УДК 519.6

М. О. Перестюк, С. І. Дудзяний (Київ. ун-т)

ПРО СТІЙКІСТЬ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА

We consider the problem of the asymptotic stability for trivial invariant torus of a linear extension of dynamical system on a torus. We formulate and prove sufficient criteria of asymptotic stability and study conditions for the existence and uniqueness of the Lyapunov functions of fixed sign.

Розглядається питання асимптотичної стійкості тривіального інваріантного тора лінійного розширення динамічної системи на торі. Формулюються та доводяться достатні ознаки асимптотичної стійкості, вивчаються умови існування та єдиності знаковизначених функцій Ляпунова.

Будемо розглядати лінійне розширення динамічної системи на торі

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \tag{1}$$

де

$$a \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathfrak{I}_m), \quad P \in C(\mathfrak{I}_m), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m), \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

$\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Вивчатимемо питання асимптотичної стійкості тривіального інваріантного тора системи (1): $x = 0$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$. Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, розв'язок перших m рівнянь системи (1). Усі дослідження проводитимемо для випадку, коли всі дійсні частини власних значень матриці $P(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, на ω-граничній множині півтраєкторії $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, $t \in [0, +\infty)$, від'ємні, і про матрицю $P(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, відомо, що вона задовольняє умову

$$\| P(\varphi) - P(\psi) \| \le k \| \varphi - \psi \|,$$

де $\varphi, \psi \in \mathfrak{I}_m$, $k > 0$.

У даній роботі при проведені досліджень використовуватимемо ідеї методу заморожування, суть якого полягає в тому, що для деякого фіксованого t_1 систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \qquad \varphi \in \mathfrak{I}_m, \tag{2}$$

можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_{t_1}(\varphi))x + \left[P(\varphi_t(\varphi)) - P(\varphi_{t_1}(\varphi))\right]x, \qquad \varphi \in \mathfrak{I}_m.$$

Тоді матрицант системи (2) можна подати у вигляді

$$\Omega_{t_0}^t(\varphi) = e^{P(\varphi_{t_1}(\varphi))(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{P(\varphi_{t_1}(\varphi))(t-s)}\left[P(\varphi_s(\varphi)) - P(\varphi_{t_1}(\varphi))\right]\Omega_{t_0}^s(\varphi)\,ds.$$

Покладемо в даній рівності $t = t_1$ та позначимо t_1 знову через t. Отримаємо наступне інтегральне представлення матриціанта системи (2):

$$\Omega_{t_0}^t(\varphi) = e^{P(\varphi_t(\varphi))(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{P(\varphi_t(\varphi))(t-s)}[P(\varphi_s(\varphi)) - P(\varphi_t(\varphi))]\Omega_{t_0}^s(\varphi)\,ds.$$

Сформулюємо аналог теореми 10.2. з [1] для нашого випадку.

Теорема 1. *Нехай для довільних* $\varphi \in \mathfrak{T}_m$ *виконуються умови:*

1) $\left\| e^{P(\varphi_t(\varphi))(t-t_0)} \right\| = \eta\,(t-t_0)$, *де* $\eta\,(t-t_0) = O\left(e^{\lambda(t-t_0)}\right)$;

2) $$\| P(\varphi_t(\varphi)) - P(\varphi_s(\varphi)) \| \le \alpha\,(t-s),$$

де λ *таке, що*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\eta\,(\tau)\alpha\,(\tau)\,d\tau \;<\; 1.$$

Тоді для матриціанта системи (2) *справедлива оцінка*

$$\left\| \Omega_{t_0}^t(\varphi) \right\| \;\le\; D_1 e^{\lambda(t-t_0)},$$

де $D_1 = \text{const} > 0$.

Доведення цієї теореми аналогічне наведеному в [1].

