УДК 519.21

А. П. Юрачківський (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ СТОХАСТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ПОВ'ЯЗАНІ З НИМ МІРОЗНАЧНІ ПРОЦЕСИ

Functional limit theorem is proved for the measure of a region in which values of time-dependent random field do not exceed a given level. The theorem is illustrated by a geometric model.

Доведено функціональну граничну теорему для міри області, в якій значення залежного від часу випадкового поля не перевищують заданого рівня. Теорему проілюстровано на геометричній моделі.

У стохастичній геометрії значний інтерес становить задача покриття: знайти розподіл або середнє значення міри області, покритої з заданою кратністю об'єднанням випадкових множин (див., наприклад, [1 – 5]). У цій статті розглядається, слідом за [5, 6], таке її узагальнення: знайти розподіл міри області, в якій значення випадкового поля не перевищують заданого рівня (у задачі покриття цим полем є сума індикаторів множин). Шукається не точний вираз, доступний лише у виняткових випадках, а асимптотичний. Для застосовності запропонованого в [5, 6] підходу істотно, щоб поле залежало, окрім просторової, ще й від неперервної часової змінної. У задачах фізичного походження ця залежність, як правило, є в самій постановці [7 – 10]. У деяких інших задачах [2 – 4] як дискретний час можна використовувати кількість випадкових множин (яка в асимптотичній постановці є змінною, прямуючою до нескінченності), а перехід до неперервного часу здійснюється заміною верхньої межі n у сумі індикаторів на $[nt]$.

У роботі [6] для узагальнених процесів покривання було доведено функціональну граничну теорему типу закону великих чисел. Метою цієї статті є ілюстрація результату [6] на одній доволі загальній геометричній моделі.

Задані: вимірний простір $(X, \mathscr{X})$, σ-скінченна міра μ на ньому, σ-алгебра $\mathscr{H} \subset \mathscr{X}$, регулярна ймовірнісна умовна міра $\mu(\cdot \mid \mathscr{H})$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ випадкова функція $\alpha_n = \alpha_n(x, t)$ $(x \in X,\ t \in \mathbb{R}_+)$ на деякому стохастичному базисі (також залежному від n) така, що для μ-майже всіх x траєкторії $\alpha_n(x, \cdot)$ м. н. неперервні справа й мають границі зліва. Залежність від ω на письмі не позначається, аргумент x також здебільшого випускається. Позначення: $\xi_n(t, a) = \xi_n(x, t, a) = \mu\{\alpha_n(x, t) \le a \mid \mathscr{H}\}$; $\mathscr{G}$ — наділений метрикою Леві простір функцій розподілу ймовірності на $\mathbb{R}$. Досліджується асимптотична при $n \to \infty$ поведінка $\mathscr{G}$-значних випадкових процесів

$$\Xi_n(t) = \xi_n(t, \cdot) \tag{1}$$

(при $\mathscr{H} \ne \{\varnothing, X\}$, залежних від x як від параметра). Очевидно, для майже всіх x траєкторії Ξ_n м. н. належать просторові $\mathscr{D} = \mathrm{D}(\mathbb{R}_+ \to \mathscr{G})$. Інші позначення: $\Delta H(t) = H(t) - H(t-)$; $\xrightarrow{\mathrm{D}}$ — слабка збіжність у $\mathrm{D}(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m)$ (якщо граничний процес неперервний, то пишемо $\xrightarrow{C}$), $\xrightarrow{\mathscr{D}}$, $\xrightarrow{\mathscr{C}}$ — те саме в $\mathscr{D}$; $\xrightarrow{d}$ — слабка збіжність скінченновимірних розподілів;

$$\hat{\xi}_n(t, z) = \int e^{iza}\, \xi_n(t, da),$$

M — оператор усереднення за мірою $\mu(\cdot \mid \mathscr{H})$. Співвідношення з вільною змінною x розуміються як виконані майже скрізь.

У нових позначеннях

$$\xi_n(t, a) = \mathrm{M}\, I\{\alpha_n(t) \le a\}. \tag{2}$$

В основі нашого підходу лежить наступна теорема, доведена в [5, 6].

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{G}$-значні процеси Ξ_n задаються формулами* (1), (2), *послідовність (Ξ_n) відносно компактна в $\mathfrak{D}$ і виконані умови*

$$\forall\, l \in \mathbb{N}, \quad \forall\, z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{R} \quad \left(\hat{\xi}_n(\cdot, z_1), \ldots, \hat{\xi}_n(\cdot, z_l)\right) \xrightarrow{d}$$

$$\xrightarrow{d} (\kappa(\cdot, z_1), \ldots, \kappa(\cdot, z_l)),$$

$$\forall\, t \ \lim_{z \to 0} \mathrm{E}\, \kappa(t, z) = 1.$$

Тоді існує $\mathcal{G}$-значний випадковий процес $\Xi(t) = \xi(t, \cdot)$ такий, що $\hat{\xi}(t, z) = \kappa(t, z)$ і $\Xi_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} \Xi$.

