УДК 517. 95

**М. О. Бас** (Львів. сільськогосп. ін-т),
**С. П. Лавренюк** (Львів. ун-т)

# ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ТИПУ СОБОЛЄВА – ГАЛЬПЕРНА

Conditions for uniqueness of solution of the problem without boundary-value condition in a cylindrical domain is obtained for a system of equations which is not solved with respect to the time derivative. This system, in particular, contains parabolic equations.

Одержано умови єдиності розв'язку задачі без початкової умови в нециліндричній області для системи рівнянь, не розв'язаної відносно похідної за часом. Ця система містить, зокрема, псевдопараболічні рівняння.

Нехай $\mathfrak{F}=(-\infty,T)$, $T<+\infty$, $\Omega_t$ — обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ для кожного $t\in\mathfrak{F}$, $Q_T=\bigcup_{t\in\mathfrak{F}}\Omega_t$, $S_T=\bigcup_{t\in\mathfrak{F}}\partial\Omega_t$. Розглянемо в області $Q_T$ систему рівнянь

$$u_t+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u)+$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t)=F(x,t) \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u=0 \ \text{ на } \ S_T, \quad |\alpha|\le m-1, \tag{2}$$

де $u=(u_1,\dots,u_N)$, $F=(f_1,\dots,f_N)$, $A_{\alpha\beta}(x,t)$ $(|\alpha|=|\beta|\le m)$, $B_{\kappa\gamma}(x,t)$ $(|\kappa|=|\gamma|\le l)$ — квадратні матриці розміру $N\times N$;

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad |\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n,\quad l\ge 1,\quad m\ge 1,\quad l\le m.$$

Метою даної роботи є встановлення класу єдиності розв'язку задачі (1), (2), тобто швидкості зростання розв'язку цієї задачі при $t\to-\infty$, яка б забезпечувала його єдиність. Зауважимо, що задачі Фур'є (задачі без початкових умов) вивчалися в основному для параболічних рівнянь і систем [1–5] та деяких еволюційних (у тому числі гіперболічних) рівнянь з другою похідною за часом [6, 7]. Система (1) в літературі носить назву системи Соболєва – Гальперна [8, 9]. Вона, зокрема, містить псевдопараболічні рівняння. Будемо говорити, що коефіцієнти ситеми (1) задовольняють відносно умови $(A_0)$, $(B_0)$, $(B_1)$, якщо:

$$(A_0):\qquad a_m^0(t)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha v|^2dx\le$$

$$\le\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v,D^\alpha v)\,dx\le a_m^1(t)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha v|^2dx,$$

$t\in\mathfrak{F}$, для довільної $v\in(\mathring{H}^m(\Omega_t))^N$; $a_m^0, a_m^1\in L^\infty_{\rm loc}(\overline{\mathfrak{F}})$;

$$(B_0): \qquad b_l^0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2 dx \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta v, D^\alpha v)\, dx \le$$

$$\le b_l^1(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2 dx, \quad t \in \mathfrak{F},$$

для довільної $v \in (\mathring{H}^l(\Omega_t))^N$; $b_l^0, b_l^1 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathfrak{F}})$;

$$(B_1): \qquad \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (B_{\alpha\beta t}(x,t) D^\beta v, D^\alpha v)\, dx \le$$

$$\le b_{l,1}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2 dx, \quad t \in \mathfrak{F},$$

для довільної $v \in (\mathring{H}^l(\Omega_t))^N$; $b_{l,1} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathfrak{F}})$;

$$B_{\alpha\beta}(x,t) = B_{\beta\alpha}(x,t), \quad B_{\alpha\beta}(x,t) = B^*_{\alpha\beta}(x,t),$$
$$|\alpha| = |\beta| \le l, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Нехай $W_l^m(Q_{t_1,t_2})$ — замикання простору нескінченно-диференційовних вектор-функцій $u = (u_1, \ldots, u_N)$ в $\overline{Q}_{t_1,t_2}$, рівних нулю в околі $S_{t_1,t_2}$, за нормою

$$\|u\|_{W_l^m(Q_{t_1,t_2})} = \left( \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left( \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \right) dx\, dt \right)^{1/2},$$

де

$$Q_{t_1,t_2} = \bigcup_{t\in(t_1,t_2)} \Omega_t, \quad S_{t_1,t_2} = \bigcup_{t\in(t_1,t_2)} \partial\Omega_t.$$

Нехай далі $W_l^m(Q_T)$ — простір вектор-функцій $u(x,t)$ таких, що $u \in W_l^m(Q_{t_1,T})$ для довільного $t_1 \in \mathfrak{F}$.