Визначимо, яким має бути малий параметр $\varepsilon > 0$ системи (1), щоб виконувалися умови теореми 1 для всіх $t \ge T > t_0$, де T — деякий фіксований момент часу, причому параметр λ, що входить в оцінку для матриціанта, був би від'ємним. Про матрицю $P(\varphi)$ відомо, що:

$$\mathrm{Re}\big(\lambda_j(P(\varphi))\big) \;<\; 0,$$

де

$$\varphi \in \Omega \;=\; \bigcup_{\varphi \in \mathfrak{T}_m} \Omega_\varphi \subset \mathfrak{T}_m, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Розглянемо компактну півтраєкторію $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{T}_m$, $t \in [0, +\infty)$. Множина її ω-граничних точок Ω_φ непорожня, замкнена, інваріантна, компактна, зв'язна і така, що

$$\lim_{t\to+\infty} \rho\,(\varphi_t(\varphi), \Omega_\varphi) \;=\; 0.$$

Якщо $\varphi \in \Omega_\varphi$, то

$$\varphi_t(\varphi) \in \Omega_\varphi \Rightarrow \mathrm{Re}\big(\lambda_j((\varphi_t(\varphi))\big) \;<\; 0, \qquad t \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Нехай $\varphi^0 \in \Omega_\varphi$. Тоді маємо таку послідовність $\{t_n\}_{n=1}^\infty$, що

$$\lim_{n\to\infty} t_n \;=\; +\infty \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, \varphi) \;=\; \varphi^0.$$

Розглянемо послідовність функцій $\varphi\,(t + t_n, \varphi)$, кожна з яких визначена при $t \in [-t_n, +\infty)$. З неперервності розв'язку $\varphi\,(t, \varphi)$ відносно φ випливає

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t + t_n, \varphi) \;=\; \lim_{n\to\infty} \varphi(t, \varphi(t_n, \varphi)) \;=\; \varphi_t(\varphi^0) \subset \Omega_\varphi.$$

Звідси

$$\mathrm{Re}\big(\lambda_j(\varphi^0)\big) \;<\; 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\big(\lambda_j(\varphi(t, \varphi^0))\big) \;\le$$

$$\le\; 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\left(\lambda_j\left[\lim_{n\to\infty} \varphi(t, \varphi(t_n, \varphi))\right]\right) \;<$$

$$< \alpha \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\lambda_j\left[\lim_{n\to\infty}\varphi(t+t_n,\varphi)\right]\right) < 0.$$

Отже, умова (3) еквівалентна умові

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left[\operatorname{Re}\left(\lambda_j(P(\varphi_t(\varphi)))\right)\right] < 0, \quad \forall\ \varphi\in\Im_m, \quad j=1,\ldots,n. \tag{4}$$

Крім цього, можна вказати такий момент часу $T>0$, що при всіх $t\geq T$ умова (4) буде виконуватися для довільних $\varphi\in\Im_m$.

1) Позначимо

$$-\beta = \max_{j,\varphi\in\Omega}\operatorname{Re}\left(\lambda_j(P(\varphi))\right) < 0, \quad -\gamma = -\beta+\varepsilon_1,$$

де $\varepsilon_1>0$ беремо настільки малим, щоб виконувалося $-\gamma<0$. Тоді справедлива оцінка (див., наприклад, [1])

$$\left\| e^{P(\varphi_t(\varphi))(t-T)}\right\| \leq D_1 e^{-\gamma(t-T)} \equiv \eta\,(t-T),$$

$$D_1 = D_1(\varepsilon_1) = \mathrm{const} > 0.$$

Виберемо λ таким чином, щоб виконувалася умова $-\gamma<-\lambda<0$. Тоді перша умова теореми 1 задовольняється у вигляді

$$\left\| e^{P(\varphi_t(\varphi))(t-T)}\right\| = D_1 e^{-\gamma(t-T)} \leq D_1 e^{-\lambda(t-T)}.$$