Застосування теореми 1 до конкретних класів процессів полягає у встановленні, завдяки додатковим припущенням про α_n, явного вигляду κ. У [6] досліджено випадок, коли α_n — семімартингали локально обмеженої варіації; при цьому не робилося ніяких геометричних припущень щодо X. Перш ніж конкретизувати в геометричному напрямі основний результат [6], надамо йому зручнішої для використання форми (зокрема, дещо звузимо ситуацію, відкинувши неперервну компоненту). Розглядаємо стрибкуваті процеси виду

$$\alpha_n = f_n * \nu_n, \tag{3}$$

де ν_n — цілочисельна випадкова міра на якомусь вимірному просторі $(\Theta_n, \mathcal{E}_n)$, f_n — випадкова функція на $\mathbb{R}_+ \times \Theta_n$, обидві опційні й залежні, взагалі кажучи, від x. Зважаючи на останнє, під опційністю слід розуміти (пор. з означеннями II.1.4, II.1.6 [11]) $\mathcal{X} \otimes \mathbb{O}_n \otimes \mathcal{E}_n$-вимірність. У теоремі 2 використовуються такі позначення: $\varphi_n = \varphi_n(x, t, \theta, z) = e^{izf_n} - 1$ (аргументи x, z, як правило, випускатимуться), π_n — компенсатор ν_n; $\Pi_n = \varphi_n * \pi_n$ (у записі з аргументами $\Pi_n(t, z)$), $Q_n = \mathrm{M}\,\Pi_n$, $U_n^{(k)} = |\sin(zf_n)|^k * \pi_n$, $V_n^{(k)} = \mathrm{M}\, U_n^{(k)}$, $\overline{\nu}_n = \nu_n - \pi_n$, $\psi_n = \mathrm{M}\,\varphi_n * \overline{\nu}_n$.

Теорема 2. *Нехай для кожного $z \in \mathbb{R}$ і* (у (5)) *для всіх обмежених моментів зупинки $\sigma \le \tau$ та для будь-якого комплекснозначного обмеженого передбачуваного процесу γ виконані умови*:

(Pred) *процеси $U_n^{(k)}$ передбачувані*;

(RC) *послідовності*: 1) $(U_n^{(1)})$, 2) $(V_n^{(1)})$ *відносно компактні в* C;

$$\psi_n \in \overline{\mathcal{M}}, \tag{4}$$

$$\mathrm{E}\left(\int_\sigma^\tau \int_{\Theta_n} |\gamma(u)\, \varphi_n(u, \theta)|\, \overline{\nu}_n(du, d\theta)\right)^2 \le$$

$$\le \mathrm{E}\int_\sigma^\tau \int_{\Theta_n} |\gamma(u)\, \varphi_n(u, \theta)|^2\, \pi_n(du, d\theta), \tag{5}$$

$$\forall\, t \quad \sup_{s \le t} \mathrm{M}\, |\Delta(\varphi_n * \nu_n)(s)| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \tag{6}$$

$$\forall t \quad \sup_n \mathrm{E}\, V_n^{(2)}(t) < \infty, \tag{7}$$

$$\forall t \quad \Pi_n(t,z) - Q_n(t,z) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0. \tag{8}$$

Нехай також для будь-яких $l \in \mathbb{N},\ z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{R}$

$$(\Pi_n(\cdot, z_1), \ldots, \Pi_n(\cdot, z_l)) \xrightarrow{d} (Q(\cdot, z_1), \ldots, Q(\cdot, z_l)) \tag{9}$$

і при цьому

$$\forall t \quad \underset{z\to 0}{\mathrm{l.i.p.}}\, Q(t,z) = 0. \tag{10}$$

Тоді $\Xi_n \xrightarrow{\mathscr{C}} \Xi$, *де* $\Xi(t) = \xi(t,\cdot),\ \hat{\xi}(t,z) = e^{Q(t,z)}$.

Порівняно з [6] слід внести такі зміни в доведення.

Умова (RC) спільно з очевидними нерівностями

$$\left| U_n^{(2)}(t) - U_n^{(2)}(s) \right| \le \left| U_n^{(1)}(t) - U_n^{(1)}(s) \right|$$

і аналогічною нерівністю для V показує, що послідовності $(U_n^{(2)})$, $(V_n^{(2)})$ відносно компактні в C (що в [6] було умовою теореми).

Для встановлення відносної компактності в D послідовності (ψ_n) використовуємо умову (5), яка при $\gamma(u) = e^{iz\alpha_n(u-)}$ має своїм наслідком нерівність

$$\mathrm{E}\left| \psi_n(\tau) - \psi_n(\sigma) \right|^2 \le \mathrm{E}\left(V_n^{(2)}(\tau) - V_n^{(2)}(\sigma) \right),$$

а далі з урахуванням умови (Pred), яка, очевидно, забезпечує передбачуваність $V_n^{(k)}$, міркуємо, як і в [6].

