УДК 517.988.8

С. В. Переверзев,
С. Г. Солодкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ДИСКРЕТИЗАЦИИ МЕТОДА М. М. ЛАВРЕНТЬЕВА*

For operator equations of the first kind with self-adjoint nonnegative operators, which have some "smoothness", a new scheme for digitization of the method of Lavrentiev is proposed. This scheme is more economical in comparison with traditional schemes as far as the amount of the used discrete information is concerned.

Для операторних рівнянь I роду з самоспряженими додатними операторами, що мають певну „гладкість", запропоновано схему дискретизації методу М. М. Лаврентьєва, яка є більш економічною з точки зору обсягу дискретної інформації, що використовується.

1. Пусть X — гильбертово пространство, а A — линейный компактный оператор из X в X. Рассматривается задача о решении операторного уравнения I рода

$$Ax = f \tag{1}$$

со свободным членом f, принадлежащим области значений оператора A, т. е. $\operatorname{Range}(A) := \{ f\colon f = Ag,\ g \in X\}$. Последнее условие означает, что решение (1) существует. Однако, как правило, вместо свободного члена f мы располагаем некоторым элементом $f_\delta \in X$ таким, что $\|f - f_\delta\|_X \le \delta$, где δ — некоторое известное достаточно малое положительное число. Таким образом, вместо (1) имеем уравнение

$$Ax = f_\delta. \tag{2}$$

Даже если $f_\delta \in \operatorname{Range}(A)$, то все равно решение (2) нельзя рассматривать в качестве приближенного решения (1). Дело в том, что в силу компактности оператор A не является непрерывно обратимым, а это, в свою очередь, означает отсутствие непрерывной зависимости от правой части у решений уравнений (1), (2). Поскольку мы располагаем только уравнением (2), то приближенное решение (1) связано с построением регуляризатора для этого уравнения.

Следуя [1, с. 7], под регуляризатором для (1) будем понимать параметрическое семейство операторов $R_\delta(A)\colon X \to X$, зависящих от параметра δ и оператора A, таких, что для любого $f \in \operatorname{Range}(A)$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{f_\delta\colon \|f - f_\delta\|_X \le \delta} \inf_{u \in A^{-1}f} \| u - R_\delta(A) f_\delta \|_X = 0,$$

где $A^{-1}f$ — полный прообраз элемента f.

Первый регуляризатор был предложен в 1955 г. М. М. Лаврентьевым для приближенного решения задачи Коши для уравнения Лапласа — классического примера так называемой некорректной задачи. Для произвольных операторных уравнений I рода (1) принцип построения этого регуляризатора был обобщен М. М. Лаврентьевым в 1959 г. Обычно этот регуляризатор применяется для уравнений (1) с самосопряженными неотрицательными операторами. А именно, если $A = A^*$ и для любого $\varphi \in X$ $(A\varphi, \varphi) \ge 0$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в X, то регуляризатор Лаврентьева $L_\delta(A)$ имеет вид

$$L_\delta(A) = (\alpha I + A)^{-1}.$$

Здесь I — тождественный оператор, а $\alpha = \alpha(\delta)$ — параметр регуляризации,

* Выполнена в рамках проекта, финансируемого Международным научным фондом (фонд Сороса).

выбираемый в зависимости от δ и являющийся достаточно малой величиной, т. е. $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Возникает вопрос: точность какого порядка может быть достигнута при приближенном решении (1), если свободный член этого уравнения известен с точностью δ? Ответ на этот вопрос может быть дан при дополнительных предположениях относительно „гладкости" решения (1). Точнее, если решение (1) истокопредставимо, т. е. при некоторых $p > 0$ и $\rho > 0$

$$x \in M_{p,\rho}(A) := \{ \varphi\colon \varphi = |A|^p u, \ \|u\|_X \le \rho \},$$

то уравнение (1) однозначно разрешимо и

$$\inf_{R_\delta} \sup_{f = Ax, \ x \in M_{p,\rho}(A)} \sup_{f_\delta\colon \|f - f_\delta\|_X \le \delta} \| A^{-1} f - R_\delta(A) f_\delta \|_X \asymp \delta^{p/(p+1)}, \tag{3}$$

где внешний инфимум берется по всевозможным регуляризаторам, а оператор $|A|$ определяется из условия $|A|^2 = A^* A$.

