УДК 519.213; 519.217.4

В. Г. Бондаренко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ДИФФУЗИОННЫХ МЕР В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

For a logarithmic derivative of transition probability of diffusion process in the Hilbert space, we construct a sequence of vector fields on the Riemann n-dimensional manifolds which converge to this derivative.

Для логарифмічної похідної перехідної ймовірності дифузійного процесу в гільбертовому просторі побудовано послідовність векторних полів на n-вимірних ріманових многовидах, які збігаються до цієї похідної.

1. Постановка задачи. Одной из важных характеристик меры μ является ее логарифмическая производная (л. п.), определяемая в общем случае через операцию дифференцирования меры. Если пространство с мерой X — риманово многообразие (в частности, евклидово пространство), то л. п. — векторное поле Λ, заданное соотношением (формула интегрирования по частям)

$$\int\limits_X (\Lambda(y), V(y))\, d\mu(y) = -\int\limits_X \operatorname{div} V(y)\, d\mu(y), \tag{1}$$

справедливым для всех векторных полей V, для которых правая часть определена. Впервые определение л. п. было введено Ю. Л. Далецким [1]; меры, имеющие л. п., там же названы гладкими.

Понятие л. п. тесно связано с другими характеристиками мер. В частности, если μ и ν — две меры, $\mu \succ \nu$, и Λ_μ и Λ_ν — их л. п., то

$$f(y) = \frac{d\mu}{d\nu}(y) = c \exp\left\{ \int\limits_0^{s_0} \Big(\Lambda_\mu(\gamma(s)) - \Lambda_\nu(\gamma(s), \dot\gamma(s))\Big) ds \right\}, \tag{2}$$

где γ — кривая в X, $\gamma(s_0) = y$. Если мера ν имеет плотность φ относительно меры Лебега, то из (2) следует равенство

$$\Lambda_\mu(y) = \operatorname{grad} \ln f(y) + \operatorname{grad} \ln \varphi(y). \tag{2a}$$

Особенно плодотворным оказалось понятие л. п. для мер в гильбертовом пространстве H. Заметим, что явный вид л. п. таких мер известен для узкого класса примеров: в частности, для гауссовой меры

$$\Lambda(y) = B^{-1}(x - y).$$

Здесь x — среднее, B — корреляционный (ядерный) оператор меры. Непосредственным обобщением гауссовой меры является диффузионная мера — переходная вероятность $P(t, x, \Gamma)$ диффузионного процесса $\xi(t)$, заданного уравнением Ито

$$\xi(t) = x + \int_0^t A(\xi(\tau))\, dw(\tau) + \int_0^t b(\xi(\tau))\, d\tau, \tag{3}$$

где $x \in H$, $A(x)$ — поле диффузионных операторов Гильберта – Шмидта, $b(x) \in H$ — векторное поле. Всюду ниже предполагается, что коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют условиям:

1) $\alpha K \leq A^*(x)A(x) \leq \beta K$, где $\alpha > 0$, K — положительный ядерный оператор в H (равномерная эллиптичность);

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b(x), e_k)^2$ сходится равномерно для некоторого ортобазиса $\{e_k\}$ и его сумма $\|b(x)\|^2 < c$;

3) векторное поле $b(x)$ и операторное поле $A(x)$ дифференцируемы, а их дифференциалы удовлетворяют неравенствам

$$\|b'(x)h\| \leq \|Sh\|, \quad \sigma_2(A'(x)h) \leq \|Sh\|,$$

где S — оператор Гильберта – Шмидта в H, σ_2 — операторная норма Гильберта – Шмидта.

Приведенные условия гарантируют существование и единственность решения уравнения (3), а также существование л. п. $\Lambda(t, x, y)$ переходной вероятности $P(t, x, \Gamma)$ [2].