Очевидна нерівність

$$\left| \Pi_n(t,z) - \Pi_n(s,z) \right| \le 2\left| U_n^{(1)}(t, z/2) - U_n^{(1)}(s, z/2) \right|$$

спільно з умовою (RC1) показує, що в (9) можна замінити $\xrightarrow{d}$ на $\xrightarrow{C}$, а тому виконуються умови зауваження 1 [6].

Позначимо $Y_n(t,z) = \left|\sin(zf_n)\right| * \nu_n$, $\overline{Y}_n = Y_n - U_n^{(1)}$ і встановимо відносну компактність у D послідовностей (Y_n), $(\mathrm{M}\, Y_n)$, що перекриває вимоги [6]. За побудовою $\overline{Y}_n = \left|\sin(zf_n)\right| * \nu_n$, звідки на підставі (5)

$$\mathrm{E}\left(\overline{Y}_n(\tau) - \overline{Y}_n(\sigma) \right)^2 \le \mathrm{E}\left(U_n^{(2)}(\tau) - U_n^{(2)}(\sigma) \right).$$

Тепер відносна компактність у D послідовності $(\overline{Y}_n)$ виводиться з (Pred) і (RC1) так само, як це зроблено в [6] для (ψ_n). Рівність $Y_n = \overline{Y}_n + U_n^{(1)}$ і (знову) умова (RC1) завершують доведення відносної компактності (Y_n). Для $(\mathrm{M}\, Y_n)$ міркування аналогічні.

Таким чином, справджуються всі умови теореми [6], звідки випливає бажаний висновок.

***Зауваження* 1.** Умови (4), (5), очевидно, виконані в двох випадках: 1) міра ν_n квазінеперервна; 2) функція f_n передбачувана. Але процес ψ_n (визначений за допомогою потраєкторного інтегрування) може бути мартингалом і без цих припущень.

***Зауваження* 2.** З огляду на (8) умову (9) можна, не змінюючи решти умов теореми, замінити на таку:

$$(Q_n(\cdot, z_1), \ldots, Q_n(\cdot, z_l)) \xrightarrow{d} (Q(\cdot, z_1), \ldots, Q(\cdot, z_l)). \tag{11}$$

Проілюструємо теорему 2 на геометричній моделі, описуваній наступними припущеннями:

A_1. $X = S^{d-1}$ — одинична сфера в $\mathbb{R}^d$; $\mathscr{X}$ — борелівська σ-алгебра на ній, $\mathscr{H} = \{\varnothing, X\}$; імовірнісна міра залежить від дійсного додатного параметра: $\mu = \mu_r$ $(r > 0)$.

Точки простору X позначатимуться не через x, як у теоремах 1, 2, а через q, тоді як позначення x стосуватиметься точок охоплюючого простору $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, зображуваних парами (r, q) або, якщо ототожнювати q з радіусом-вектором точки на сфері, добутками rq. Оскільки при фіксованому r відповідність між q та x взаємно однозначна, то нам не доведеться замінювати позначення x там, де воно раніше зустрічалося, на q.

A_2. $\Theta = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, $\mathscr{E} = \mathscr{B}(\Theta)$ (від n не залежать), ν_n не залежить від x,

$$\nu_n(t, d\theta) = \nu_n(t, dy \times db) = \int_0^t I\{\zeta_n(s) \in dy, \rho_n(s) \in db\} dN_n(s),$$

де ζ_n, ρ_n — узгоджені випадкові процеси зі значеннями в $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}_+$ відповідно, $N_n(t) = \nu_n(t, \Theta)$.

A_3. $\forall t \quad \mathrm{E}\, N_n^2(t) < \infty$.

A_4. Для будь-яких $y \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+$ та скінченного моменту зупинки τ

$$\mathrm{P}\{\zeta_n(\tau) \in dy, \rho_n(\tau) \le b, N_n(\tau) = k \mid \mathfrak{F}_n(\tau-)\} =$$
$$= \mathrm{P}\{N_n(\tau) = k \mid \mathfrak{F}_n(\tau-)\} R_n(\tau, b)\, h_n(\tau, y)\, dy.$$

Інакше кажучи, ζ_n, ρ_n, N_n у момент τ умовно незалежні в сукупності відносно передісторії, причому $\zeta_n(\tau)$ має умовну щільність розподілу (відтак не може бути $\mathfrak{F}_n(\tau-)$-вимірною).

A_5. $f_n(x, y, b) = F(n^{1/d}(x-y)/b)$ (від t не залежить), де F — функція з $L_1(\mathbb{R}^d, dy)$ така, що

$$\lim_{|y| \to \infty} F(y) = 0, \quad \|F\| = \sup |F(y)| < \infty.$$

Значенням виразу $(x-y)/b$ при $b = 0$ вважаємо ∞ і покладаємо $F(\infty) = 0$.

Ця модель узагальнює розглянуту в [4] і перетворюється на останню у випадку, коли F — індикаторна функція, $N_n(t) = [nt]$.

