УДК 517.946

И. М. Колодий (Львов. гос. ун-т, Львов)

ОЦЕНКА МАКСИМУМА МОДУЛЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ *

We study parabolic equations of the divergent form with degeneration. We obtain an estimate for the maximum of module of generalized solutions of the first boundary-value problem with the zero on parabolic boundary.

Вивчаються параболічні рівняння дивергентного вигляду з виродженням. Одержано оцінку максимуму модуля узагальнених розв'язків першої крайової задачі з нулем на параболічній межі.

В работе изучаются вырождающиеся параболические уравнения вида

$$u_t - \operatorname{div} A(x, t, u, u_x) = B(x, t, u, u_x), \tag{1}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \qquad u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}),$$

$$A(x, t, u, u_x) = \big(A_1(x, t, u, u_x), \dots, A_n(x, t, u, u_x)\big)$$

в цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$, где Ω — ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве E^n, $T > 0$.

Для обобщенных решений первой краевой задачи для уравнения (1) с нулем на параболической границе $\Gamma = \{\partial\Omega \times [0, T)\} \cup \{\Omega \times (t = 0)\}$ установлена оценка максимума модуля.

Для доказательства этой оценки используется известная методика Ю. Мозера [1, 2], развитая впоследствии в работах С. Н. Кружкова [3 – 5], Д. Аронсона и Дж. Серрина [6], Н. Трудингера [7, 8]. Впервые вырождающиеся уравнения были рассмотрены в работе С. Н. Кружкова [3], которая послужила толчком для изучения вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. В настоящее время это направление интенсивно разрабатывается в [9 – 22].

1. Функциональные пространства. Основные определения и предложения. Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве E^n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$, с границей $\partial\Omega$. В пространстве E^{n+1} векторов (x, t) через Q обозначим цилиндр $Q \times (0, T)$.

Для любых чисел $p \geq 1$, $q \geq 1$ обозначим через $L_{p,q}(Q)$ $(L_{p,p}(Q) = L_p(Q))$ банахово пространство измеримых в Q функций с нормой

$$\|u\|_{p,q,Q} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q}, \qquad u = u(x, t),$$

$$\|u\|_{p,\infty,Q} = \operatorname*{vrai\,max}_{t \in (0,T)} \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Через $L_p(\Omega)$ обозначим банахово пространство измеримых в Ω функций $u(x)$ с нормой

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

---

* Работа выполнена по программе INTAS-94-2187.

Пусть $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i \geq 1$; обозначим через $W^1_{\overline{p}}(\Omega)$ $(\overset{\circ}{W}{}^1_{\overline{p}}(\Omega))$ подмножество функций $u(x)$ в $W^1_1(\Omega)$ $(\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega))$ с нормами

$$\|u\|_{1,\overline{p},\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{p_i,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}; \qquad \|u\|^0_{1,\overline{p},\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{p_i,\Omega}$$

соответственно.

Обозначим $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(x,t) = (\lambda_1(x,t), \ldots, \lambda_n(x,t))$, где $\lambda_i(x,t)$ — неотрицательные, измеримые на Q функции. Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\overline{\lambda}, Q)$ обозначим подмножество функций $u(x,t)$ в $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_1(Q)$ с нормой

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\overline{\lambda},Q)} = \left(\iint\limits_Q \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t) u_{x_i}^2\right) dx\,dt\right)^{1/2}.$$

Пусть, далее, $W^{1,1}_2(\overline{\lambda}, Q)$ — подмножество функций $u(x,t)$ в $W^{1,1}_1(Q)$ с нормой

$$\|u\|_{W^{1,1}_2(\overline{\lambda},Q)} = \left(\iint\limits_Q \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t) u_{x_i}^2\right) dx\,dt\right)^{1/2},$$

$W^{1,0}_2(\overline{\lambda}, Q)$ $(\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(\overline{\lambda}, Q))$ — подмножества функций из $W^{1,0}_1(Q)$ $(\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_1(Q))$ с нормами

$$\|u\|_{W^{1,0}_2(\overline{\lambda},Q)} = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i^{1/2} u_{x_i}\|_{2,2,Q} + \|u\|_{1,1,Q};$$

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(\overline{\lambda},Q)} = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i^{1/2} u_{x_i}\|_{2,2,Q},$$

$V_2(\overline{\lambda}, Q)$ $(\overset{\circ}{V}_2(\overline{\lambda}, Q))$ — подмножество функций $u(x,t)$ в $W^{1,0}_1(Q)$ $(\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_1(Q))$, для которых конечна величина

$$\left(\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(0,T)} \int\limits_\Omega u^2\,dx + \iint\limits_Q \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t) u_{x_i}^2\,dx\,dt\right)^{1/2}.$$

Отсюда вытекает, что $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\overline{\lambda}, Q) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_1(Q)$, $W^{1,1}_2(\overline{\lambda}, Q) \subset W^{1,1}_1(Q)$. Следовательно, для областей Ω с достаточно регулярными границами $\partial\Omega$ можно говорить о граничных значениях функций из $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\overline{\lambda}, Q)$ и $W^{1,1}_2(\overline{\lambda}, Q)$ по норме L_1.

Предположим, что вектор-функция $A(x,t,u,\overline{p})$ и функция $B(x,t,u,\overline{p})$, где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, определены для всех u, $\overline{p}$ и $(x,t) \in Q$, а также, что $A(x,t,u,u_x)$, $B(x,t,u,u_x)$ измеримы при любой функции $u(x,t) \in W^{1,0}_1(Q)$. Пусть для любых u, $\overline{p}$ и $(x,t) \in Q$ выполняются следующие неравенства:

$$\begin{cases} A(x,t,u,\overline{p})\overline{p} \geq a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t)|p_i|^2 - d(x,t)|u|^2 - g(x,t), \\ |A_i(x,t,u,\overline{p})| \leq a_2 \lambda_i(x,t)|p_i| + b(x,t)|u| + e(x,t), \\ |B(x,t,u,\overline{p})| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(x,t)|p_i| + \omega(x,t)|u| + f(x,t). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь a_1, a_2 — положительные константы, а функции $\lambda_i(x,t)$, $d(x,t)$, $g(x,t)$, $b(x,t)$, $e(x,t)$, $c_i(x,t)$, $\omega(x,t)$, $f(x,t)$ неотрицательны.