Если A — самосопряженный неотрицательный оператор, то $|A| = A$ и известно [1, с. 61], что регуляризатор Лаврентьева $L_\delta(A) = (\alpha I + A)^{-1}$ реализует оптимальный порядок точности $\delta^{p/(p+1)}$ только в случае $p \in (0, 1]$. При этом параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ следует выбирать так, чтобы

$$\alpha(\delta) \asymp \delta^{1/(p+1)}.$$

Используя регуляризатор Лаврентьева, мы, по сути дела, осуществляем переход от некорректной задачи (2) к регуляризованному уравнению

$$\alpha x + A x = f_\delta,$$

процесс приближенного решения которого устойчив. Построение же приближенного решения регуляризованной задачи является самостоятельной проблемой, которая в теории некорректных задач часто рассматривается (см., например, [2]) как проблема дискретизации. Суть дискретизации заключается в том, что для построения приближенного решения (1) используется только дискретная информация об уравнении (2). В качестве такой информации могут выступать значения некоторых функционалов, определенных на множестве операторов A и приближенных правых частей f_δ. Для уравнений (2) с самосопряженными неотрицательными операторами традиционный подход к дискретизации связан с методом Ритца [3].

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ — некоторый ортонормированный базис в гильбертовом пространстве X, а $P_n \varphi = \sum_{i=1}^n e_i (e_i, \varphi)$ — ортопроектор на линейную оболочку первых n элементов базиса.

Применительно к операторным уравнениям I рода метод Ритца, построенный на базе ортонормированной системы $e_1, e_2, \dots, e_n$, заключается в переходе от уравнения (2) к уравнению $P_n A P_n x = P_n f_\delta$.

Традиционный подход к дискретизации метода Лаврентьева состоит в применении регуляризатора L_δ к приведенному выше уравнению с конечномерным оператором. Таким образом, в рамках традиционного подхода к дискретизации приближенное решение уравнения (1) задается соотношением $x_n = L_\delta(P_n A P_n) P_n f_\delta$ и удовлетворяет операторному уравнению II рода

$$\alpha x_n + P_n A P_n x_n = P_n f_\delta. \tag{4}$$

Если мы располагаем априорной информацией о том, что решение (1) истокопредставимо, т. е. $x = A^{-1} f \in M_{p,\rho}(A)$, $0 < p \le 1$, то для того, чтобы обеспечить оптимальный порядок погрешности (3), нужно в (4) выбрать α из условия

$\alpha \asymp \delta^{1/(p+1)}$. Но тогда возникает вопрос о числе n базисных элементов, требуемом для обеспечения оптимального порядка точности в рамках традиционного подхода к дискретизации (4).

Для ответа на этот вопрос нужна некоторая априорная информация о „гладкости" оператора A (не путать с „гладостью" решения (1)).

Обозначим через X^r, $0 < r < \infty$, линейное нормированное подпространство гильбертова пространства X, снабженное нормой

$$\|f\|_{X^r} = \|f\|_X + \|D_r f\|_X,$$

где D_r — некоторый линейный оператор, действующий из X^r в X, и для любого $m = 1, 2, \ldots$

$$\|I - P_m\|_{X^r \to X} \le c_r m^{-r},$$

при этом постоянная c_r не зависит от m.

Положим

$$\mathcal{H}_\gamma^r := \{A\colon \|A\|_{X \to X^r} \le \gamma_1,\ \|A^*\|_{X \to X^r} \le \gamma_2,\ \|(D_r A)^*\|_{X \to X^r} \le \gamma_3\},$$
$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

В настоящей работе будем рассматривать уравнения (1) с самосопряженными неотрицательными операторами из класса $\mathcal{H}_\gamma^r$.

Для иллюстрации условий, определяющих класс $\mathcal{H}_\gamma^r$, рассмотрим интегральное уравнение

$$A x(t) := \int_0^1 \alpha(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau = f(t)$$

в гильбертовом пространстве L_2 функций, суммируемых в квадрате на $(0, 1)$ с обычной нормой. При $r = 1$ в качестве пространства X^r возьмем соболевское пространство W_2^1 функций f, имеющих суммируемые в квадрате производные $f' \in L_2$,

$$\|f\|_{W_2^1} = \|f\|_{L_2} + \left\|\frac{d}{dt} f\right\|_{L_2}.$$

Пусть P_m — оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f \in L_2$ частную сумму ее ряда Фурье–Хаара порядка m. Ясно, что P_m — ортопроектор на линейную оболочку первых m элементов ортонормированного базиса Хаара. Известно, что

$$\|I - P_m\|_{W_2^1 \to L_2} \le c_1 m^{-1}.$$

Это означает, что для $X = L_2$ и $X^1 = W_2^1$ выполнены все условия, определяющие X^r при $r = 1$. В этом случае $D_r = d/dt$. Если ядро $\alpha(t, \tau)$ приведенного выше интегрального оператора A имеет смешанную частную производную и

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^{i+j}\alpha(t, \tau)}{\partial t^i\, \partial \tau^j}\right]^2 dt\, d\tau < \infty, \quad i, j = 0, 1,$$

то, как легко проверить, $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$ при $r = 1$, $X = L_2$, $X^r = W_2^1$ и некотором наборе параметров γ.