Введемо позначення: τ_{nk} — момент k-го стрибка процесу N_n; Λ_n — компенсатор N_n, або, рівносильно, $\Lambda_n(t) = \pi_n(t, \Theta)$ (коректність цих означень випливає з A_3), $a_{nk} = a_n(\tau_{nk})$ $(a = \zeta, \rho)$,

$$\eta_{nk}(x) = n^{1/d}(x - \zeta_{nk})/\rho_{nk}, \quad B_n^{(k)}(s) = \mathrm{E}\left[\rho_n^k(s) \mid \mathfrak{F}_n(s-)\right] \equiv \int_0^\infty b^k R_n(s, db),$$

$$D_n(t, \delta) = \operatorname*{ess\,sup}_{|y'-y''|<\delta} |h_n(t, y') - h_n(t, y'')|,$$

$$S_n(t) = S_n(x, t) = \frac{1}{n}\int_0^t h_n(s, x)\, B_n^{(d)}(s)\, d\Lambda_n(s),$$

$$\overline{S}_n(t) = \overline{S}_n(r,t) = \mathrm{M}\, S_n(t),$$

$$J_n^{(k)}(t) = \frac{1}{n}\int_0^t d\Lambda_n(s)\int_0^\infty b^d R_n(s,db)\int |F(y)|^k D\big(s, bn^{-1/d}y\big)\,dy,$$

$$G(y) = G(y,z) = e^{izF(y)} - 1.$$

Теорема 3. *Нехай виконані умови* $A_1 - A_5$ *і для будь-якого* $t > 0$

$$n^{-1/d}\max_{k\le N_n(t)} \rho_{nk} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \tag{12}$$

$$J_n^{(k)}(t) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad k = 1, 2, \tag{13}$$

$$\sup_n \mathrm{E}\, J_n^{(1)}(t) < \infty. \tag{14}$$

Тоді на множині W *тих* $r > 0$, *для яких виконані співвідношення*

$$\overline{S}_n(r,\cdot) \xrightarrow{C} S(r,\cdot), \tag{15}$$

$$\forall t \;\; S_n(rq,t) - \overline{S}_n(r,t) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \quad \mu_r\text{-м. с.}, \tag{16}$$

$$\forall t \;\; \sup_n \mathrm{E}\,\overline{S}_n(r,t) < \infty, \tag{17}$$

та умова (AC): *міра* μ_r *абсолютно неперервна відносно міри Лебега на сфері,*

справджується висновок теореми 2, *в якому*

$$Q(r,t,z) = S(r,t)\int G(y,z)\,dy. \tag{18}$$

Інакше кажучи, $\forall\, r \in W \;\; \Xi_n(rq) \xrightarrow{\mathscr{C}} \Xi(r)$ μ_r-м. с., де $\Xi(r,t) = \xi(r,t,\cdot)$, $\hat{\xi}(r,t,z) = \exp\left\{S(r,t)\int G(y,z)\,dy\right\}$ і r відіграє роль параметра. (Неперервність процесу $\Xi(r)$, яка виправдовує вживання символу $\xrightarrow{\mathscr{C}}$, випливає з (15)).

Доведення. Покажемо, що для $r \in W$ виконані умови теореми 2 з $\mu = \mu_r$, $\mathscr{H} = \{\varnothing, X\}$ (випадок повного усереднення).

З припущення A_5 випливають збіжність інтеграла у (18) і співвідношення (10).

Припущення $A_2 - A_4$ зумовлюють (4) і рівність

$$\pi_n(ds,\, dy\times db) = R_n(s,db)\,h_n(s,y)\,dy\,d\Lambda_n(s),$$

тож

$$\Pi_n(t) = \int_0^t \mathrm{E}\left[\varphi_n(\zeta_n(s),\rho_n(s))\,|\,\mathfrak{F}_n(s-)\right]d\Lambda_n(s), \tag{19}$$

зокрема процес Π_n передбачуваний. Аналогічні міркування, застосовані до $|\varphi_n|^k$, показують, що виконана умова (Pred).

За умовою A_5 $\varphi_n(\theta) = \varphi_n(y,b) = G\big(n^{1/d}(x-y)/b\big)$. Тоді з огляду на умову A_4

$$\mathrm{E}\left[\varphi_n(\zeta_n(s),\rho_n(s))\,|\,\mathfrak{F}_n(s-)\right] =$$

$$= \int_0^\infty R_n(s,db)\int G\big(n^{1/d}(x-y)/b\big)\,h_n(s,y)\,dy =$$

$$= n^{-1} h_n(s, x) B_n^{(d)}(s) \int G(y) dy +$$

$$+ \frac{1}{n} \int_0^\infty b^d R_n(s, db) \int \big(h_n(s, x - bn^{-1/d} y) - h_n(s, x)\big) G(y) dy$$

(друга рівність отримана заміною змінної $y' = n^{1/d}(x-y)/b$). Звідси з урахуванням (19), (18) одержуємо

$$\left| \Pi_n(t) - S_n(t) \int G(y) dy \right| \le J_n^{(1)}(t). \tag{20}$$

Це спільно з (13), (15), (16) показує, що справджуються співвідношення (8), (11), у яких Q має вигляд (18).