Всюду в данной работе будем считать, что

$$\begin{cases} \lambda_i^{-1}(x,t) \in L_{t_i,t_0}(Q), \\ \text{а функции } \lambda_i(x,t),\ d(x,t),\ g(x,t),\ c_i^2(x,t)\lambda_i^{-1}(x,t),\ e^2(x,t)\lambda_i^{-1}(x,t), \\ b^2(x,t)\lambda_i^{-1}(x,t),\ \omega(x,t),\ f(x,t) \text{ принадлежат } L_{p,q}(Q), \text{ причем числа} \\ p,\ q,\ t_i, t_0 \text{ удовлетворяют неравенствам} \\ \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1}{q} < 1, \quad \text{или, что то же,} \quad \dfrac{\theta}{p'} + \dfrac{1}{q'} > \theta, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\theta = n\left(2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{t_0}\right), \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} < 2,$$

а p', q' — сопряженные по Гельдеру числа с числами p, q.

Через C будем обозначать различные константы.

Сформулируем утверждение, которое нетрудно доказать, применяя неравенство Гельдера.

Лемма 1. *Если* $u \in L_{\alpha_1,\alpha_2}(Q) \bigcap L_{\beta_1,\beta_2}(Q)$, *то* $u \in L_{\gamma_1,\gamma_2}(Q)$, *где*

$$\frac{1}{\gamma_1} = \frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\mu}{\beta_1}, \quad \frac{1}{\gamma_2} = \frac{\lambda}{\alpha_2} + \frac{\mu}{\beta_2}, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \lambda + \mu = 1,$$

и справедлива оценка

$$\| u \|_{\gamma_1,\gamma_2,Q} \leq \|u\|^{\lambda}_{\alpha_1,\alpha_2,Q} \, \|u\|^{\mu}_{\beta_1,\beta_2,Q}. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть функция* $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(\overline{\lambda}, Q)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\| u \|_{q_1,q_2,Q} \leq C \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i^{1/2} u_{x_i}\|_{2,2,Q}, \tag{5}$$

где

$$q_1 = 2n\left(n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i}\right)^{-1}, \qquad q_2 = \frac{2t_0}{t_0+1},$$

C зависит от n, t_i, t_0, q_1, $\|\lambda_i^{-1}\|_{t_i,t_0,Q}$ в том случае, если $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} > 2$; q_1 — любое число ≥ 1, $q_2 = \dfrac{2t_0}{t_0+1}$, C зависит от n, t_i, t_0, q_1, $|\Omega|$, $\|\lambda_i^{-1}\|_{t_i,t_0,Q}$ в том случае, если $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} \leq 2$.

Доказательство. Функции $\lambda_i^{1/2} u_{x_i} \in L_{2,2}(Q)$. Поэтому на почти всех сечениях $t \in (0,T)$ функции $\lambda_i^{1/2} u_{x_i} \in L_2(\Omega)$. Определим числа $m_i = \dfrac{2t_i}{t_i+1}$. Используя неравенство Гельдера, легко получаем

$$\| u_{x_i} \|_{m_i,\Omega} = \|\lambda_i^{-1/2} \lambda_i^{1/2} u_{x_i}\|_{2t_i/(t_i+1),\Omega} \leq \|\lambda_i^{-1}\|^{1/2}_{t_i} \|\lambda_i^{1/2} u_{x_i}\|_{2,\Omega}. \tag{6}$$

Заметим, что $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i+1}{2t_i} = \frac{1}{2}\left(n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i}\right)$ и потому $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} > 1$, если $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} > 2$, и $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \le 1$, если $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} \le$ ≤ 2.

При почти всех $t \in (0, T)$ для функции $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{\overline{m}}(\Omega)$, где $\overline{m} =$ $= (m_1, \ldots, m_n)$, справедлива оценка [5, с. 308], [23–25]:

$$\| u \|_{m,\Omega} \le C \prod_{i=1}^{n} \| u_{x_i} \|_{m_i,\Omega}^{1/n}, \tag{7}$$

где $m = n\left(-1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}\right)^{-1}$, $C = C(n, m_i, m)$, если $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} > 1$; m — любое число ≥ 1, $C = C(n, m_i, m, |\Omega|)$, если $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \le 1$. Объединяя оценки (6), (7) с учетом выбора чисел, получаем

$$\| u \|_{q_1,\Omega} \le C \prod_{i=1}^{n} \left(\|\lambda_i^{-1}\|_{t_i,\Omega}^{1/2n} \|\lambda_i^{1/2} u_{x_i}\|_{2,\Omega}^{1/n} \right),$$

где $q_1 = 2n\left(n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i}\right)^{-1}$, $C = C(n, t_i, q_1)$, если $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} > 2$; q_1 — любое число ≥ 1, $C = C(n, t_i, q_1, |\Omega|)$, если $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} \le 2$. Возведя обе части последнего неравенства в степень $q_2 = 2t_0/(t_0+1)$ и интегрируя по переменной t с применением неравенства Гельдера, получаем

$$\| u \|_{q_1,q_2,Q} \le C \prod_{i=1}^{n} \|\lambda_i^{-1}\|_{t_i,t_0,Q}^{1/2n} \prod_{i=1}^{n} \|\lambda_i^{1/2} u_{x_i}\|_{2,2,Q}^{1/n} \le C \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i^{1/2} u_{x_i}\|_{2,2,Q}.$$

Лемма 3. *Пусть функция* $u(x,t) \in \overset{\circ}{V}_2(\overline{\lambda}, Q)$. *Предположим, что* $|\Omega| = 1$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|u\|_{2\tilde{p}',2\tilde{q}',Q}^2 \le C T^{\tilde{\nu}} \left(\|u\|_{2,\infty,Q}^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i^{1/2} u_{x_i}\|_{2,2,Q}^2 \right), \tag{8}$$

где

$$\frac{\theta}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} \le 1, \quad \text{если} \quad n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} \ne 2,$$
$$\frac{\theta}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} < 1, \quad \text{если} \quad n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} = 2, \tag{9}$$

$$\theta = n\left(2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{t_0}\right), \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} < 2, \qquad \tilde{\nu} = 1 - \frac{\theta}{\tilde{p}} - \frac{1}{\tilde{q}}.$$

Константа C зависит от n, t_i, t_0, $\|\lambda_i^{-1}\|_{t_i,t_0,Q}$, причем в случае $n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 2$ число $\tilde{\nu}$ следует заменить на $\frac{1}{2}\tilde{\nu}$, а константа C в этом случае зависит и от $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, θ. Числа $\tilde{p}$, $\tilde{p}'$ и $\tilde{q}$, $\tilde{q}'$ — сопряженные по Гельдеру.