***Означення.*** *Функцію* $u(x,t) \in W_l^m(Q_T)$ *будемо називати узагальненим розв'язком задачі* (1), (2), *якщо вона задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_T} [(u_t, v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u, D^\alpha v) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t, D^\alpha v) - (F(x,t), v)]\, dx dt = 0 \qquad (3)$$

*для довільної вектор-функції* $v = (v_1, \ldots, v_N) \in (C_0^\infty(Q_T))^N$.

Як відомо [10], для функцій $w \in \mathring{H}^m(\Omega_t)$ справедлива нерівність Фрідріхса

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=j} (D^\alpha w)^2 dx \le \gamma_{k,j}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha w)^2 dx, \quad j < k, \qquad (4)$$

де $\gamma_{k,j}(t)$ залежить від $\Omega_t$, $k$, $j$. Зокрема, якщо $\Omega_t$ — паралелепіпед з найменшим ребром $d_0(t)$, то

$$\gamma_{k,j}(t) = \frac{(d_0(t))^{2(k-j)}}{\pi^{2(k-j)}}.$$

Введемо функції

$$\rho_0(t) = \frac{2a_m^0(t)}{\gamma_{m,l}(t)} - b_{l,1}(t) - \delta\gamma_{l,0}(t);$$

$$\rho_1(t) = \gamma_{m,l}(t) + b_l^1(t);$$

$$f_0(t) = \int\limits_{\Omega_{t,T}} |F(x,\tau)|^2 dx\,d\tau.$$

**Лема.** *Нехай для коефіцієнтів системи* (1) *виконуються умови* $(A_0)$, $(B_0)$, $(B_1)$;

$$A_{\alpha\beta}, B_{\kappa\gamma}, B_{\kappa\gamma t} \in L^\infty_{\text{loc}}(\overline{Q}_T), \quad |\alpha| = |\beta| \le m, \quad |\kappa| = |\gamma| \le l;$$

$$\rho_0,\ \rho_1,\ f_0 \in L^\infty_{\text{loc}}(\overline{\mathfrak{F}}), \quad \rho_0/\rho_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathfrak{F}), \quad \rho_1(t) \ge 0,\ t \in \mathfrak{F}; \quad \rho_0(t) > 0,\ t \in \mathfrak{F},$$

*для деякого* $\delta > 0$; $b_l^0(T) \ge 0$. *Тоді для узагальненого розв'язку* $u(x,t)$ *задачі* (1), (2) *справедлива оцінка*

$$\int\limits_{\Omega_{t_1,T}} \rho_0(\tau) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx\,d\tau \le \Bigg[ \rho_1(t_1) \int\limits_{\Omega_{t_1}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx + $$
$$+ \frac{f_0(t_1)}{\delta} + \frac{1}{\delta} \int\limits_{t_1}^{t} \frac{\rho_0(\theta) f_0(\theta)}{\rho_1(\theta)} \exp\left( -\int\limits_0^{t_1} \frac{\rho_0(\tau)\,d\tau}{\rho_1(\tau)} \right) d\theta \Bigg] \exp\left( \int\limits_t^{t_1} \frac{\rho_0(\theta)\,d\theta}{\rho_1(\theta)} \right) \tag{5}$$

*для довільних* $t_1$, $t$ $(t_1 < t)$.

***Доведення.*** Нехай $u(x,t)$ — узагальнений розв'язок задачі (1), (2). Візьмемо довільне $\tau < T$. Тоді для довільних функцій $v \in (C_0^\infty(Q_{\tau,T}))^N$ справедлива рівність

$$\int\limits_{Q_{\tau,T}} \Bigg[ (u_t, v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u, D^\alpha v) + $$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t, D^\alpha v) - (F(x,t), v) \Bigg] dx\,dt = 0. \tag{6}$$

Якщо ввести замикання множини $(C_0^\infty(Q_{\tau,T}))^N$ за нормою

$$\|v\| = \left( \int\limits_{Q_{\tau,T}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2 dx\,dt \right)^{1/2}, \tag{7}$$

то рівність (6) збережеться і для всіх $v(x,t)$ зі скінченною нормою (7). Тому в рівності (6) можна взяти $v = u$. Тоді, враховуючи умови леми 1 і нерівності (4), маємо

$$\mathfrak{F}_1 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} (u_t, u)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} |u|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u|^2 dx,$$

$$\mathfrak{F}_2 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u)\,dx\,dt \ge \int\limits_{Q_{\tau,T}} \frac{a_m^0(t)}{\gamma_{m,l}(t)} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx\,dt,$$

$$\mathfrak{F}_3 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t, D^\alpha u)\,dx\,dt \ge$$

$$\ge \frac{b_l^0(T)}{2}\int\limits_{\Omega_T} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx - \frac{b_l^1(\tau)}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}} b_{l,1}(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx\,dt,$$

$$\mathfrak{F}_4 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} (F(x,t), u)\,dx\,dt \le \frac{1}{2\delta} f_0(t) + \frac{\delta}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}} \gamma_{l,0}(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx\,dt.$$