В настоящей работе строится последовательность мер $P_n(t, x_n, \cdot)$, аппроксимирующих диффузионную меру $P(t, x, \cdot)$, а для соответствующих л. п. $\Lambda_n(t, x_n, y_n)$ доказывается их сходимость к $\Lambda(t, x, y)$.

2. Условия и результаты. Пусть Π_n — n-мерный ортопроектор в H. Рассмотрим наряду с (3) уравнение

$$\eta_n(t) = \Pi_n x + \int_0^t \Pi_n A(\eta_n(\tau))\, dw(\tau) + \int_0^t \Pi_n b(\eta_n(\tau))\, d\tau \tag{3a}$$

для диффузионного процесса $\eta_n(t) \in \Pi_n H = \mathbb{R}^n$. Обозначим через $P_n(t, x_n, \Delta_n)$ его переходную вероятность $(x_n = \Pi_n x)$. В [3] доказано соотношение

$$\lim_{n \to \infty} E\|\eta_n(t) - \xi(t)\|^2 = 0,$$

а также сходимость последовательности мер $P_n(t, x_n, \cdot)$ к $P(t, x, \cdot)$ на алгебре цилиндрических множеств, граница каждого основания которых имеет нулевую лебегову меру.

Введем в $\Pi_n H$ структуру риманова многообразия, порожденную метрическим тензором

$$G_n(x_n) = (\Pi_n A^*(\Pi_n x) A(\Pi_n x)\Pi_n)^{-1}$$

с метрикой (индекс n опускается)

$$\rho(x, y) = \min_{\gamma} \sqrt{T \int_0^T g_{jk}(\gamma(\tau))\, \dot{\gamma}^j(\tau)\, \dot{\gamma}^k(\tau)\, d\tau},$$

где $g_{jk}(x)$ — матрица G_n в некотором ортобазисе, $\gamma(0) = x$, $\gamma(T) = y$ (необходимость введения в $\Pi_n H$ римановой метрики обоснована в [3, 4]). Тогда

$$P_n(t, x_n, \Delta_n) = \int\limits_{\Delta_n} p_n(t, x_n, y)\, d\sigma_n(y),$$

где риманов объем σ_n в локальных координатах имеет вид

$$d\sigma_n = \sqrt{\det G_n(y)} \prod_{k=1}^{n} dy^k, \tag{4}$$

а плотность p_n — фундаментальное решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} g^{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} + b^k(x) \frac{\partial u}{\partial x^k}.$$

Ниже предполагается, что это уравнение имеет дивергентный (по отношению к римановой метрике) вид $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u$, Δ — оператор Лапласа – Бельтрами, т. е.

$$b^k(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{jk}(x)}{\partial x^j} - \frac{1}{4}\frac{\partial g^{ij}(x)}{\partial x^r} g^{rk}(x)\, g_{ij}(x).$$

Одной из характеристик риманова многообразия M является его секционная кривизна [4, 5]. В [3, 4] при некоторых ограничениях на многообразие получены оценки фундаментального решения и его логарифмического градиента, не зависящие от размерности M. Суть этих ограничений — неположительность кривизны и достаточно быстрое убывание при $\|x\| \to \infty$. В дальнейшем будем ссылаться на упомянутые ограничения как на условие 4.

Пусть V — векторное поле в H, $\operatorname{div} V(y) = \dfrac{\partial V^k}{\partial y^k}(y)\Big|_{k=1}^{\infty}$. Тогда $\operatorname{div} \Pi_n V(y) = \dfrac{\partial V^k}{\partial y^k}(y)\Big|_{k=1}^{n}$, а $V_n(y_n) = \Pi_n V(\Pi_n y)$ — векторное поле в $\Pi_n H$ с дивергенцией $\dfrac{\partial V^k}{\partial y^k}(\Pi_n y)\Big|_{k=1}^{n}$.