Доказательство. Пусть s', q_1, q_2 — действительные числа ≥ 1. Тогда согласно неравенству Гельдера и лемме 1 имеем

$$\|u\|^2_{2\tilde{p}',2\tilde{q}',Q} \leq T^{\tilde{\nu}} \|u\|^2_{2\tilde{p}',2\tilde{q}',Q} \leq T^{\tilde{\nu}} \|u\|^{\lambda}_{q_1,q_2,Q} \|u\|^{2-\lambda}_{2,\infty,Q} \tag{10}$$

при условии, что $\tilde{\nu} \geq 0$, $0 \leq \lambda \leq 2$ и

$$\frac{1}{\tilde{q}'} = \frac{1}{s'} + \tilde{\nu}, \qquad \frac{1}{\tilde{p}'} = \frac{\lambda}{q_1} + \frac{2-\lambda}{2}, \qquad \frac{1}{s'} = \frac{\lambda}{q_2}.$$

Эти соотношения заключают в себе

$$\lambda = \frac{2q_1}{q_1-2}\frac{1}{\tilde{p}}, \qquad \tilde{\nu} = 1 - \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{2q_1}{q_1-2}\frac{1}{\tilde{p}}\frac{1}{q_2}. \tag{11}$$

1) Если $n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} > 2$, то выберем $q_1 = \dfrac{2n}{n-2+\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}}$, $q_2 = \dfrac{2t_0}{t_0+1}$.

Тогда

$$\lambda = \frac{n}{\tilde{p}}\frac{2}{2-\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}}, \qquad \tilde{\nu} = 1 - \frac{\theta}{\tilde{p}} - \frac{1}{\tilde{q}}, \tag{12}$$

а условия (9) обеспечивают неравенства $\tilde{\nu} \geq 0$, $0 < \lambda \leq 2$.

Требуемая оценка (8) следует из (10) с применением неравенства Юнга и леммы 2.

2) Если $n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 2$, то выберем $q_1 = 2 + \frac{4\theta}{\tilde{p}}\left(1 - \frac{\theta}{\tilde{p}} - \frac{1}{\tilde{q}}\right)^{-1}$, $q_2 = \dfrac{2t_0}{t_0+1}$. Тогда

$$\lambda = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\tilde{q}'} + \frac{\theta}{\tilde{p}'}\right), \qquad \tilde{\nu} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\theta}{\tilde{p}} - \frac{1}{\tilde{q}}\right),$$

т. е. $\tilde{\nu}$ теперь в два раза меньше, чем в предыдущем случае (см. (12)). Условия (9), как и в предыдущем случае, обеспечивают неравенства $\tilde{\nu}$, $0 < \lambda \leq 2$. Требуемая оценка (8) следует так же, как и в предыдущем случае.

3) Случай $n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} < 2$ требует отдельного рассмотрения (см. [6]). В этом случае $n = 1$, $t_i = t_1$, а неравенство $n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} < 2$ примет вид $1 + \frac{1}{t_1} < 2$, т. е. $t_1 > 1$.

Заметим, что при любом $m \geq 1$ и любом $d > 0$ справедлива оценка

$$|u|^m \leq \int_0^d m|u|^{m-1}|u_{x_1}|\,dx_1 + \frac{1}{d}\int_0^d |u|^m\,dx_1. \tag{13}$$

Далее мы будем рассматривать число $\mu \in (1; 2]$. Оценим первый интеграл в правой части (13) с помощью неравенства Юнга:

$$\int_0^d |u|^{m-1}|u_{x_1}|dx_1 = \int_0^d |u|^{m-1} d^{-(m-1)/m} d^{(m-1)/m}|u_{x_1}|\,dx_1 \le$$

$$\le \frac{m-1}{md}\int_0^d |u|^m\,dx_1 + \frac{d^{m-1}}{m}\int_0^d |u_{x_1}|^m\,dx_1.$$

Подставляя это в (13), получаем

$$|u|^m \le d^{m-1}\int_0^d |u_{x_1}|^m\,dx_1 + \frac{m}{d}\int_0^d |u|^m\,dx_1. \tag{14}$$

Оба интеграла в правой части (14) оценим с помощью неравенства Гельдера, выбрав при этом m так, чтобы $\dfrac{2}{2-m} = t_1$, т. е. $m = \dfrac{2t_1}{t_1+1}$:

$$\int_0^d |u_{x_1}|^m\,dx_1 = \int_0^d |u_{x_1}|^m \lambda_1^{m/2}\lambda_1^{-m/2}\,dx_1 \le$$

$$\le \left(\int_0^d \lambda_1|u_{x_1}|^2\,dx_1\right)^{m/2}\left(\int_0^d \lambda_1^{-m/(2-m)}\,dx_1\right)^{(2-m)m/2m} =$$

$$= \left(\int_0^d \lambda_1|u_{x_1}|^2\,dx_1\right)^{m/2}\left(\int_0^d \lambda_1^{-t_1}\,dx_1\right)^{m/2t_1},$$

$$\int_0^d |u|^m\,dx_1 \le d^{(2-m)/2}\left(\int_0^d |u|^2\,dx_1\right)^{m/2}.$$

Подставляя эти оценки в (14), получаем

$$|u|^m \le d^{m-1}\left(\int_0^d \lambda_1^{-t_1}\,dx_1\right)^{m/2t_1}\left(\int_0^d \lambda_1|u_{x_1}|^2\,dx_1\right)^{m/2} + m\,d^{-m/2}\left(\int_0^d u^2\,dx_1\right)^{m/2}.$$

Возведя обе части этого неравенства в степень $2/m$, получим*)

$$|u|^2 \le C\left[d^{2(m-1)/m}\left(\int_0^d \lambda_1^{-t_1}\,dx_1\right)^{1/t_1}\int_0^d \lambda_1 u_{x_1}^2\,dx_1 + d^{-1}\int_0^d u^2\,dx_1\right] \tag{15}$$

и по неравенству Миньковского при $s \ge 1$:

$$\left(\int_0^d |u|^{2s}\,dx_1\right)^{1/s} \le C d^{1/s}\left[d^{2(m-1)/m}\left(\int_0^d \lambda_1^{-t_1}\,dx_1\right)^{1/t_1}\int_0^d \lambda_1 u_{x_1}^2\,dx_1 + d^{-1}\int_0^d u^2\,dx_1\right].$$

Мы можем считать, что функции u и λ_1 определены на всей оси x_1, продолжив их нулем вне интервала определения. Символом $\int$ будем обозначать интегрирование по всей оси x_1. Просуммируем последнее неравенство *по всем интервалам* $(jd, (j+1)d)$. Тогда получим