2) Розглянемо другу умову теореми 1. Про матрицю $P(\varphi)$, $\varphi\in\Im_m$, відомо, що вона задовольняє умову Ліпшіца відносно $\varphi\in\Im_m$, тобто

$$\|P(\varphi)-P(\psi)\| \leq k\|\varphi-\psi\|,$$

де $\varphi,\psi\in\Im_m$, $k>0$. Оскільки $\dot\varphi=\varepsilon a(\varphi)$, то

$$|\varphi_t(\varphi)-\varphi_s(\varphi)| \leq \varepsilon\int_s^t |a(\varphi_\tau(\varphi))|\,d\tau \leq \varepsilon K_1|t-s|,$$

де

$$K_1 = \max_{\varphi\in\Im_m}\|a(\varphi)\|.$$

Тобто друга умова теореми 1 задовольняється з функцією

$$\alpha(t-s) \equiv \varepsilon K_1 K|t-s|.$$

3) З'ясуємо питання виконання умови

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda z}\alpha(z)\eta(z)\,dz < 1. \tag{5}$$

Для нашого випадку ця умова має вигляд

$$\varepsilon K_1 K D_1\int_0^{+\infty} z e^{(\lambda-\gamma)z}\,dz < 1.$$

Оскільки $\lambda-\gamma<0$, то

$$\int_0^{+\infty} z e^{(\lambda-\gamma)z}\,dz = \frac{1}{\lambda-\gamma} e^{(\lambda-\gamma)z} z\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\lambda-\gamma}\int_0^{+\infty} e^{(\lambda-\gamma)z} dz = \frac{1}{\gamma-\lambda}\int_0^{+\infty} e^{(\lambda-\gamma)z} dz =$$

$$= \frac{1}{\gamma-\lambda}\left[\frac{1}{\lambda-\gamma} e^{(\lambda-\gamma)z}\Big|_0^{+\infty}\right] = \frac{1}{(\gamma-\lambda)^2}.$$

Отриманий результат підставимо у (5):

$$\frac{\varepsilon K_1 K D_1}{(\gamma-\lambda)^2} < 1 \Rightarrow \varepsilon K_1 K D_1 < (\gamma-\lambda)^2 \Rightarrow -\gamma + \sqrt{\varepsilon K_1 K D_1} < -\lambda < 0.$$

З останньої нерівності можна вивести умову існування параметра $-\lambda < 0$, а саме:

$$-\gamma + \sqrt{\varepsilon K_1 K D_1} < 0 \Rightarrow \varepsilon K_1 K D_1 < \gamma^2 \Rightarrow \varepsilon < \frac{\gamma^2}{K_1 K D_1}.$$

Висновок. Для виконання умов теореми 1 і того, щоб матрицант системи (2), починаючи з деякого $T > 0$, задовольняв оцінку

$$\left\|\Omega_T^t(\varphi)\right\| \le D_1 e^{-\lambda(t-T)},$$

де $t \ge T$, $-\lambda < 0$, $D_1 = \mathrm{const} > 0$, достатньо, щоб малий параметр ε, який входить у систему (1), задовольняв умову $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, де

$$\varepsilon_0 = \frac{\gamma^2}{K_1 K D_1}. \tag{6}$$

Зважаючи на все сказане вище, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай малий параметр* $\varepsilon > 0$, *що входить у систему* (1), *задовольняє умову* (6), *а всі власні числа матриці* $P(\varphi)$ *такі, що:*

$$\mathrm{Re}(\lambda_j(P(\varphi))) < 0, \quad \varphi \in \Omega = \bigcup_{\varphi \in \mathfrak{I}_m} \Omega_\varphi \subset \mathfrak{I}_m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тоді тривіальний інваріантний тор $x = 0$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$ *системи* (1) *експоненціально стійкий.*

Доведення. Наша мета — показати, що

$$\lim_{t\to+\infty} \|x_t(\varphi, x_0)\| = 0, \quad \varphi \in \mathfrak{I}_m.$$

Запишемо $x_t(\varphi, x_0) = \Omega_0^t(\varphi) x_0$, де $\Omega_0^t(\varphi)$ — матрицант системи