Вернемся теперь к вопросу о числе базисных элементов, которые требуются при традиционном подходе к дискретизации метода Лаврентьева (4) для обеспечения оптимального порядка (3) на классе истокопредставимых решений. Для самосопряженных неотрицательных операторов A из $\mathcal{H}^r_\gamma$ ответ на этот вопрос следует из результатов [3, 4].

Теорема 1 [3, 4]. *Пусть* $A \in \mathcal{H}^r_\gamma$ *и* $A = A^* \geq 0$. *Тогда при* $p \in (0, 1]$, $\alpha \asymp \delta^{1/(p+1)}$ *и* $n \asymp \delta^{-1/((p+1)r)}$

$$\sup_{f = Ax,\ x \in M_{p,\rho}(A)} \ \sup_{f_\delta:\ \|f - f_\delta\|_X \leq \delta} \|A^{-1}f - L_\delta(P_nAP_n)P_nf_\delta\|_X \asymp \delta^{p/(p+1)}.$$

Напомним, что приближенное решение $x_n = L_\delta(P_nAP_n)P_nf_\delta$ определяется из уравнения (4) в виде линейной комбинации первых n элементов базиса:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} x_{n,i}\, e_i .$$

При этом неизвестные коэффициенты $x_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\alpha x_{n,i} + \sum_{j=1}^{n} (e_i, Ae_j)\, x_{n,j} = (e_i, f_\delta).$$

Обозначим через $\mathrm{Card}\,(IP)$ общее число значений скалярных произведений вида $(e_i, A\,e_j)$, (e_i, f_δ), требуемое при той или иной схеме дискретизации метода Лаврентьева. Из теоремы 1 вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $A \in \mathcal{H}^r_\gamma$ *и* $A = A^* \geq 0$. *Тогда оптимальный порядок погрешности* (3) *на классе истокопредставимых решений* $M_{p,\rho}(A)$, $0 < p \leq 1$, *обеспечивается в рамках традиционной схемы дискретизации метода Лаврентьева* (4) *при* $n \asymp \delta^{-1/((p+1)r)}$ *и*

$$\mathrm{Card}\,(IP) = n^2 + n \asymp \delta^{-2/((p+1)r)}.$$

Заметим, что последнее соотношение характеризует объем дискретной информации, требуемый в рамках традиционной схемы дискретизации для достижения оптимального порядка точности (3). Ниже мы предложим иную схему дискретизации метода Лаврентьева, которая в случае $p \in (0, 1)$ позволяет достичь оптимальный порядок (3) и использует меньший объем дискретной информации.

2. При фиксированном $p \in (0, 1]$ поставим в соответствие каждому оператору $A \in \mathcal{H}^r_\gamma$ оператор

$$A_{p,\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\, AP_{2^{(p+2)\nu-k}} + P_1AP_{2^{(p+2)\nu}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu} P_{2^{(p+2)\nu-k}}\, A(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) + P_{2^{(p+2)\nu}}AP_1 - P_{2^\nu}AP_{2^\nu}. \tag{5}$$

В случае, когда $(p+2)\nu$ не является целым числом, под $P_{2^{(p+2)\nu-k}}$ будем понимать $P_{[2^{(p+2)\nu-k}]}$, где $[a]$ — целая часть числа a.

Лемма 1. *Пусть* $A \in \mathcal{H}^r_\gamma$ *и* $A = A^*$. *Тогда*

$$\|A - A_{p,\nu}\|_{X \to X} \leq c_1 2^{-2\nu r},$$

где постоянная c_1 *не зависит от* ν.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$A_\nu = P_{2^\nu}A + AP_{2^\nu} - P_{2^\nu}AP_{2^\nu}.$$

Известно [5], что для $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$

$$\|A - A_\nu\|_{X\to X} \le c_2 2^{-2\nu r}, \tag{6}$$

где постоянная c_2 не зависит от ν (в дальнейшем постоянные, которые не зависят от ν, δ и α, будут обозначаться через $c_3, c_4, \ldots$).