На основі оцінок інтегралів $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_4$ з рівності (6) маємо нерівність

$$\int\limits_{Q_{\tau,T}} \rho_0(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx\,dt \le \rho_1(\tau) \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx + \frac{f_0(t)}{\delta}. \tag{8}$$

Позначимо .

$$y(\tau) = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \rho_0(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx\,dt.$$

Тоді (8) набуває вигляду

$$y'(\tau) + \frac{\rho_0(\tau)}{\rho_1(\tau)} y(\tau) \le \frac{\rho_0(\tau) f_0(\tau)}{\delta \rho_1(\tau)}. \tag{9}$$

Інтегруючи нерівність (9) в межах від $t_1$ до $t$, одержуємо

$$y(t) \le \left[ y(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \frac{\rho_0(\theta)}{\rho_1(\theta)} \exp\left( -\int\limits_0^{t_1} \frac{\rho_0(\tau)\,d\tau}{\rho_1(\tau)} \right) \frac{f_0(\theta)}{\delta}\, d\theta \right] \exp\left( \int\limits_t^{t_1} \frac{\rho_0(\theta)\,d\theta}{\rho_1(\theta)} \right). \tag{10}$$

Але на основі (8)

$$y(t_1) = \int\limits_{Q_{t_1,T}} \rho_0(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx\,dt \le 2\rho_1(t_1) \int\limits_{\Omega_{t_1}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx + \frac{f_0(t_1)}{\delta}.$$

Тому з (10) маємо потрібну оцінку (5). Лема доведена.

**Теорема.** *Нехай виконуються всі умови леми для* $\delta = 0$. *Тоді задача* (1), (2) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій* $u(x,t) \in W_l^m(Q_T)$ *таких, що існує послідовність точок* $\{t_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = -\infty$ *і*

$$\int\limits_{\Omega_{t_k}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u(x, t_k)|^2 dx \le \frac{\varepsilon(t_k)}{\rho_1(t_k)} \exp\left( \int\limits_{t_k}^{T} \frac{\rho_0(t)\,dt}{\rho_1(t)} \right),$$
$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon(t_k) = 0. \tag{11}$$

***Доведення.*** Нехай $u(x,t)$ — узагальнений розв'язок задачі (1), (2) у випадку, коли $F(x,t) \equiv 0$. Покладемо в оцінці (5) $t_1 = t_k$. Тоді, враховуючи (11), маємо

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} \rho_0(t) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \, dx dt \le \varepsilon(t_k)$$

для довільного $t \in \mathfrak{J}$. Звідси одержуємо, що $u = 0$ майже скрізь в $Q_T$. Теорема 1 доведена.

***Зауваження.*** Зазначимо, що умови теореми 1 є точними. Дійсно, розглянемо задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + b^2 u_{xxt},$$
$$(x,t) \in Q_T = \{0 < x < l, \ -\infty < t < 0\}, \tag{12}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

У даному випадку

$$\rho_0(t) = 2a^2, \quad \rho_1(t) = b^2 + \frac{l^2}{\pi^2},$$
$$\exp\left( \int\limits_{t_k}^{0} \frac{\rho_0(t)\,dt}{\rho_1(t)} \right) = \exp\left( -\frac{2a^2\pi^2}{b^2\pi^2 + l^2} \, t_k \right).$$

У той же час задача (12) має нетривіальний розв'язок

$$u(x,t) = \exp\left( -\frac{a^2\pi^2}{b^2\pi^2 + l^2} \, t \right) \sin\frac{\pi x}{l}.$$

1. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен – Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 6. – С. 142–166.
2. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.
3. *Ивасишен С. Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. – **34**, № 5. – С. 547–552.
4. *Кадыров Р. Р., Жураев Б. Б.* О классах единственности решений краевых задач без начальных условий для параболических уравнений высшего порядка // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. – 1985. – № 2. – С. 23–29.
5. *Курта В. В., Шишков А. Е.* Классы единственности решений граничных задач для недивергентных параболических уравнений второго порядка в нецилиндрических областях // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 7. – С. 924–930.
6. *Лавренюк С. П.* Задача для одного эволюционного уравнения в неограниченном во времени цилиндре // Там же. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1481–1486.
7. *Кирилич В. М., Мишкіс А. Д.* Крайова задача без початкових умов для лінійної одновимірної системи рівнянь гіперболічного типу // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 5. – С. 8–10.
8. *Костюченко А. Г., Эскин Г. И.* Задача Коши для уравнений типа Ковалевской // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1962. – **10**. – С. 285–295.
9. *Гальперн С. А.* Задача Коши для систем линейных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР. – 1958. – **119**, № 4. – С. 675–678.
10. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Одержано 07.07.94