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \quad \varphi \in \mathfrak{I}_m.$$

Для доведення асимптотичної стійкості тривіального інваріантного тора системи (1) достатньо показати, що $\left\|\Omega_0^t(\varphi)\right\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Раніше було доведено, що умова теореми 2 про власні числа матриці $P(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, еквівалентна умові (4). Нехай $T > 0$ — момент часу, починаючи з якого умова (4) виконується. Оскільки

$$\left\|\Omega_0^t(\varphi)\right\| \le \left\|\Omega_0^T(\varphi)\right\| \left\|\Omega_T^t(\varphi)\right\|,$$

а $\left\|\Omega_0^T(\varphi)\right\| \le K$, то достатньо довести, що $\left\|\Omega_T^t(\varphi)\right\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Згідно з методом заморожування і теоремою 1 отримуємо, що $\left\|\Omega_T^t(\varphi)\right\| \le$ $\le D_1 e^{-\lambda(t-T)} \to 0$ при $t \to +\infty$. Тому

$$\lim_{t\to+\infty} \|x_t(\varphi, x_0)\| \le \lim_{t\to+\infty} \left\|\Omega_T^t(\varphi)\right\| \left\|\Omega_0^T(\varphi)\right\| \|x_0\| = 0; \quad \forall \varphi \in \Im_m,$$

що й доводить теорему. Як видно з доведення, тривіальний тор буде не тільки асимптотично, але й експоненціально стійким.

Дослідимо асимптотичну стійкість тривіального інваріантного тора системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi, x), \tag{7}$$

де

$$a \in C_{\mathrm{Lip}}(\Im_m), \quad P \in C(\Im_m), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m), \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

ε — малий параметр $(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0))$ і при цьому має місце умова

$$\|f(\varphi, x)\| \le \alpha\|x\|; \quad \alpha(\delta) \underset{\delta\to 0}{\to} 0; \quad \|x\| < \delta. \tag{8}$$

Теорема 3. *Нехай малий параметр* $\varepsilon > 0$, *що входить у систему* (7), *задовольняє умову* (6), *а всі власні числа матриці* $P(\varphi)$ *такі, що:*

$$\mathrm{Re}(\lambda_j(P(\varphi))) < 0, \quad \varphi \in \Omega = \bigcup_{\varphi \in \Im_m} \Omega_\varphi \subset \Im_m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Функція $f(\varphi, x)$ *задовольняє умову* (8), *де* $\alpha < \gamma/D_1$ — *достатньо мале. Тоді тривіальний інваріантний тор системи* (7) *експоненціально стійкий.*

Доведення. Як було показано раніше, умова теореми 3 про власні числа матриці $P(\varphi)$, $\varphi \in \Im_m$, еквівалентна нерівності (4). Нехай T — момент часу, починаючи з якого дана нерівність справедлива для всіх $t \ge T$. Тоді згідно з теоремою 1 та наведеними вище оцінками для матриціанта відповідної однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \quad \varphi \in \Im_m,$$

справджується умова $\left\|\Omega_T^t(\varphi)\right\| \le D_1 e^{-\gamma(t-T)}$ ($D_1 > 0$, $\gamma > 0$ не залежать від φ).

Як відомо, розв'язок системи (7) можна представити у вигляді

$$x_t(\varphi, x_0) = \Omega_{t_0}^t(\varphi)x_0 + \int_{t_0}^t \Omega_s^t(\varphi) f(\varphi_s(\varphi), x_s(\varphi, x_0))\, ds.$$