Заметим теперь, что

$$\|A_\nu - A_{p,\nu}\|_{X\to X} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\nu} \|(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\,A(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\|_{X\to X} + \|P_1 A(I - P_{2^{(p+2)\nu}})\|_{X\to X} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu} \|(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\,A\,(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\|_{X\to X} + \|(I - P_{2^{(p+2)\nu}})\,AP_1\|_{X\to X}.$$

Кроме того, для $A = A^*$ в силу определения пространства X^r находим

$$\|(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\,A\,(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\|_{X\to X} =$$

$$= \left\|\left((I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\,A\,(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\right)^*\right\|_{X\to X} =$$

$$= \|(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\,A(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\|_{X\to X} \le$$

$$\le \left(\|I - P_{2^k}\|_{X^r\to X} + \|I - P_{2^{k-1}}\|_{X^r\to X}\right)\|A\,(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\|_{X\to X^r} \le$$

$$\le c_r 2^{-kr}\|A\,(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\|_{X\to X^r}.$$

Из принадлежности оператора A классу $\mathcal{H}_\gamma^r$ следует

$$\|A\,(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\|_{X\to X^r} \le$$

$$\le \|A\,(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\|_{X\to X} + \|D_r A\,(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\|_{X\to X} =$$

$$= \|(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})\,A^*\|_{X\to X} + \|(I - P_{2^{(p+2)\nu-k}})(D_r A)^*\|_{X\to X} \le$$

$$\le c_r 2^{-(p+2)\nu r + kr}\left(\|A^*\|_{X\to X^r} + \|(D_r A)^*\|_{X\to X^r}\right) \le$$

$$\le c_r(\gamma_2 + \gamma_3)\,2^{-(p+2)\nu r + kr}.$$

Таким образом, объединяя последние оценки, имеем

$$\|A_\nu - A_{p,\nu}\|_{X\to X} \le c_3 2^{-(p+2)\nu r}. \tag{7}$$

Утверждение леммы следует теперь из (6) и (7).

Рассмотрим схему дискретизации метода Лаврентьева, при которой приближенное решение (1) задается соотношением

$$x_{p,\nu} = L_\delta(A_{p,\nu})\,P_{2^{(p+2)\nu}}f_\delta$$

и удовлетворяет операторному уравнению II рода

$$\alpha\, x_{p,\nu} + A_{p,\nu}x_{p,\nu} = P_{2^{(p+2)\nu}}f_\delta. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть* $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$ *и* $A = A^* \ge 0$. *Тогда при* $p \in (0, 1]$, $\alpha \asymp \delta^{1/(p+1)}$ *и* ν *таком, что*

$$2^{-(p+2)\nu r}\nu \asymp \delta, \tag{9}$$

$$\sup_{f = Ax,\ x \in M_{p,\rho}(A)} \ \sup_{f_\delta:\ \|f - f_\delta\|_X \le \delta} \| A^{-1} f - L_\delta(A_{p,\nu}) P_{2^{(p+2)\nu}} f_\delta \|_X \asymp \delta^{p/(p+1)}.$$

Доказательство. Следуя [4], рассмотрим операторы

$$S_\alpha(A_{p,\nu}) = I - L_\delta(A_{p,\nu}) A_{p,\nu} = I - (\alpha I + A_{p,\nu})^{-1} A_{p,\nu},$$
$$R_\alpha(A_{p,\nu}) = L_\delta(A_{p,\nu}) P_{2^{(p+2)\nu}}.$$

Тогда для $x = A^{-1} f \in M_{p,\rho}(A)$ имеем

$$A^{-1} f - L_\delta(A_{p,\nu}) P_{2^{(p+2)\nu}} f_\delta =$$
$$= R_\alpha(A_{p,\nu})(f - f_\delta) + S_\alpha(A_{p,\nu}) x + R_\alpha(A_{p,\nu})(A_{p,\nu} - A) x \tag{10}$$

(в последнем соотношении использовано то, что $P_{2^{(p+2)\nu}} A_{p,\nu} = A_{p,\nu}$).

Для продолжения доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 2

$$\| S_\alpha(A_{p,\nu}) | A_{p,\nu} |^p \|_{X \to X} \le c_4 \alpha^p,$$
$$\| S_\alpha(A_{p,\nu}) \|_{X \to X} \le c_5, \quad \| L_\delta(A_{p,\nu}) \|_{X \to X} \le c_6 \alpha^{-1}.$$

Доказательство проведем лишь для первого неравенства. Остальные неравенства доказываются аналогично.