Перевіримо виконання умови (5). Введемо позначення: $N_n'(t)$ — сума стрибків процесу N_n на $]0, t]$ в непередбачувані моменти; ν_n' — випадкова міра, побудована за N_n' так само, як ν_n за N_n; π_n' — компенсатор ν_n'. Зважаючи на умову A_3, маємо $\mathrm{E}\, N_n'^2(t) < \infty$, $\overline{\nu}_n = \nu_n' - \pi_n'$ (без умови A_3 можлива ситуація, коли для якихось t, A $\nu_n'(t, A)$ скінченна, а $\nu_n(t, A)$ ні). За побудовою міра ν_n' квазінеперервна. Тоді за властивістю II.1.31 [11] стохастичного інтеграла ліва частина (5) дорівнює

$$\mathrm{E} \int_\sigma^\tau \int_\Theta |\gamma(u) \varphi_n(\theta)|^2 \pi_n'(du, d\theta),$$

а це за побудовою π_n' не перевищує правої частини (5).

Перевіримо (RC1), (RC2). Зважаючи на (15), (16),

$$S_n \xrightarrow{d} S \quad \mu_r\text{-м. с.}, \tag{21}$$

причому S_n за побудовою монотонні, а S за умовою (15) неперервна. Так само за побудовою монотонні $J_n^{(k)}$. Наведене нижче узагальнення леми Макліша [12] дозволяє підсилити (13), (21) до

$$(S_n, J_n^{(k)}) \xrightarrow{C} (S, 0) \quad \mu_r\text{-м. с.}, \quad k = 1, 2. \tag{22}$$

За умов $A_2 - A_4$

$$U_n^{(k)}(t, z/2) = \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{E}\left[|\varphi_n(\zeta_n(s), \rho_n(s))|^k \,|\, \mathfrak{F}_n(s-) \right] d\Lambda_n(s). \tag{23}$$

Перетворюючи цей вираз, як вище при перевірці (9), переконуємося, що

$$\left| U_n^{(1)}(t, z/2) - U_n^{(1)}(s, z/2) \right| \le$$

$$\le |z| \Big(|S_n(t) - S_n(s)| \int |F(y)| dy + \left| J_n^{(1)}(t) - J_n^{(1)}(s) \right| \Big).$$

Тепер (RC1) випливає з (22). Аналогічно перевіряється (RC2).

Встановимо відносну компактність у просторі $\mathcal{D}$ послідовності (Ξ_n). Введемо позначення: L — метрика Леві в $\mathcal{G}$;

$$H_n = \mathrm{M} |f_n| * \nu_n, \quad \tilde{H}_n = \mathrm{M} |f_n| * \pi_n,$$
$$\kappa_n = H_n - \tilde{H}_n. \tag{24}$$

Внаслідок умов $A_2 - A_4$ κ_n — квадратично інтегровний мартингал. З (2) випливає співвідношення (див. [5, 6])

$$\hat{\xi}_n(t, z) = \mathrm{M} e^{iz\alpha_n(t)},$$

яке спільно з (3) зумовлює нерівність

$$\left|\hat{\xi}_n(t, z) - \hat{\xi}_n(s, z)\right| \le |z|\big(H_n(t) - H_n(s)\big), \quad s < t.$$

З неї і з нерівності Золотарьова [13, с. 159] при $T > e$ дістаємо

$$L(\Xi_n(t), \Xi_n(s)) \le T|H_n(t) - H_n(s)| + 2eT^{-1}\ln T.$$

Задача звелась до встановлення відносної компактності в D послідовності (H_n).

Повторюючи виведення нерівності (20), одержуємо оцінку

$$\left|\tilde{H}_n(t) - \tilde{H}_n(s)\right| \le \int |F(y)|dy\left|\overline{S}_n(t) - \overline{S}_n(s)\right| + \left|J_n^{(1)}(t) - J_n^{(1)}(s)\right|,$$

яка спільно з (15), (22) показує, що послідовність $(\tilde{H}_n)$ відносно компактна в C. Аналогічно

$$|\langle\kappa_n\rangle(t) - \langle\kappa_n\rangle(s)| \le \int F^2(y)dy\left|\overline{S}_n(t) - \overline{S}_n(s)\right| + \left|J_n^{(2)}(t) - J_n^{(2)}(s)\right|,$$

причому за припущенням A_5

$$\int F^2(y)dy \le \|F\| \int |F(y)|dy < \infty.$$

Звідси на підставі (15), (22) випливає відносна компактність послідовності $(\langle\kappa_n\rangle)$ у C і, за теоремою Ребольєдо VI.4.13 [11], (κ_n) у D. Тоді з огляду на (24) відносно компактною в D буде й послідовність (H_n).