Звідси, користуючись оцінкою для матриціанта та умовою теореми, отримуємо

$$\| x_t(\varphi, x_0) \| \le \left\|\Omega_{t_0}^t(\varphi)\right\| \|x_0\| + \int_{t_0}^T \left\|\Omega_T^t(\varphi)\right\| \left\|\Omega_s^T(\varphi)\right\| \|f(\varphi_s(\varphi), x_s(\varphi, x_0))\| ds +$$

$$+ \int_T^t \left\|\Omega_s^t(\varphi)\right\| \|f(\varphi_s(\varphi), x_s(\varphi, x_0))\| ds \le$$

$$\le \left\|\Omega_{t_0}^T(\varphi)\right\| D_1 e^{-\gamma(t-T)} \|x_0\| + D_1 e^{-\gamma(t-T)} \int_{t_0}^T \left\|\Omega_s^T(\varphi)\right\| \|f(\varphi_s(\varphi), x_s(\varphi, x_0))\| ds +$$

$$+\alpha D_1 \int_T^t e^{-\gamma(t-s)} \| x_s(\varphi, x_0) \| ds.$$

Нехай

$$\tilde{K}_1 = \max_{\varphi \in \mathfrak{S}_m} \left\| \Omega_{t_0}^T(\varphi) \right\|;$$

$$\tilde{K}_2 = \max_{\varphi \in \mathfrak{S}_m} \int_{t_0}^T \left\| \Omega_s^T(\varphi) \right\| \| f(\varphi_s(\varphi), x_s(\varphi, x_0)) \| ds;$$

$$\tilde{K} = D_1\left(\tilde{K}_1 \| x_0 \| + \tilde{K}_2 \right).$$

Тоді справедливі співвідношення

$$\| x_t(\varphi, x_0) \| \le \tilde{K} e^{-\gamma(t-T)} + \alpha D_1 \int_T^t e^{-\gamma(t-s)} \| x_s(\varphi, x_0) \| ds,$$

$$\| x_t(\varphi, x_0) \| e^{\gamma(t-T)} \le \tilde{K} + \alpha D_1 \int_T^t e^{\gamma(s-T)} \| x_s(\varphi, x_0) \| ds.$$

Розв'язавши останню нерівність, отримаємо

$$\| x_t(\varphi, x_0) \| \le \tilde{K} e^{-(\gamma - \alpha D_1)(t-T)}, \qquad \alpha < \frac{\gamma}{D_1}.$$

Тобто

$$\lim_{t \to +\infty} \| x_t(\varphi, x_0) \| = 0; \qquad \varphi \in \mathfrak{S}_m,$$

а це доводить, що тривіальний інваріантний тор системи (7) асимптотично стійкий і, як видно з доведення, більш того, експоненціально стійкий. Теорему доведено.

Встановимо достатні умови асимптотичної стійкості тривіального тора системи (1) за допомогою знаковизначених функцій Ляпунова. Сформулюємо без доведення аналог теореми 1 [2, с. 100] для нашого випадку.

Теорема 4. *Нехай існує додатно визначена квадратична форма*

$$V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x \rangle \ge \gamma \| x \|^2, \qquad \gamma = \text{const} > 0,$$

визначена симетричною матрицею $S(\varphi) \in C^1(\mathfrak{S}_m)$, *така, що її повна похідна, складена згідно з рівняннями системи* (1), *є від'ємно визначеною:*

$$\dot{V}(\varphi, x) \le -\beta \| x \|^2, \qquad \beta = \text{const} > 0.$$

Тоді тривіальний інваріантний тор $x = 0$, $\varphi \in \mathfrak{S}_m$ *системи* (1) *асимптотично стійкий.*

Тепер поставимо собі за мету показати справедливість твердження, оберненого до теореми 4, користуючись ідеями, поданими в [3]. Тобто маємо систему (1) і нам відомо, що малий параметр $\varepsilon > 0$ задовольняє умову (6), а дійсні частини всіх власних чисел матриці $P(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{S}_m$, на ω-граничній множині півтраєкторії $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{S}_m$, $t \in [0, +\infty)$, від'ємні. Отже, згідно з теоремою 2 тривіальний інваріантний тор системи (1) експоненціально стійкий. Справедливе наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай малий параметр* $\varepsilon > 0$, *що входить у систему* (1), *задовольняє умову* (6), *а для всіх власних чисел матриці* $P(\varphi)$ *виконується умова*

$$\operatorname{Re}(\lambda_j(P(\varphi))) < 0, \quad \varphi \in \Omega = \bigcup_{\varphi \in \Im_m} \Omega_\varphi \subset \Im_m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тоді для довільної знаковизначеної квадратичної функції

$$U(\varphi, x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(\varphi) x_i x_j$$