*) Здесь мы воспользовались неравенством

$$\min(1, n^{\alpha-1})\sum_{i=1}^n a_i^\alpha \le \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^\alpha \le \max(1, n^{\alpha-1})\sum_{i=1}^n a_i^\alpha, \quad a_i \ge 0, \quad \alpha \ge 0.$$

$$\left(\int u^{2s}\,dx_1\right)^{1/s} \le Cd^{1/s}\left[d^{2(m-1)/m}\left(\int \lambda_1^{-t_1}\,dx_1\right)^{1/t_1}\int \lambda_1 u_{x_1}^2\,dx_1 + d^{-1}\int u^2\,dx_1\right].$$

Перепишем это неравенство в виде

$$\left(\int u^{2s}\,dx_1\right)^{1/s} \le Cd^{1/s}\left(d^a\mathcal{A} + d^{-b}\mathcal{B}\right), \tag{16}$$

где $a = 2\dfrac{m-1}{m} = 1 - \dfrac{1}{t_1} > 0$, $b = 1$,

$$\mathcal{A} = \left(\int \lambda_1^{-t_1}\,dx_1\right)^{1/t_1}\int \lambda_1 u_{x_1}^2\,dx_1, \qquad \mathcal{B} = \operatorname*{vrai\,max}_{t\in(0,T)}\int u^2\,dx_1.$$

Функция $d^a\mathcal{A} + d^{-b}\mathcal{B}$ имеет минимум при $d = \left(b\,\mathcal{B}(a\mathcal{A})^{-1}\right)^{1/(a+b)}$, поэтому, выбрав d равным именно этому числу в (16), получим

$$\left(\int u^{2s}\,dx_1\right)^{1/s} \le C\mathcal{A}^{(b-1/s)/(a+b)}\mathcal{B}^{(a+1/s)/(a+b)}.$$

Возведя обе части этого неравенства в степень $\dfrac{a+b}{b-1/s}\dfrac{t_0}{t_0+1}$, запишем

$$\left(\int u^{2s}\,dx_1\right)^{(a+b)t_0/s(b-1/s)(t_0+1)} \le C\mathcal{A}^{t_0/(t_0+1)}\mathcal{B}^{(a+1/s)t_0/(b-1/s)(t_0+1)} \le$$

$$\le C\left(\int \lambda_1^{-t_1}\,dx_2\right)^{t_0/t_1(t_0+1)}\left(\int \lambda_1 u_{x_1}^2\,dx_1\right)^{t_0/(t_0+1)}\mathcal{B}^{(a+1/s)t_0/(b-1/s)(t_0+1)}.$$

Проинтегрируем это неравенство по $t\in(0,T)$ с применением неравенства Гельдера:

$$\int_0^T\left(\int u^{2s}\,dx_1\right)^{(a+b)t_0/s(b-1/s)(t_0+1)}dt \le C\left(\int_0^T\left(\int \lambda_1^{-t_1}\,dx_1\right)^{t_0/t_1}dt\right)^{t_0/t_0(t_0+1)} \times$$

$$\times\left(\int_0^T\int \lambda_1 u_{x_1}^2\,dx_1\,dt\right)^{t_0/(t_0+1)}\mathcal{B}^{(a+1/s)t_0/(b-1/s)(t_0+1)}.$$

Возведя обе части последнего неравенства в степень $\dfrac{t_0+1}{t_0}\dfrac{b-1/s}{a+b} = \dfrac{1}{k}$, получим

$$\|u\|_{2s,2k,Q}^2 \le C\|\lambda_1^{1/2}u_{x_1}\|_{2,2,Q}^{2(b-1/s)/(a+b)}\|u\|_{2,\infty,Q}^{2(a+1/s)/(a+b)} \le$$

$$\le C\left(\|\lambda_1^{1/2}u_{x_1}\|_{2,2,Q}^2 + \|u\|_{2,\infty,Q}^2\right).$$

Согласно неравенству Гельдера $\|u\|_{2\bar{p}',2\bar{q}',Q}^2 \le T^{\tilde{\nu}}\|u\|_{2\bar{p}',2r',Q}^2$, где $\dfrac{1}{\bar{q}'} = \dfrac{1}{r'} + \tilde{\nu}$, $\tilde{\nu}\ge 0$. Положим $\bar{p}' = s$, $r' = k$, тогда

$$\|u\|_{2\bar{p}',2\bar{q}',Q}^2 \le T^{\tilde{\nu}}\|u\|_{2\bar{p}',2r',Q}^2 = T^{\tilde{\nu}}\|u\|_{2s,2k,Q}^2 \le$$

$$\le CT^{\tilde{\nu}}\left(\|\lambda_1^{1/2}u_{x_1}\|_{2,2,Q}^2 + \|u\|_{2,\infty,Q}^2\right),$$

где

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\bar{q}'} - \frac{1}{r'} = 1 - \frac{1}{\bar{q}}\frac{t_0+1}{t_0}\frac{1}{2-1/t_1} = 1 - \frac{1}{\bar{q}} - \frac{\theta}{\bar{p}} \ge 0.$$

***Замечание* 1.** Если в лемме 3 положить $\tilde{p}' = p'$, $\tilde{q}' = q'$, где $\dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1}{q} < 1$, то получим оценку

$$\|u\|^2_{2p',2q',Q} \leq CT^{\nu}\left(\|u\|^2_{2,\infty,Q} + \sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{1/2}u_{x_i}\|^2_{2,2,Q}\right), \tag{17}$$

где

$$\nu = 1 - \frac{\theta}{p} - \frac{1}{q} > 0, \quad \theta = n\left(2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{t_0}\right), \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} < 2,$$

с тем же замечанием относительно числа ν, что и в лемме 3.

***Замечание* 2.** Положим в лемме 3 $\tilde{p}' = \sigma p'$, $\tilde{q}' = \sigma q'$. Тогда, если:

1) $n + \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{t_i} \neq 2$, то условие $\dfrac{\theta}{\tilde{p}'} + \dfrac{1}{\tilde{q}'} \geq \theta$ $\left(\text{что эквивалентно требованию } \dfrac{\theta}{\tilde{p}'} + \dfrac{1}{\tilde{q}'} \leq 1\right)$ перейдет в условие $\sigma \leq \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{\theta q'} = 1 + \dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{\theta}{p'} + \dfrac{1}{q'} - \theta\right)$. Выберем $\sigma = 1 + \dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{\theta}{p'} + \dfrac{1}{q'} - \theta\right)$. Тогда $\tilde{\nu} = 0$, а $\sigma > 1$ ввиду условий (3).