Перевіримо виконання умови (6). Зважаючи на очевидну нерівність $|\varphi_n| \le$ $\le |z||f_n|$ та умови A_4, A_5, достатньо встановити співвідношення

$$\mathrm{E} \max_{k \le N_n(t)} \mathrm{M}|F(\eta_{nk}(rq))| \to 0. \tag{25}$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо на підставі умови A_5 число C таке, що

$$\sup_{|y|>C} |F(y)| \le \varepsilon/2.$$

Міра Лебега множини $S(y, \delta) = \{q : |rq - y| < \delta\}$ при $\delta \to 0$ прямує до нуля рівномірно по $y \in \mathbb{R}^d$. Справді, $S(y, \delta)$ — це та частина сфери фіксованого радіуса r, яка міститься в кулі нескінченно малого радіуса δ з центром y. За умовою (AC) існує $a > 0$ таке, що

$$\forall y \ \mathrm{M}\, I_{S(y, a, C)} \le \varepsilon/2\|F\|. \tag{26}$$

Тоді

$$\mathrm{M}|F(\eta_{nk})| \le \mathrm{M}|F(\eta_{nk})|\big(I\{|\eta_{nk}| > C\} +$$
$$+ I\left\{|\eta_{nk}| \le C,\ \rho_{nk} \le an^{1/d}\right\} + I\left\{\rho_{nk} > an^{1/d}\right\}\big) \le$$
$$\le \varepsilon/2 + \|F\|\left(\mathrm{M}\, I_{S(\zeta_{nk}, a, C)} + I\left\{n^{-1/d}\rho_{nk} > a\right\}\right),$$

звідки на підставі (26)

$$\mathrm{E} \max_{k \le N_n(t)} \mathrm{M}|F(\eta_{nk})| \le \varepsilon + \mathrm{P}\left\{n^{1/d} \max_{k \le N_n(t)} \rho_{nk} > a\right\}.$$

Тепер (25) випливає з (12) і довільності ε.

З виразу (23) та нерівностей $|G|^2 \le |G| \le |z||F|$ видно, що

$$\mathrm{E}\, V_n^{(2)}(t, z/2) \le |z|\left(\int |F(y)|\, dy\, \mathrm{E}\, \overline{S}_n(t) + \mathrm{E}\, J_n^{(1)}(t)\right),$$

відтак, з огляду на умови A_5, (14), (17), виконана умова (7). Теорему доведено.

Узагальнення леми Макліша, про яке йшлося вище, звучить так.

Лема 1. *Нехай* Y_n — *зростаючі процеси,* $Y_n \xrightarrow{d} Y$ *і процес* Y *має неперервну модифікацію. Тоді* $Y_n \xrightarrow{C} Y$.

Якщо Y_n невипадкові (тоді $\xrightarrow{d}$ означає поточкову, $\xrightarrow{C}$ — рівномірну на сегментах збіжність), то твердження очевидне. Загальний випадок зводиться до цього методом спільного ймовірнісного простору [14].

Наведемо дещо слабшу, але простішу для перевірки форму умови (12).

Лема 2. *Нехай для будь-яких* $t, a, b > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ *і скінченного моменту зупинки* τ

$$\mathrm{E}\, N_n(t) \le \infty, \tag{27}$$

$$\mathrm{P}\{\rho_n(\tau) \le b,\ N_n(\tau) = k \,|\, \mathfrak{F}_n(\tau-)\} = R_n(\tau, b)\, \mathrm{P}\{N_n(\tau) = k \,|\, \mathfrak{F}_n(\tau-)\}, \tag{28}$$

$$\int_0^t \left(1 - R_n(s, an^{1/d})\right) d\Lambda_n(s) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0. \tag{29}$$

Тоді виконана умова (12).

Доведення. Позначимо

$$Z_n(t) = \int_0^t I\left\{\rho_n(s) > an^{1/d}\right\} d\Lambda_n(s).$$

Маємо

$$I\left\{\max_{k \le N_n(t)} \rho_{nk} > an^{1/d}\right\} = \max_{k \le N_n(t)} I\left\{\rho_{nk} > an^{1/d}\right\} \le$$

$$\le \sum_{k \le N_n(t)} I\left\{\rho_{nk} > an^{1/d}\right\} = Z_n(t). \tag{30}$$

За умови (27) Z_n — субмартингал. Внаслідок (28) його компенсатор $\tilde{Z}_n(t)$ дорівнює лівій частині (29). Згідно з нерівністю Ленгляра I.3.31 [11]

$$\forall\, \varepsilon, \delta > 0 \quad \mathrm{P}\{Z_n(t) > \varepsilon\} \le \frac{\delta}{\varepsilon} + \mathrm{P}\left\{\tilde{Z}_n(t) > \delta\right\}.$$

Тепер (12) випливає з (29), (30) і довільності δ.

Для геометричних застосувань зручно так змодифікувати теорему 3, щоб простір $\mathbb{R}^d$ був первинним об'єктом, а не вводився шляхом додаткових побудов. З цією метою замінимо припущення A_1 такими двома:

A_6. $X = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{X} = \mathscr{B}^d$, міра μ σ-скінченна й неатомічна в нулі; $\mathscr{X}$ ізоморфна σ-алгебрі $\mathscr{B}_+$ борелівських множин на $\mathbb{R}_+$.