існує єдина знаковизначена квадратична функція

$$V(\varphi, x) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}(\varphi) x_i x_j$$

така, що її повна похідна, складена згідно з рівняннями системи (1), *рівна функції* $U(\varphi, x)$ *з протилежним знаком.*

Доведення. Знайдемо в першу чергу умови, за яких виконується рівність

$$\frac{dV(\varphi, x)}{dt} = U(\varphi, x), \tag{10}$$

де значення похідної $\dot V$ взято вздовж розв'язків системи (1).

Коефіцієнти шуканої форми $V(\varphi, x)$ повинні задовольняти деяку систему рівнянь, яку ми отримуємо, прирівнюючи коефіцієнти при подібних членах у правій та лівій частинах рівності (10).

Позначимо через N число членів форми m-го порядку. Цих членів буде, очевидно, стільки, скільки існує цілих невід'ємних чисел $m_1, \dots, m_n$, пов'язаних співвідношенням $m = m_1 + \dots + m_n$.

Оскільки ми маємо форму другого порядку, то кількість членів квадратичної форми визначається за формулою $N = n(n+1)/2$, де n — ромірність вектора x.

Перенумеруємо всі члени квадратичних форм $V(\varphi, x)$, $U(\varphi, x)$ у якому-небудь порядку та позначимо через $b_1(\varphi), \dots, b_N(\varphi)$; $s_1(\varphi), \dots, s_N(\varphi)$ коефіцієнти при цих членах. Підставляючи квадратичну форму $V(\varphi, x)$ в рівняння (10) та розглядаючи $\dot V$ вздовж розв'язків системи (1) і прирівнюючи коефіцієнти при подібних членах у правій та лівій частинах цього рівняння, отримуємо для визначення коефіцієнтів $s_1(\varphi), \dots, s_N(\varphi)$ лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{ds}{dt} + A(\varphi_t(\varphi))s = b(\varphi_t(\varphi)), \tag{11}$$

де $A(\varphi)$ — матриця розмірності $N \times N$, члени якої $A_{ij}(\varphi)$ — лінійні комбінації членів $p_{kl}(\varphi)$, $k, l = 1, \dots, n$, матриці $P(\varphi)$.

Отже, квадратична функція $V(\varphi, x)$ буде задовольняти умови нашої теореми лише в тому випадку, коли вектор $s(\varphi) = (s_1(\varphi), \dots, s_N(\varphi))^T$, який її визначає, є єдиним обмеженим розв'язком системи (1).

Далі потрібно встановити залежність між власними числами матриць $P(\varphi)$ і $A(\varphi)$, де $\varphi \in \Im_m$. Для цього зафіксуємо деяке $\varphi^0 \in \Im_m$ та розглянемо систему зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi^0)x.$$

Побудуємо функцію $V_m(\varphi^0, x)$ — деяку форму m-го порядку таку, що вздовж розв'язків вказаної системи вона задовольняє рівність

$$\frac{dV(\varphi_0, x)}{dt} = \lambda V_m(\varphi^0, x), \tag{12}$$

де λ — деяке число. Коефіцієнти вказаної форми $V_m(\varphi^0, x)$ повинні задовольняти деяку систему рівнянь, яку ми отримаємо, прирівнюючи коефіцієнти при подібних членах у лівій та правій частинах рівності (12). Нехай $V_1(\varphi^0, x)$ — форма першого порядку. Тоді (12) має місце лише тоді, коли $P^T(\varphi^0)s(\varphi^0) = \lambda s(\varphi^0)$, тобто λ — власні значення, а $s(\varphi^0)$ — власні вектори матриці $P(\varphi^0)$.