2) $n + \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{t_i} = 2$, то условие $\dfrac{\theta}{\tilde{p}'} + \dfrac{1}{\tilde{q}'} > \theta$ перейдет в условие $\sigma < \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{\theta q'} = 1 + \dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{\theta}{p'} + \dfrac{1}{q'} - \theta\right)$. Выберем $\sigma = 1 + \dfrac{1}{2\theta}\left(\dfrac{\theta}{p'} + \dfrac{1}{q'} - \theta\right)$. Тогда $\tilde{\nu} = \dfrac{1}{4\sigma}\left(\dfrac{\theta}{p'} + \dfrac{1}{q'} - \theta\right)$, $\tilde{\nu} = 0$ и $\sigma > 1$ ввиду условий (3).

После сделанной замены неравенство (8) будет иметь вид

$$\|u\|^2_{2\sigma p',2\sigma q',Q} \leq CT^{\tilde{\nu}}\left(\|u\|^2_{2,\infty,Q} + \sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{1/2}u_{x_i}\|^2_{2,2,Q}\right) \tag{18}$$

с показателями p, q, удовлетворяющими неравенству $\dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1}{q} < 1$, или, что то же, $\dfrac{\theta}{p'} + \dfrac{1}{q'} > \theta$, где

$$\theta = n\left(2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{t_0}\right), \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} < 2,$$

а

$$\sigma = 1 + \frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{p'} + \frac{1}{q'} - \theta\right) > 1, \quad \tilde{\nu} = 0,$$

если $n + \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{t_i} \neq 2$;

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2\theta}\left(\frac{\theta}{p'} + \frac{1}{q'} - \theta\right) > 1, \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{4\sigma}\left(\frac{\theta}{p'} + \frac{1}{q'} - \theta\right) > 0,$$

если $n + \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{t_i} = 2$.

***Замечание* 3.** Заметим, что справедлива элементарная оценка (см. [6]):

$$\| u \|_{2,\infty,Q} \le C(\| u \|_{2,2,Q} + \| u_t \|_{2,2,Q}).$$

Следовательно, $W_2^{1,1}(\overline{\lambda}, Q) \subset V_2(\overline{\lambda}, Q)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\overline{\lambda}, Q) \subset \overset{\circ}{V}_2(\overline{\lambda}, Q)$.

Определение. Функция $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\overline{\lambda}, Q)$ называется обобщенным решением первой краевой задачи для уравнения (1) при условиях (2), (3) в цилиндре Q с нулем на параболической границе Γ, если для любой функции $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{V}_2(\overline{\lambda}, Q)$ справедливо интегральное тождество

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (u_t \varphi + A\varphi_x - B\varphi)\, dx\, dt = 0, \tag{19}$$

где $(\tau_1, \tau_2) \subset (0, T)$.

2. Оценка максимума модуля обобщенного решения первой краевой задачи с нулем на параболической границе цилиндра.

Теорема. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение уравнения* (1) *в цилиндре Q первой краевой задачи с нулем на параболической границе Γ. Тогда*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q} |u(x,t)| \le C\kappa, \tag{20}$$

где константа C зависит лишь от T, $|\Omega|$, n, p, q, θ, a_1, нормы $\lambda_i^{-1}(x,t)$ в $L_{t_i,t_0}(Q)$ и норм функций $\lambda_i(x,t)$, $c_i^2(x,t)\lambda_i^{-1}(x,t)$, $d(x,t)$, $\omega(x,t)$ в $L_{p,q}(Q)$, а $\kappa = \|g(x,t)\|_{p,q,Q}^{1/2} + \|f(x,t)\|_{p,q,Q}$.

Доказательство. Заметим, что структурное неравенство

$$|A_i(x,t,u,\overline{p})| \le a_2 \lambda_i(x,t)|p_i| + b(x,t)|u| + e(x,t)$$

не используется в доказательстве теоремы. Оно нужно лишь для существования интеграла в интегральном тождестве (19).

Предположим, что $|\Omega| = T = 1$. На заключительном этапе доказательства это условие нормировки будет устранено.

Вначале докажем, что

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q} u(x,t) \le C\left(\|\tilde{u}\|_{2,\infty,Q} + \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i^{1/2} \tilde{u}_{x_i}\|_{2,2,Q} + \kappa \right), \tag{21}$$

где $\tilde{u} = \operatorname*{vrai\,max}_{Q}(0, u)$.

Положим $\overline{u} = \tilde{u} + \kappa$. Для фиксированных чисел $\beta \ge 1$ и $l > \kappa$ определим функции

$$\mathcal{J}(u) = \begin{cases} \overline{u}^{\beta} - \kappa^{\beta}, & -\infty < u \le l - \kappa, \\ l^{\beta-1}\overline{u} - \kappa^{\beta}, & l - \kappa \le u < +\infty, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta+1}[\overline{u}^{\beta+1} - (\beta+1)\overline{u}\kappa^{\beta} + \beta\kappa^{\beta+1}], & -\infty < u \le l - \kappa, \\ \dfrac{1}{2} l^{\beta-1}\overline{u}^2 - \kappa^{\beta}\overline{u} + \dfrac{1}{\beta+1}\left(\beta\kappa^{\beta+1} - \dfrac{\beta-1}{2} l^{\beta+1}\right), & l - \kappa \le u < +\infty, \end{cases}$$

$\mathcal{J}(u)$ — неотрицательная, кусочно-гладкая функция с „углами" в точках $u = 0$ и $u = l - \kappa$, а $\mathcal{H}(u)$ — неотрицательная непрерывно-дифференцируемая функция на $(-\infty, +\infty)$ и $\mathcal{H}'(u) = \mathcal{J}(u)$.