Коректність задання $\mathscr{H}$ випливає з того, що за умови $\mu\{0\} = 0$ вимірний простір $(X, \mathscr{X})$, профакторизований за μ-еквівалентністю, ізоморфний просторові $(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1}, \mathscr{B}_+ \otimes \mathscr{B}(S^{d-1}))$, профакторизованому за $\tilde{\mu}$-еквівалентністю, де $\tilde{\mu}$ — образ міри μ при відображенні $x \mapsto (|x|, x/|x|)$. (Звісно, в умові A_6 $\mathscr{B}_+$ теж профакторизована.)

Проекцію міри μ на $\mathscr{H}$ позначаємо μ'. Під μ_r розуміємо регулярну умовну міру $\mu(\cdot|\mathscr{H})$ при фіксованому r. Інакше кажучи, для будь-яких $B_1 \in \mathscr{B}_+$, $B_2 \in \mathscr{B}(S^{d-1})$

$$\mu(B_1 \times B_2) = \int_{B_1} \mu_r(B_2)\, \mu'(dr).$$

A_7. Для μ'-майже всіх r міра μ_r імовірнісна.

Об'єднуючи твердження теореми 3 для різних r, одержуємо з урахуванням леми 2 такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай виконані умови* $\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_7$, (13), (14), (29) *і* μ'*-м. с. — умови* (15) – (17), (AC). *Тоді справджується висновок теореми* 2 *з* Q *вигляду* (18).

Основною в теоремі 3 та наслідку 1 є умова (16) усереднення по q. У наступних двох наслідках вона конкретизується.

Позначимо $K_n = n^{-1} B_n^{(d)} \circ \Lambda_n$, $\Gamma_n = n^{-1-1/d} B_n^{(d+1)} \circ \Lambda_n$ (символ $\circ$ означає інтегрування за Стільтьєсом).

***Наслідок* 2.** *Нехай виконані умови* (AC) (μ'*-м. с.*), $\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_7$,

$$\int |y||F(y)|\, dy < \infty, \tag{31}$$

$$K_n \xrightarrow{C} K, \tag{32}$$

$$\forall t \quad \Gamma_n(t) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \tag{33}$$

$$\forall t \quad \sup_n \mathrm{E}\left(K_n(t) + \Gamma_n(t)\right) < \infty, \tag{34}$$

$$h_n(s, rq) = g(r), \tag{35}$$

де g *— невипадкова ліпшицова функція. Тоді справджується висновок наслідку* 1 *з*

$$S(r, t) = g(r)\, K(t). \tag{36}$$

Доведення. За умови (35)

$$\begin{gathered} S_n(rq, t) = \overline{S}_n(r, t) = g(r)\, K_n(t), \quad D_n(t, \delta) \le L\delta, \\ J_n^{(k)}(t) \le \Gamma_n(t) \int |y||F(y)|^k\, dy, \end{gathered} \tag{37}$$

тож маємо імплікації:

$$(32) \Rightarrow (15)\ \&\ (36); \qquad \mathrm{A}_5\ \&\ (31)\ \&\ (33) \Rightarrow (13); \qquad (31)\ \&\ (34) \Rightarrow (14)\ \&\ (17).$$

З нерівності Чебишова і (33) випливає (29).

Щоб сформулювати ще один наслідок, доповнимо опис моделі такими припущеннями:

A_8. $h_n(t, x) = h(U^{nt} x)$, де h — невипадкова ліпшицова щільність розподілу в $\mathbb{R}^d$, $U^t x = r T^t q$, $(T^t, t \in \mathbb{R}_+)$ — ергодичний відносно μ'-майже всіх μ_r напівпотік ендоморфізмів сфери.

A_9. $\Lambda_n(t) = n\int_0^t \lambda_n(s)\,ds$.

A_{10}. Випадковий процес $\beta_n = B^{(d)}\lambda_n$ м. н. має на кожному сегменті $[a, b]$ $(a > 0)$ скінченну варіацію $\operatorname*{Var}_{[a,b]} \beta_n$.

***Зауваження* 3.** Нехай σ — міра Лебега на S^{d-1}. Тоді складовою частиною припущення A_8 є співвідношення

$$\int_0^\infty r^{d-1}dr \int_{S^{d-1}} h(rT^t q)\,\sigma(dq) = 1,$$

необхідне для того, щоб h_n була щільністю.

***Наслідок* 3.** *Нехай виконані умови* (AC) (μ'-*м. с.*), $A_2 - A_{10}$, (31) – (34),

$$\forall\, a > 0 \quad \forall\, t > a \quad \lim_{C\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathrm{P}\left\{ \operatorname*{Var}_{[a,t]} \beta_n > C \right\} = 0. \tag{38}$$

Тоді справджується висновок наслідку 1, *в якому*

$$S(r,t) = \overline{h}(r)\,K(t),$$

$$\overline{h}(r) = \mathrm{M}\,h(r,q) \equiv \int_{S^{d-1}} \overline{h}(rq)\,\mu_r(dq).$$

Доведення. Очевидно, нерівність (37) зберігається. За умовами A_8, A_9

$$S_n(t) = \int_0^t h(U^{ns}x)\,\beta_n(s)\,ds, \tag{39}$$

$$\overline{S}_n(t) = \overline{h}\int_0^t \beta_n(s)\,ds \equiv \overline{h}\,K_n(t).$$

Тому потрібно тільки перевірити (17).