Нехай $V_m(\varphi^0, x)$ — форма s-го порядку. Тоді (12) має місце лише тоді, коли $A(\varphi^0)s(\varphi^0) = \tilde{\lambda}s(\varphi^0)$, тобто $\tilde{\lambda}$ — власні значення, а $s(\varphi^0)$ — власні вектори матриці $A(\varphi^0)$, яка складається з лінійних комбінацій членів $p_{kl}(\varphi^0)$, $k, l = 1, \ldots, n$, матриці $P(\varphi^0)$.

Запишемо

$$V_m(\varphi^0, x) = V_1^{m_1} \ldots V_n^{m_n},$$

де $V_i^{m_i}(\varphi^0, x)$ — форми першого порядку такі, що

$$\frac{dV_i(\varphi_0, x)}{dt} = \lambda_i V_i(\varphi^0, x),$$

$m = m_1 + \ldots + m_n$, m — порядок форми (в нашому випадку $m = 2$), m_i — цілі невід'ємні числа. Похідна $\dot{V}_m$ повинна задовольняти рівності $\dot{V}_m(\varphi^0, x) = \tilde{\lambda} V_m(\varphi^0, x)$. Розпишемо це:

$$\frac{dV_m}{dt} = m_1 \frac{dV_1}{dt} V_1^{m_1 - 1} \ldots V_n^{m_n} + \ldots + m_n \frac{dV_n}{dt} V_1^{m_1} \ldots V_n^{m_n - 1} =$$

$$= (m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n) V_m = \tilde{\lambda} V_m.$$

Звідси й випливає співвідношення

$$\tilde{\lambda} = m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n; \quad m = m_1 + \ldots + m_n, \tag{13}$$

де $\tilde{\lambda}$ — власні числа матриці $A(\varphi)$, λ_i — власні числа матриці $P(\varphi)$, m_i — цілі невід'ємні числа.

Оскільки на ω-граничній множині траєкторії $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \Im_m$, $t \in [0, +\infty)$, справедливе твердження (за умовою теореми)

$$\mathrm{Re}(\lambda_j(A(\varphi))) < 0, \quad \varphi \in \Im_m = \bigcup_{\varphi \in \Im_m} \Omega_\varphi \subset \Im_m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то із співвідношення (13) випливає наступне твердження:

$$\mathrm{Re}(\lambda_j(A(\varphi))) < 0, \quad \varphi \in \Omega = \bigcup_{\varphi \in \Im_m} \Omega_\varphi \subset \Im_m, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{14}$$

Тепер знайдемо єдиний та обмежений розв'язок $s(\varphi) = \left(s_1(\varphi), \ldots, s_N(\varphi)\right)^T$ системи (11), використовуючи функцію Гріна–Самойленка [2, 4]. Для цього розглянемо три наступні системи:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \qquad \frac{ds}{dt} = -A(\varphi)s + b(\varphi), \tag{15}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \qquad \frac{ds}{dt} = -A(\varphi)s, \tag{16}$$

$$\frac{ds}{dt} = -A(\varphi_t(\varphi))s. \tag{17}$$

Позначимо через $\Omega_{t_0}^t(\varphi, -A)$ матрицант системи (17). Покажемо, що для цього матриціанта справедлива оцінка

$$\left\|\Omega_t^0(\varphi, -A)\right\| \le De^{-\lambda(t-T)}, \qquad t \to +\infty,$$

$$D = \text{const} > 0, \quad -\lambda < 0, \quad \forall\, \varphi \in \Im_m.$$

Оскільки справедлива нерівність (14), то, як було показано раніше, така умова еквівалентна умові

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left[\operatorname{Re}\left(\lambda_j(A(\varphi_t(\varphi)))\right)\right] < 0, \qquad \varphi \in \Im_m, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Нехай T — момент часу, починаючи з якого ця умова виконується для $t \ge T$ та довільних $\varphi \in \Im_m$. Оскільки

$$\left\|\Omega_\tau^0(\varphi, -A)\right\| \le \left\|\Omega_T^0(\varphi, -A)\right\|\left\|\Omega_\tau^T(\varphi, -A)\right\|,$$