Пусть $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau$. Положим в интегральном тождестве (19) $\varphi(x, t) = \mathcal{J}(u)$ и учтем, что

$$\int_0^\tau \int_\Omega \varphi u_t \, dx\, dt = \int_0^\tau \int_\Omega \mathcal{J}(u) u_t \, dx\, dt = \int_0^\tau \int_\Omega (\mathcal{H}(u))_t \, dx\, dt = \int_\Omega \mathcal{H}(u)|_{t=\tau} \, dx .$$

В результате получим, что для почти всех $\tau \in (0;1)$

$$\int_\Omega \mathcal{H}(u)|_{t=\tau} \, dx + \int_0^\tau \int_\Omega (\varphi_x A - \varphi B) \, dx\, dt = 0, \qquad \varphi_x = \mathcal{J}'(u) u_x. \tag{22}$$

Для того чтобы оценить второй интеграл в (22), рассмотрим два случая: $\varphi > 0$ и $\varphi = 0$. Если $\varphi > 0$, то необходимо $u > 0$ и $\overline{u} = u + \kappa$, $u_x = \overline{u}_x$, $\overline{u} > u = |u|$. Поэтому на множестве точек (x, t), где $\varphi > 0$ и $0 < t < \tau$, используя (2), имеем

$$\begin{aligned} \varphi_x A - \varphi B &= \mathcal{J}'(u) u_x A - \mathcal{J}(u) B \geq \\ &\geq \mathcal{J}'(u) \left(a_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i(x,t) |\overline{u}_{x_i}|^2 - d(x,t)\overline{u}^2 - g(x,t) \right) - \\ &- \mathcal{J}(u) \left(\sum_{i=1}^n c_i(x,t) |\overline{u}_{x_i}| + \omega(x,t)\overline{u} + f(x,t) \right). \end{aligned} \tag{23}$$

Учитывая, что $\mathcal{J}^2(u) \leq \overline{u}^{\beta+1} \mathcal{J}'(u)$, согласно неравенству Юнга имеем

$$c_i(x,t) \mathcal{J}(u) |\overline{u}_{x_i}| \leq \frac{a_1}{2} \mathcal{J}'(u) \lambda_i(x,t) |\overline{u}_{x_i}|^2 + \frac{1}{2a_1} \frac{c_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)} \overline{u}^{\beta+1}.$$

Поскольку $\mathcal{J}(u) \leq \overline{u}^{\beta}$, $\kappa \leq \overline{u}$, $\mathcal{J}'(u) \leq \beta \overline{u}^{\beta-1}$, то имеем

$$\mathcal{J}(u) \left(\omega(x,t)\overline{u} + f(x,t) \right) \leq \left(\omega(x,t) + \frac{f(x,t)}{\kappa} \right) \overline{u}^{\beta+1},$$

$$\mathcal{J}'(u) \left(d(x,t)\overline{u}^2 + g(x,t) \right) \leq \beta \left(d(x,t) + \frac{g(x,t)}{\kappa^2} \right) \overline{u}^{\beta+1}.$$

Подставляя эти оценки в (23), получаем

$$\frac{a_1}{2} \mathcal{J}'(u) \sum_{i=1}^n \lambda_i(x,t) |\overline{u}_{x_i}|^2 \leq \varphi_x A - \varphi B + \beta F \overline{u}^{\beta+1}, \tag{24}$$

где

$$F = \left(d(x,t) + \frac{g(x,t)}{\kappa^2} \right) + \left(\omega(x,t) + \frac{f(x,t)}{\kappa} \right) + \frac{1}{2a_1} \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}.$$

Неравенство (24) доказано на множестве точек (x, t), где $\varphi > 0$ и $0 < t < \tau$. Если $\varphi = 0$ и $0 < t < \tau$, то $u \leq 0$ и $\overline{u}_x = 0$; следовательно, (24) имеет место и в этом случае, т. е. оно справедливо на множестве $\Omega \times (0;\tau)$.

Интегрируя (24) по $\Omega \times (0;\tau)$ и учитывая (22), получаем

$$\int_\Omega \mathcal{H}(u)|_{t=\tau} \, dx + \frac{a_1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega \mathcal{J}'(u) \sum_{i=1}^n \lambda_i(x,t) |\overline{u}_{x_i}|^2 \, dx\, dt \leq \beta \int_0^\tau \int_\Omega F \overline{u}^{\beta+1} \, dx\, dt. \tag{25}$$

Устремив l к ∞, запишем

$$\lim_{l \to \infty} \mathcal{H}(u) = \frac{1}{\beta+1} \left(\overline{u}^{\beta+1} - (\beta+1)\kappa^\beta \overline{u} + \beta \kappa^{\beta+1} \right), \qquad \lim_{l \to \infty} \mathcal{J}'(u) = \beta \overline{u}^{\beta-1}.$$

Перейдем к пределу в левой части (25), применяя лемму Фату. Тогда получим неравенство

$$\frac{1}{\beta+1}\int\limits_{\Omega}(\overline{u}^{\beta+1}-(\beta+1)\kappa^{\beta}\overline{u}+\beta\kappa^{\beta+1})|_{t=\tau}\,dx\;+$$

$$+\;\frac{a_1\beta}{2}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\overline{u}^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|\overline{u}_{x_i}|^2\,dx\,dt\;\le\;\beta\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}F\overline{u}^{\beta+1}\,dx\,dt, \qquad (26)$$

справедливое для почти всех $\tau\in(0\,;1)$.

Если в качестве функции φ в интегральном тождестве (19) мы выберем функцию $\mathcal{J}(u)$, то предыдущие рассуждения приведут нас, очевидно, к неравенству

$$\frac{1}{\beta+1}\int\limits_{\Omega}(\overline{u}^{\beta+1}-(\beta+1)\kappa^{\beta}\overline{u}+\beta\kappa^{\beta+1})|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2}\,dx\;+$$

$$+\;\frac{a_1\beta}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\overline{u}^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|\overline{u}_{x_i}|^2\,dx\,dt\;\le\;\beta\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}F\overline{u}^{\beta+1}\,dx\,dt, \qquad (27)$$

справедливому для почти всех τ_1,τ_2 из $(0\,;1)$.

Положим $r=(\beta+1)/2$ и $v=\overline{u}^{r}$. Тогда $|v_x|^2=r^2\overline{u}^{\beta-1}|\overline{u}_x|^2$. Поскольку первый интеграл в (26) неотрицателен, то, опустив его и устремив τ к 1, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{1/2}v_{x_i}\|_{2,2,Q}^2\;\le\;\frac{2r^2}{a_1}\|Fv^2\|_{1,1,Q}\;\le$$

$$\le\;\frac{2}{a_1}r^2\|F\|_{p,q,Q}\|v\|_{2p',2q',Q}^2\;\le\;Cr^2\|v\|_{2p',2q',Q}^2.$$

Введем специальную норму $|||v|||=\sup\|v\|_{2p',2q',Q}$, где $\sup$ берется по всевозможным парам p', q', удовлетворяющим условию $\theta/p+1/q<1$ (см. (3)). Тогда последнее неравенство перепишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{1/2}v_{x_i}\|_{2,2,Q}^2\;\le\;Cr^2|||v|||^2. \qquad (28)$$