Позначимо $H(t) = \int_0^t h(U^s x)\,ds$. Розбиваючи інтеграл у (39) на інтеграли по відрізках $]0, a]$, $]a, t]$ та інтегруючи другий доданок частинами, одержуємо

$$S_n(t) = \int_0^a h(U^{ns}x)\,\beta_n(s)\,ds + \beta_n(t)\,H(nt)/n -$$

$$- \beta_n(a)\,H(na)/n - \frac{1}{n}\int_a^t H(ns)\,d\beta_n(s). \tag{40}$$

Аналогічно

$$\overline{S}_n(t) = \overline{h}\left(\int_0^a \beta_n(s)\,ds + t\beta_n(t) - a\beta_n(a) - \int_a^t s\,d\beta_n(s)\right).$$

Очевидно також, що ліпшицова щільність обмежена, тож перший з інтегралів у співвідношенні (40) не перевищує $LK_n(a)$ з деякою константою L. Тоді

$$\left|S_n(t) - \overline{S}_n(t)\right| \le \left|L - \overline{h}\right| K_n(a) + \left|H(nt)/n - \overline{h}t\right| \beta_n(t) +$$

$$+ \left|H(na)/n - \overline{h}a\right| \beta_n(a) + \sup_{a\le s\le t} \left|H(ns)/n - \overline{h}s\right| \operatorname*{Var}_{[a,t]} \beta_n(t).$$

Тепер (17) випливає з (32), умови A_8, (38).

Приклад. Нехай $\mu_r = \sigma$; $N_n(t) = N(nt)$, N — процес відновлювання з інтенсивністю λ; $\rho_n(s)$, $\zeta_n(s)$ не залежать від $\mathfrak{F}_n(s-)$; $B^{(d)}$, $B^{(d+1)}$ не залежать від n, s; h_n має вигляд (35);

$$F = cI_A, \quad c \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathcal{B}^d, \quad m(A) < \infty, \tag{41}$$

де m — міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Тоді за наслідком 2 $\Xi_n \xrightarrow{\mathscr{C}} \Xi$ m-м. с., де $\hat{\xi}(t, z) = \exp\left\{\gamma t(e^{icz} - 1)\right\}$, $\gamma = \lambda g(r) m(A)$. У цьому випадку ξ можна записати і в явному вигляді

$$\xi(t, a) = e^{\gamma t} \sum_{k \in Z_+ :\, ck \le a} \frac{(\gamma t)^k}{k!}. \tag{42}$$

Якщо ж F — скінченна сума функцій виду (41), то ξ буде згорткою за аргументом a функцій розподілу виду (42).

1. *Hall P.* Introduction to the theory of coverage processes. – New York: Wiley, 1988. – 408 p.
2. *Юрачківський А. П.* Закон великих чисел для міри області, покритої потоком випадкових множин // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1996. – Вип. 55. – С. 173 – 177.
3. *Юрачківський А. П.* Граничні теореми для мір перерізів випадкових множин // Там же. – 1997. – Вип. 56. – С. 177 – 182.
4. *Юрачківський А. П.* Явища усереднення для об'єднань випадкових множин // Допов. НАН України. – 1997. – № 6. – С. 45 – 49.
5. *Yurachkivsky A. P.* Functional limit theorems for coverage processes // Theory Stochast. Processes. – 1997. – **3** (**19**), № 3-4. – P. 475 – 484.
6. *Юрачківський А. П.* Функціональна гранична теорема типу закону великих чисел для випадкових рельєфів // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 542 – 552.
7. *Колмогоров А. Н.* К статистической теории кристаллизации металлов // Изв. АН СССР. – 1937. – № 3. – С. 355 – 359.
8. *Johnson W. A., Mehl R. F.* Reaction kinetics in processes of nucleation and growth // Trans. Amer. Inst. Mining and Met. Eng. Iron and Steel. – 1939. – **135**. – P. 416 – 458.
9. *Беленький В. З.* Геометрико-вероятностные модели кристаллизации. – М.: Наука, 1980. – 84 с.
10. *Yurachkivsky A. P., Shapovalov G. G.* On the kinetics of amorphization under ion implantation // Proc. NATO ASI "Frontiers in Nanoscale Sciences of Micron/Submicron Devices" / Eds A.-P. Jauho, E. V. Buzaneva. – North Holland: Kluwer, 1996. – P. 413 – 416.
11. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. – М.: Физматлит, 1994. – Т. 1. – 544 с.
12. *McLeish D. L.* An extended martingale principle // Ann. Probab. – 1978. – **6**. – P. 144 – 150.
13. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 412 с.
14. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1956. – **1**, № 3 – С. 289 – 319.

Одержано 10.02.98,
після доопрацювання — 23.11.98