Лемма 1. *Пусть ξ — случайная величина со значениями в H с гладким распределением $\mu (\xi \approx \mu)$ и л. п. Λ, η_n — последовательность случайных величин в $\Pi_n H$, $\eta_n \approx \nu_n$ с л. п. Λ_n, причем $\eta_n \xrightarrow{p} \xi$. Тогда для векторных полей V в H, удовлетворяющих условиям:*

1) $\operatorname{div} V$ *непрерывна в* H;

2) $\left|\dfrac{\partial V^k}{\partial y^k}(y)\right| < c$,

выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Pi_n H} (\Lambda_n(y_n), V_n(y_n))\, d\nu_n(y_n) = \int\limits_H (\Lambda(y), V(y))\, d\mu(y).$$

Доказательство. Из непрерывности $\operatorname{div} V$ и слабой сходимости ν_n к μ следует сходимость

$$E \operatorname{div} V(\eta_n) \to E \operatorname{div} V(\xi),$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} V(y_n)\, d\nu_n(y_n) \to \int\limits_H \operatorname{div} V(y)\, d\mu(y),$$

а из наличия интегрируемой мажоранты $\left|\frac{\partial V^k}{\partial y^k}\right|$ вытекает сходимость при каждом n:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\Pi_m V(y_n)\,d\nu_n(y_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} V(y_n)\,d\nu_n(y_n).$$

Из этих двух соотношений следует сходимость

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} V_n(y_n)\,d\nu_n(y_n) \to \int_H \operatorname{div} V(y)\,d\mu(y).$$

Утверждение леммы следует из формулы (1), причем векторным полем на $\mathbb{R}^n$ для л. п. $\Lambda_n(y_n)$ является $V_n(y_n)$, т. е.

$$E\big(\Lambda_n(\eta_n), V_n(\eta_n)\big) = \int_{\mathbb{R}^n} (\Lambda_n(y_n), V_n(y_n))\,d\nu_n(y_n) = -\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} V_n(y_n)\,d\nu_n(y_n).$$

Лемма 2. *Пусть пространство $\mathbb{R}^n$ наделено римановой метрикой с метрическим тензором $g_{jk}(x)$ и объемом σ_n и для борелевского Δ_n*

$$V_n(\Delta_n) = \int_{\Delta_n} \varphi_n(y)\,d\sigma_n(y), \tag{5}$$

где плотность $\varphi_n > 0$ дифференцируема. Тогда для л. п. Λ_{ν_n} справедлива формула

$$\Lambda_{\nu_n}(y) = \operatorname{grad}\ln\varphi_n(y) + H(y), \qquad y \in \mathbb{R}^n,$$

где локальные координаты векторного поля H имеют вид

$$H^k(y) = g^{kr}(y)\,\Gamma^j_{rj}(y),$$

или $H(y) = G^{-1}(y)\operatorname{tr}\Gamma(y)$, $\Gamma^j_{rj}(y)$ — коэффициенты связности римановой метрики [4].

Доказательство. Представление Λ_ν в виде суммы следует из (2а), а формулу для $H(y)$ можно получить из представления (4):

$$H(y) = \Lambda_\sigma(y) = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\ln\det G(y).$$

Исходя из равенства $\nabla G(y) \equiv 0$, имеющего в локальных координатах вид

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} = \Gamma^l_{ij}\,g_{kl} + \Gamma^l_{ik}\,g_{jl},$$

для тензора $G(\gamma(s))$ получаем эволюционное уравнение

$$\frac{dg_{jk}}{ds}(\gamma(s)) = \Gamma^l_{ij}(\gamma(s))\,\dot\gamma^i(s)\,g_{kl}(\gamma(s)) + \Gamma^l_{ik}(\gamma(s))\,\dot\gamma^i(s)\,g_{jl}(\gamma(s)) \equiv D(s)\,G(\gamma(s)),$$

формула Лиувилля для которого имеет вид

$$\det G(\gamma(s)) =$$
$$= \det G(\gamma(0))\exp\left\{\int_0^s \operatorname{tr} D(\tau)\,d\tau\right\} = \det G(\gamma(0))\exp\left\{2\int_0^s \operatorname{tr}\Gamma(\gamma(\tau))\,\dot\gamma(\tau)\,d\tau\right\},$$

где $\gamma(s) = y$, $\operatorname{tr}\Gamma(x)\,u = \Gamma^k_{kj}(x)u^j$.