Далее согласно неравенству Юнга

$$\frac{1}{\beta+1}[\overline{u}^{\beta+1}-(\beta+1)\kappa^{\beta}\overline{u}+\beta\kappa^{\beta+1}]\;\ge\;\frac{1}{2(\beta+1)}\overline{u}^{\beta+1}-\frac{\beta}{\beta+1}\kappa^{\beta+1}.$$

Учтя это неравенство и опустив второй интеграл в (26), для почти всех $\tau\in(0\,;1)$ имеем оценку

$$\frac{1}{2(\beta+1)}\int\limits_{\Omega}v^2|_{t=\tau}\,dx\;\le\;\beta\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}F\overline{u}^{\beta+1}\,dx\,dt+\frac{\beta}{\beta+1}\kappa^{\beta+1}\;\le$$

$$\le\;\beta\|F\|_{p,q,Q}\|v\|_{2p',2q',Q}^2+\frac{\beta}{\beta+1}\kappa^{\beta+1}\;\le\;C\beta|||v|||^2+\frac{\beta}{\beta+1}|||v|||^2.$$

Следовательно,

$$\|v\|_{2,\infty,Q}^2\;\le\;Cr^2|||v|||^2. \qquad (29)$$

Подставим функцию $v-\kappa^{r}\ge 0$ в (18). Тогда

$$\|v-\kappa^r\|_{2\sigma p', 2\sigma q', Q} \le C\left(\|v-\kappa^r\|_{2,\infty,Q} + \sum_{i=1}^n \|\lambda_i^{1/2}(v-k^r)_{x_i}\|_{2,2,Q}\right) \le$$

$$\le C\left(\|v\|_{2,\infty,Q} + \sum_{i=1}^n \|\lambda_i^{1/2} v_{x_i}\|_{2,2,Q} + \kappa^r\right).$$

Отсюда с учетом (28), (29) получаем

$$\|v\|_{2\sigma p', 2\sigma q', Q} \le C\left(\|v\|_{2,\infty,Q} + \sum_{i=1}^n \|\lambda_i^{1/2} v_{x_i}\|_{2,2,Q} + \kappa^r\right) \le Cr|||v|||.$$

Так как

$$\|v\|_{2\sigma p', 2\sigma q', Q} = |||v^\sigma|||_{2p',2q',Q}^{1/\sigma} \quad \text{и} \quad |||v^\sigma|||^{1/\sigma} = \sup |||v^\sigma|||_{2p',2q',Q}^{1/\sigma},$$

то последнее неравенство перепишется в виде $|||v^\sigma|||^{1/\sigma} \le Cr|||v|||$. И так как $v = \bar{u}^r$, то

$$|||\bar{u}^{\sigma r}|||^{1/\sigma r} \le C^{1/r} r^{1/r} |||\bar{u}^r|||^{1/r}. \tag{30}$$

Построим итерационный процесс. Положим $r = \sigma^m$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $\Theta_m = |||\bar{u}^{\sigma^m}|||^{1/\sigma^m}$. Тогда неравенство (30) можно переписать в виде $\Theta_{m+1} \le$ $\le C^{1/\sigma^m} \sigma^{m/\sigma^m} \Theta_m$. Итерируя это неравенство, получаем

$$\Theta_{m+1} \le C^{\sum_{j=0}^m \frac{1}{\sigma^j}} \sigma^{\sum_{j=0}^m \frac{j}{\sigma^j}} \Theta_0. \tag{31}$$

Ясно, что $\sum_{j=0}^\infty \dfrac{1}{\sigma^j} < \infty$, $\sum_{j=0}^\infty \dfrac{j}{\sigma^j} < \infty$. Поэтому, устремив m к ∞ в (31), получим

$$\operatorname*{vrai\,max}_Q \bar{u} \le C\Theta_0 = C|||\bar{u}|||. \tag{32}$$

Поскольку, в силу (17),

$$|||\bar{u}||| \le |||\tilde{u}||| + \kappa \le C\left(\|\tilde{u}\|_{2,\infty,Q} + \sum_{i=1}^n \|\lambda_i^{1/2}\tilde{u}_{x_i}\|_{2,2,Q} + \kappa\right), \tag{33}$$

то из неравенств (32) и (33) следует (21).

Вторая часть доказательства связана с оценкой норм $\|\tilde{u}\|_{2,\infty,Q}$ и $\|\lambda_i^{1/2}\tilde{u}_{x_i}\|_{2,2,Q}$. Для этого положим $\beta = 1$ в (27) и, учитывая, что $\bar{u} = \tilde{u} + \kappa$, получаем

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \tilde{u}^2\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} dx + \frac{a_1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \lambda_i(x,t)|\tilde{u}_{x_i}|^2 \,dx\,dt \le \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega F\bar{u}^2\,dx\,dt. \tag{34}$$

Применяя неравенство Гельдера и оценку (17) в цилиндре $\tilde{Q} = \Omega\times(\tau_1,\tau_2) \subset$ $\subset Q = \Omega\times(0,T)$, имеем

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega F\bar{u}^2\,dx\,dt \le \|F\|_{p,q,\tilde{Q}}\|\tilde{u}+\kappa\|_{2p',2q',\tilde{Q}} \le$$

$$\le C\left(\|\tilde{u}\|_{2p',2q',\tilde{Q}}^2 + \|\kappa\|_{2p',2q',\tilde{Q}}^2\right) = C\left(\|\tilde{u}\|_{2p',2q',\tilde{Q}}^2 + (\tau_2-\tau_1)^{1-1/q}\kappa^2\right) \le$$

$$\le C\left(\|\tilde u\|^2_{2p',2q',\tilde Q} + (\tau_2-\tau_1)^{\nu}\kappa^2\right) \le$$

$$\le C(\tau_2-\tau_1)^{\nu}\left(\|\tilde u\|^2_{2,\infty,Q} + \sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{1/2}\tilde u_{x_i}\|^2_{2,2,Q} + \kappa^2\right), \tag{35}$$

где $\nu = 1-\dfrac{\theta}{p}-\dfrac{1}{q}$, если $n+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{t_i}\ne 2$, и ν следует заменить на $\dfrac{1}{2}\nu$ в случае, если $n+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{t_i} = 2$.