а $\left\|\Omega_T^0(\varphi, -A)\right\| \le \tilde{K}$, то нам слід показати, що

$$\left\|\Omega_\tau^T(\varphi, -A)\right\| \le De^{-\lambda(\tau-T)}, \qquad \tau \to +\infty, \quad \tau \ge T.$$

Справедливі наступні оцінки (див. наведені раніше викладки):

1) $$\left\|e^{-A(\varphi_\tau(\varphi))(T-\tau)}\right\| \le D_1e^{-\gamma(\tau-T)} \le D_1e^{-\lambda(\tau-T)};$$

2) $\|A(\varphi_s(\varphi)) - A(\varphi_\tau(\varphi))\| \le \alpha\|\tau - s\|, \quad \alpha = \varepsilon K_1K_2D_1, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0);$

тобто

$$\alpha\int_0^{+\infty} ze^{(\lambda-\gamma)z}dz < 1.$$

А тому згідно з методом заморожування й теоремою 1 маємо оцінку

$$\left\|\Omega_t^T(\varphi, -A)\right\| \le De^{-\lambda(t-T)}, \qquad t \to +\infty, \quad t \ge T. \tag{18}$$

Тут $D > 0$, $\lambda > 0$ не залежні від φ. Тоді

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} 0, & \tau \le 0, \\ -\Omega_\tau^0(\varphi, -A), & \tau > 0, \end{cases} \tag{19}$$

є функцією Гріна–Самойленка системи (16), причому, як видно з теорем, наведених у [2–4], вона буде єдиною.

Умова (18) забезпечує виконання оцінки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| G_0(\tau, \varphi) \| \, d\tau < \tilde{K} < +\infty,$$

яка показує, що (19) дійсно є функцією Гріна–Самойленка системи (16).

Тоді єдиний обмежений розв'язок системи (15) має вигляд

$$s(\varphi) = -\int_0^{+\infty} \Omega_\tau^0(\varphi, -A) b(\varphi_\tau(\varphi)) \, d\tau, \quad \varphi \in \mathfrak{I}_m.$$

Таким чином, ми показали, що дійсно існує єдина квадратична функція $V(\varphi, x)$ така, що задовольняє умови нашої теореми. На завершення залишилося показати, що знак функції $V(\varphi, x)$ буде протилежний знакові $U(\varphi, x)$ і вона також знаковизначена.

Припустимо для визначеності, що форма $U(\varphi_t, x_t)$ від'ємно визначена. Розглянемо форму $V(\varphi_t, x_t)$. Можливі три випадки:

1) форма $V(\varphi_t, x_t)$ може набувати від'ємних значень;

2) форма $V(\varphi_t, x_t)$ додатно стала;

3) форма $V(\varphi_t, x_t)$ додатно визначена.

Якщо б мав місце перший випадок, то функція $V(\varphi_t, x_t)$ не задовольняла б умови теореми 4, тобто тривіальний інваріантний тор системи (1) не був би асимптотично стійким, що суперечить умові нашої теореми.

Що стосується другого випадку, то він взагалі неможливий. Справді, розглянемо x та φ як функції часу φ_t, x_t, що задовольняють систему (1). Виберемо початкові значення φ^0, x^0 таким чином, щоб справджувалося $V(\varphi^0, x^0) = 0$. Це можливо, оскільки в даному випадку функція $V(\varphi, x)$ додатно стала. Але оскільки $\dot{V} < 0$, то функція $V(\varphi, x)$ повинна зменшуватися і ставати від'ємною, що суперечить умові її додатності,

Залишається лише третій випадок, який і доводить нашу теорему.

1. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 301 с.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – К.: Наук. думка, 1990. – 172 с.

Одержано 17.10.96