюють інтервал* I_1, *який прилягає до* $x = 0$, *і півпряму* I_2, *відокремлені точкою* $x^* = a_0/(1-\mu)$, *де* $\mu = \max\{m_j^{-1} : 1 \le j \le r\}$. *Можна взяти, наприклад,*

$$\delta = (1-\mu)\left(1 + \sum_{j=1}^{r} a_j m_j\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} .$$

Застосуємо лему 8 до нерівності (49). Нехай $x = R(t)$,

$$a_0 = c\|u_0\|_{Y_1} + c\|u_0\|_{X_s} + c\|u_0\|_{X_0},$$

$m_1 = m$, $m_2 = m+s$, $r=2$, $a_j = c$, $j = 1, 2$, δ таке, як у лемі 8, і $a_0 < \delta$. Тоді $R(0) < x^*$, оскільки можна вважати, що $c \ge 1-\mu$. Отже, $R(0) \in I_1$ і тоді внаслідок неперервності $R(t)$ випливає, що $R(t) \in I_1$ для всіх $t \in [0, T_s)$. Таким чином,

$$R(t) < c\| u_0 \|_{Y_1} + c\| u_0 \|_{X_s} + c\| u_0 \|_{X_0}, \quad 0 \le t < T_s, \tag{51}$$

якщо $\| u_0 \|_{Y_1} + \| u_0 \|_{X_s} + \| u_0 \|_{X_0} < \nu$, де $\nu = \delta / c$. Із (51) випливає обмеженість $u(t)$ в $X_s \cap X_0$ на $[0, T_s)$, а це суперечить максимальності $[0, T_s)$, якщо $T_s < < +\infty$. Отже, $T_s = +\infty$ і оцінка (51) справджується для всіх $t \ge 0$. Теорему доведено.

Доведення наслідку. З доведення теореми 1 випливає, що в оцінках (12), (13) замість u_0 можна покласти g, якщо $u_0 = \tilde{Q} g$, і тоді оцінку спадання одержуємо інтерполяцією (12), (13). За допомогою леми 6 отримуємо

$$f_i(\theta, \operatorname{div} v_\pi, v'_\pi) \in L^1(\mathbb{R}_+; H^s), \qquad i = 1, 2.$$

Із (12) маємо $v'_\pi \in L^2(\mathbb{R}_+; H^s)$. Помножимо рівняння (5) скалярно в H^s на θ і проінтегруємо на $[0, t]$. Тоді, застосувавши нерівність Юнга з ε і лему Біхарі, одержимо оцінку для $\nabla \theta$ в $L^2(\mathbb{R}_+; H^s)$. Оскільки $X_s \cap X_0 \subset D(\mathcal{A})$ $(s \ge 2)$, то $\tilde{Q}F(u) \in C(\mathbb{R}_+; D(\mathcal{A}))$, $u_0 \in D(\mathcal{A})$, і тому з (11) випливає $u \in C^1(\mathbb{R}_+; X_0)$ (див., наприклад, [9 – 11]). Решта включень випливають безпосередньо з рівнянь (5) – (7). Додавши рівняння (6) і (7), отримаємо, що $v = v_\pi + v_\sigma$ задовольняє рівняння (2) і початкові умови (3). Єдиність розв'язку задачі 1 доводимо за допомогою енергетичної нерівності і леми Гронуолла.

***Зауваження* 1.** Для доведення теореми 1 можна застосувати метод послідовних наближень. Тоді можна обійтись без леми 7. Нехай

$$u_1(t) = W(t) u_0, \quad u_{k+1}(t) = W(t) u_0 + \int_0^t W(t-\tau) \tilde{Q} F(u_k(\tau))\, d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{52}$$

$$||| v ||| = \sup_{t \ge 0} B_s(v(t), t).$$

Повторивши аналогічно для (52) всі викладки при доведенні теореми 1 включно до (49), одержимо нерівність

$$||| u_{k+1} ||| \le c\| u_0 \|_{Y_1} + c\| u_0 \|_{X_s} + c\| u_0 \|_{X_0} + c ||| u_k |||^m + c ||| u_k |||^{m+s}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає $||| u_k ||| \le c$, якщо $\| u_0 \|_{Y_1} + \| u_0 \|_{X_s} + \| u_0 \|_{X_0} < \nu$ і ν є достатньо малим. Використовуючи (39), (40) при $t = 0$, отримуємо оцінку

$$\| u_{k+1}(t) - u_k(t) \|_{X_s \cap X_0} \le c (ct)^k / k!, \quad k \in \mathbb{N},$$

звідки $u_k \to u$ у $C([0, T]; X_s \cap X_0)$ для всіх $T < +\infty$.