Положим теперь $\tau_2 = t$, где t — переменная интервала $(\tau_1, \tau_1+\hat\mu)$, а число $\hat\mu$ будет выбрано ниже. Тогда (34) с учетом (35) перепишется в виде

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \tilde u\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} dx + \frac{a_1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|\tilde u_{x_i}|^2\,dx\,dt \le$$

$$\le C\hat\mu^{\nu}\left(\operatorname*{vrai\,max}_{(\tau_1,\hat\mu)}\int_\Omega \tilde u^2\,dx + \int_{\tau_1}^{t}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|\tilde u_{x_i}|^2\,dx\,dt + \kappa^2\right).$$

Выберем $\hat\mu$ так, чтобы $\hat\mu^{\nu} = (4C)^{-1}\min(1,a_1)$, где C — константа из последнего неравенства. Тогда получим

$$\int_\Omega \tilde u\Big|_{t=\tau_1}^{t=t} dx + \frac{a_1}{2}\int_{\tau_1}^{t}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|\tilde u_{x_i}|^2\,dx\,dt \le$$

$$\le \frac{\min(1,a_1)}{2}\left(\operatorname*{vrai\,max}_{(\tau_1,\hat\mu)}\int_\Omega \tilde u^2\,dx + \kappa^2\right).$$

Обозначим $X(t) = \int_\Omega \tilde u^2\,dx$. Тогда последнее неравенство перепишется в виде

$$X(t) + \frac{a_1}{2}\int_{\tau_1}^{t}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|\tilde u_{x_i}|^2\,dx\,dt \le$$

$$\le \frac{\min(1,a_1)}{2}\left(\operatorname*{vrai\,max}_{(\tau_1,\tau_1+\hat\mu)} X(t) + \kappa^2\right) - X(\tau_1). \tag{36}$$

Опуская интеграл в левой части последнего неравенства, находим, что

$$\operatorname*{vrai\,max}_{(\tau_1,\tau_1+\hat\mu)} X(t) \le \kappa^2 X(\tau_1). \tag{37}$$

Опуская в (36) первое слагаемое, находим, используя (37), что

$$\int_{\tau_1}^{t}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|\tilde u_{x_i}|^2\,dx\,dt \le 2\kappa^2 + 2(1+a_1^{-1})X(\tau_1), \tag{38}$$

где $t\in(\tau_1,\tau_1+\hat\mu)$.

Теперь можно проитерировать оценки (37), (38) по интервалам $(\tau_1,\tau_1+\hat\mu)$, $(\tau_1+\hat\mu,\tau_1+2\hat\mu)$ и т. д. Выберем $\tau_1 = 0$ и учтем, что $X(0) = 0$. Тогда, как и в работе [6, с. 96], получаем оценку

$$\|\tilde u\|^2_{2,\infty,Q} + \sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{1/2}\tilde u_{x_i}\|^2_{2,2,Q} \le C\kappa^2,$$

что вместе с (21) дает $\operatorname{vrai\,max}_{Q} u(x, t) \leq C\kappa$. Так как такая же оценка может быть получена и для функции $-u(x, t)$, то оценка (20) доказана.

Для того чтобы освободиться от условий нормировки $|\Omega| = T = 1$, следует повторить рассуждения работы [6, с. 97].

1. *Moser J.* A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1960. – **13**, № 3. – P. 457–468.
2. *Moser J.* On a pointwise estimate for parabolic differential equations // Ibid. – 1971. – **24**, № 5. – P. 727–740.
3. *Кружков С. Н.* Априорные оценки для обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1963. – **150**, № 4. – С. 748–751.
4. *Кружков С. Н.* Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений // Мат. сб. – 1964. – **65**, № 4. – С. 522–570.
5. *Кружков С. Н.* Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Мат. сб. – 1968. – **77**, № 3. – С. 299–334.
6. *Aronson D. G., Serrin J.* Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations // Arch. Rat. Mech. and Anal. – 1967. – **25**. – P. 81–122.
7. *Trudinger N.* On the regularity of generalized solutions of linear, non-uniformly elliptic equations // Ibid. – 1971. – **42**, № 1. – P. 50–62.
8. *Trudinger N.* Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations // Comm. Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**. – P. 205–226.
9. *Иванов А. В.* Оценки константы Гельдера обобщенных решений вырождающихся параболических уравнений // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1986. – **152**. – С. 21–44.
10. *Иванов А. В.* Гельдеровские оценки для квазилинейных параболических уравнений с двойным вырождением // Там же. – 1989. – **171**. – С. 70–105.
11. *Иванов А. В.* Равномерные гельдеровские оценки для обобщенных решений квазилинейных параболических уравнений, допускающих двойное вырождение // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, вып. 2. – С. 139–179.
12. *Иванов А. В.* Квазилинейные параболические уравнения, допускающие двойное вырождение // Там же. – 1992. – **4**, вып. 6. – С. 114–130.
13. *Chiarenza F. M., Serapioni R. P.* A Harnack inequality for degenerate parabolic equations // Comm. Part. Diff. Equat. – 1984. – **9** (**8**). – P. 719–749.
14. *Chiarenza F., Serapioni R.* Pointwise estimates for degenerate parabolic equations // Appl. Anal. – 1987. – **23**. – P. 287–299.
15. *Di Benedetto E., Friedman.* Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic system // J. Reine Math. – 1985. – **357**. – P. 83–128.
16. *Di Benedetto E.* On local behavior of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients // Ann. Sc. Norm. Sup. – 1986. – **13**, № 3. – P. 485–535.
17. *Nicolosi F.* Soluzio ni deloli dei problemi al contorno per operatori parabolici che possono degenerate // Ann. Math. Pure ed Appl. – 1980. – **4**, № 125. – P. 135–155.
18. *Cirmi G. R.* Problemi parabolici degeneri // Rend. Circ. Math. Palermo. Ser. 2. – 1992. – **41**, № 2. – P. 197–208.
19. *Колодий И. М.* Качественные свойства обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 3. – С. 320–328.
20. *Кружков С. Н., Колодий И. М.* Априорные оценки и неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 3. – С. 608–628.
21. *Колодий И. М.* Теорема Лиувилля для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 5. – С. 841–854.
22. *Колодій І. М.* Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків задачі Діріхле еліптичних рівнянь дивергентного вигляду // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 635–648.
23. *Лу Вень-туан.* К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными показателями // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1961. – № 7. – С. 23–27.
24. *Кружков С. Н., Королев А. Г.* К теории вложения анизотропных функциональных пространств // Докл. АН СССР. – 1985. – **285**, № 5. – С. 1054–1057.
25. *Кружков С. Н., Колодий И. М.* К теории вложения анизотропных пространств Соболева // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, вып. 2. – С. 207–208.

Получено 28.05.96