Выбирая различные кривые γ, находим

$$\operatorname{grad} \ln \det G(y) = 2 \operatorname{grad} \int_0^s \operatorname{tr}\Gamma(\gamma(\tau))\dot{\gamma}(\tau)\,d\tau = 2G^{-1}(y) \operatorname{tr}\Gamma(y).$$

Следствие. *Пусть меры* μ *и* ν_n *с л. п.* Λ *и* Λ_n *соответственно определены условиями леммы* 1, *а при каждом* n *мера* ν_n *допускает представление* (5). *Если* $\| G_n^{-1}(y_n) \operatorname{tr}\Gamma_n(y_n) \| < c$ *и* $\lim_{n\to\infty} G_n^{-1}(y_n)\operatorname{tr}\Gamma_n(y_n) = F(y)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{grad} \ln \varphi_n(y_n), V_n(y_n))\,d\nu_n(y_n) = \int_H (\Lambda_G(y), V(y))\mu(dy),$$

где

$$\Lambda_G(y) = \Lambda(y) - F(y). \tag{6}$$

Доказательство. Из результатов лемм 1 и 2 следует соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{grad} \ln \varphi_n(y_n), V_n(y_n))\,d\nu_n(y_n) = -\int_H \operatorname{div}_G V(y)\mu(dy),$$

где ковариантная дивергенция

$$\operatorname{div}_G V(y) = \operatorname{div} V(y) + (F(y), V(y)),$$

и нужное утверждение вытекает из (1).

***Замечание* 1.** В работе [2] л. п. определена равенством (6) аксиоматически.

В качестве примера рассмотрим л. п. $\Lambda(t, x, y)$ диффузионной меры $P(t, x, \Gamma)$ — переходной вероятности процесса $\xi(t)$, заданного уравнением (3). Для аппроксимирующей меры $P_n(t, x_n, \Delta_n)$ имеет место представление

$$P_n(t, x_n, \Delta_n) = \int_{\Delta_n} p_n(t, x_n, y_n)\,d\sigma_n(y_n),$$

а в [3, 4] получено представление (индекс n опущен):

$$\operatorname{grad}_y \ln p_n(t, x, y) = -\frac{\rho(x, y)}{t}\dot{\gamma}(\rho) + w(t, y, x),$$

где γ — геодезическая, $\gamma(0) = x$, $\gamma(\rho) = y$, а $w(t, y, x) \in T_y M$ удовлетворяет оценке $\| w(t, x, y) \| < c/\sqrt{t}$ (c не зависит от размерности).

Теорема 1. *Пусть коэффициенты связности* $\Gamma(y)$ *удовлетворяют условиям следствия, а поле* $V(y)$ *в* H — *условиям леммы* 1. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{grad} \ln p_n(t, x_n, y_n), V_n(y_n))\,p_n(t, x_n, y_n)\,d\sigma_n(y_n) = \int_H (\Lambda_G(y), V(y))\,P(t, x, dy).$$

Доказательство непосредственно вытекает из приведенных выше результатов.