***Зауваження* 2.** Більш точна інформація про матрицю $\Phi(\xi, t)$, ніж у лемі 1, дає можливість встановити $(L^p - L^q)$-оцінки для розв'язків задачі (14) $(n \ge 2)$:

$$\begin{aligned} &\|\theta(t)\|_{\dot{H}^{s,q}} + \|u_1(t)\|_{\dot{H}^{s,q}} + \|u_2(t)\|_{\dot{H}^{s-1,q}} \le \\ &\le c t^{-\kappa(p_1, q, s_1, s)} \left(\|\theta_0\|_{\dot{H}^{s_1-1, p_1}} + \|u_{10}\|_{\dot{H}^{s_1, p_1}} + \|u_{20}\|_{\dot{H}^{s_1-1, p_1}} \right) + \\ &+ c t^{-\kappa(p_2, q, s_2, s)} \exp(-ct) \left(\|\theta_0\|_{\dot{H}^{s_2, p_2}} + \|u_{10}\|_{\dot{H}^{s_2-1, p_2}} + \|u_{20}\|_{\dot{H}^{s_2-1, p_2}} \right) + \\ &+ c t^{-\beta} \exp(-ct) \left(\|\theta_0\|_{\dot{H}^{s+\sigma-1, p_3}} + \|u_{10}\|_{\dot{H}^{s+\sigma+1, p_3}} + \|u_{20}\|_{\dot{H}^{s+\sigma, p_3}} \right). \end{aligned}$$

Тут

$$\kappa(p,q,\rho,s) = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{s-\rho}{2}, \quad \beta = \max\left\{n\left(\frac{1}{p_3}-\frac{1}{q}\right)-1-\sigma,\ 0\right\},$$

$$-1<\sigma<(n-1)/2, \quad 2\le q<+\infty, \quad 1<p_k\le 2, \quad \kappa(p_k,q,s_k,s)\ge 0,$$

$s_k + n/p_k' > 1$, $k = 1, 2$ і p_3 можна вибрати таким, щоб точка $(1/p_3,\ 1/q)$ належала чотирикутнику з вершинами в точках

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{l}{n+1}, \frac{1}{2}-\frac{l}{n+1}\right), \quad P_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{l}{n-1}, \frac{1}{2}-\frac{l}{n-1}\right),$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad P_4 = \left(\frac{1}{2}+\frac{l}{n}, \frac{1}{2}\right), \quad l = 1+\sigma.$$

1. *Slemrod M.* Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional non-linear thermoelasticity // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1981. – **76**, № 2. – P. 97 – 133.
2. *Racke R.* Initial boundary value problems in thermoelasticity // Lect. Notes Math. – 1988. – **1357**. – P. 341 – 358.
3. *Racke R., Shibata Y., Zheng S.* Global solvability and exponential stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity // Quart. Appl. Math. – 1993. – **51**, № 4. – P. 751 – 763.
4. *Kawashima S., Okada M.* Smooth global solutions for the one-dimensional equations in magnetohydrodynamics // Proc. Jap. Acad. Ser. A Math. Sci. – 1982. – **53**. – P. 384 – 387.
5. *Zheng S., Shen W.* Global solutions to the Cauchy problem of quasilinear hyperbolic parabolic coupled systems // Sci. Sinica. Ser. A. – 1987. – **30**. – P. 1133 – 1149.
6. *Hrusa W. J., Tarabek M. A.* On smooth solutions of the Cauchy problem in one-dimensional nonlinear thermoelasticity // Quart. Appl. Math. – 1989. – **47**. – P. 631 – 644.
7. *Hoff D., Zumbrun K.* Multi-dimensional diffusion waves for the Navier – Stokes equations of compressible flow // Indiana Univ. Math. J. – 1995. – **44**, № 2. – P. 603 – 676.
8. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 415 с.
9. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 395 с.
10. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
11. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С. и др.* Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. – 352 с.
12. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.
13. *Бесов О. В., Ильин В.П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
14. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Выща шк., 1989. – 347 с.
15. *Reed M.* Abstract non-linear wave equations // Lect. Notes Math. – 1976. – **507**. – 128 p.
16. *Segal I.* Nonlinear semi-groups // Ann. Math. – 1963. – **78**. – P. 339 – 364.

Одержано 28.11.97,
після доопрацювання – 19.08.98