Для л. п. гауссовой меры с корреляционным ядерным оператором B можно определить класс постоянных векторных полей V, для которых

$$\int_H (\Lambda(y), V)^2 \mu(dy) < \infty.$$

Такие поля имеют вид $V = Sh$, где S — оператор Гильберта–Шмидта, $S^*B^{-1}S$ ограничен. Ниже устанавливаются условия на векторное поле $V(y)$ в H (в терминах полей $V_n(y_n)$ в $\mathbb{R}^n$), при выполнении которых функция $(\Lambda_n(y_n), V_n(y_n))$ является квадратично интегрируемой по мере $P_n(t,x_n,dy_n)$ для всех n. Положим

$$q(t,x,y) = (2\pi t)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\rho^2(x,y)}{2t}\right\}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Из неположительности кривизны (условие 4) следует неравенство [3]

$$p(t,x,y) \le q(t,x,y), \quad t>0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 2. *Пусть векторное поле* V *таково, что при некоторых* $t > 0$, $x \in H$ *для всех* n *каждый из интегралов*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|V_n(y_n)\|^2 q(t,x_n,y_n)\, d\sigma_n(y_n),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{div}_G V_n(y_n))^2 q(t,x_n,y_n)\, d\sigma_n(y_n),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x_n,y_n)\|\nabla_{V_n} V_n(y_n)\|\, q(t,x_n,y_n)\, d\sigma_n(y_n),$$

где $x_n = \Pi_n x$, $\nabla_V V$ — *ковариантная производная поля* V, *ограничен не зависящей от размерности константой. Тогда при этих же* t, x

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Lambda_n(t,x_n,y_n), V_n(y_n))^2 P_n(t,x_n,dy_n) < c,$$

где c *не зависит от размерности.*

Доказательство. Достаточно доказать оценку

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Lambda_n(t,x_n,y_n), V_n(y_n))\, q(t,x_n,y_n)\, d\sigma_n(y_n) < c.$$

Из представления для Δ_n имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Lambda_n(t,x_n,y_n), V_n(y_n))^2 q(t,x_n,y_n)\, d\sigma_n(y_n) \le$$

$$\le 2\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\rho(x_n,y_n)}{t}\dot\gamma(y_n), V_n(y_n)\right)^2 q(t,x_n,y_n)\, d\sigma_n(y_n) + \frac{c}{t}.$$

Для оценки оставшегося интеграла заметим, что $-\dfrac{\rho(x_n,y_n)}{t}\dot\gamma(y_n)$ — л. п. меры

$$Q(t,x_n,dy_n) = q(t,x_n,y_n)\, d\sigma_n(y_n).$$

Применяя формулу (1), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\rho(x_n,y_n)}{t}\dot\gamma(y_n), V_n(y_n)\right)^2 Q(t,x_n,dy_n) =$$

$$= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^n} \Big[(\dot\gamma(y_n), V_n(y_n))^2 + \rho(x_n,y_n)\big(\nabla_{V_n}\dot\gamma(y_n), V_n(y_n)\big) + \rho(x_n,y_n)\big(\dot\gamma(y_n), \nabla_{V_n} V_n(y_n)\big)\Big] \times$$

$$\times\ Q(t,x_n,dy_n) + \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^n} (\rho(x_n,y_n)\dot\gamma(y_n), V_n(y_n))\, Q(t,x_n,dy_n).$$

Первое слагаемое ограничено в силу условий теоремы, а ограниченность второго доказывается повторным использованием соотношения (1).

Замечание 2. Если последовательность интегралов

$$c_n = \int_{\mathbb{R}^n} (\Lambda_n(t, x_n, y_n), V_n(y_n))^2 P_n(t, x_n, dy_n)$$

сходится (например, в случае возрастания c_n), то из условий теоремы следует

$$\int_H (\Lambda(t, x, y), V(y))^2 P(t, x, dy) < \infty .$$

1. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и диффузионные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. – Киев: Выща шк., 1989. – 295 с.
3. *Bondarenko V.* Diffusion sur variété de courbure non positive // Comptes Rendus A. S. – 1997. – **324**, № 10. – P. 1099 – 1103.
4. *Бондаренко В. Г.* Оценки ядра теплопроводности на многообразии неположительной кривизны // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1129 – 1136.
5. *Бондаренко В. Г.* Ковариантные производные полей Якоби на многообразии неположительной кривизны // Там же. – № 6. – С. 755 – 764.

Получено 02.10.97