Легко видеть, что оператор $A_{p,\nu}$ является самосопряженным, т. е. $A_{p,\nu} = A^*_{p,\nu}$. Но тогда, используя свойства соответствия между функциями действительной переменной и функциями от самосопряженных операторов [6, с. 208], имеем

$$\| S_\alpha(A_{p,\nu}) | A_{p,\nu} |^p \|_{X \to X} \le \sup_{m \le t \le M} | t |^p | S_\alpha(t) |, \tag{11}$$

где $S_\alpha(t) = 1 - t/(t+\alpha) = \alpha/(t+\alpha)$, а

$$m = \inf_{\|\varphi\|_X = 1} (A_{p,\nu} \varphi, \varphi), \quad M = \sup_{\|\varphi\|_X = 1} (A_{p,\nu} \varphi, \varphi).$$

Из соотношения (9) и леммы 1 следует, что в условиях теоремы 2

$$m \ge \inf_{\|\varphi\|_X = 1} (A\varphi, \varphi) - \sup_{\|\varphi\|_X = 1} ((A - A_{p,\nu})\varphi, \varphi) \ge$$
$$\ge -c_2 2^{-2\nu r} \ge -c_7 (\delta \log^{-1}(1/\delta))^{2/(p+2)}. \tag{12}$$

Если $m \ge 0$, то при $p = 1$

$$\sup_{m \le t \le M} | t |^p | S_\alpha(t) | \le \sup_{0 \le t \le M} \frac{\alpha t}{t + \alpha} \le \alpha, \tag{13}$$

а при $p \in (0, 1)$ простые вычисления показывают, что наибольшее значение функции $| t |^p S_\alpha(t)$ на отрезке $[0, M]$ достигается в точке $t = \alpha p / (1 - p)$ и

$$\sup_{0 \le t \le M} | t |^p | S_\alpha(t) | \le \left(\frac{\alpha p}{1 - p} \right)^p \frac{\alpha(1 - p)}{\alpha p + \alpha(1 - p)} = \alpha^p p^p (1 - p)^{1 - p} \le c_9 \alpha^p. \tag{14}$$

Таким образом, при $m \ge 0$ утверждение леммы 2 следует из (11), (13), (14).

Предположим теперь, что $m < 0$. Тогда в силу (12) и условия $\alpha \asymp \delta^{1/(p+1)}$ имеем $m > -\alpha$. Это означает, что на отрезке $[m, 0]$ функция $| t |^p | S_\alpha(t) |$ непрерывна и монотонно убывает. Вновь используя (12) и условие $\alpha \asymp \delta^{1/(p+1)}$, находим

$$\sup_{m \le t \le 0} |t|^p |S_\alpha(t)| \le |m|^p |S_\alpha(m)| \le \frac{c_7^p \alpha (\delta \log^{-1}(1/\delta))^{2p/(p+2)}}{\alpha - c_7 (\delta \log^{-1}(1/\delta))^{2/(p+2)}} \le$$

$$\le c_{10} \delta^{2p/(p+2)} \le c_{10} \alpha^p.$$

Теперь из последнего неравенства и (11), (13), (14) следует

$$\| S_\alpha(A_{p,\nu}) |A_{p,\nu}|^p \|_{X \to X} \le \max \left\{ \sup_{m \le t \le 0} |t|^p |S_\alpha(t)|, \sup_{0 \le t \le M} |t|^p |S_\alpha(t)| \right\} \le c_{11} \alpha^p.$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2 и оценим норму каждого слагаемого в правой части (10). В силу леммы 2

$$\| R_\alpha(A_{p,\nu}) (f - f_\delta) \|_X \le c_6 \alpha^{-1} \| f - f_\delta \|_X \asymp \alpha^{-1} \delta \asymp \delta^{p/(p+1)}. \qquad (15)$$

Из леммы 1, (9) и известной оценки нормы разности модулей операторов [1, с. 93] имеем

$$\| |A|^p - |A_{p,\nu}|^p \|_{X \to X} \le$$

$$\le c_p (1 + |\ln(\|A - A_{p,\nu}\|_{X \to X}|) \|A - A_{p,\nu}\|^p_{X \to X} \le c_{13} \nu 2^{-2p\nu r} \asymp$$

$$\asymp \nu^{(2-p)/(p+2)} (\nu^{2p/(p+2)} 2^{-2p\nu r}) \asymp \delta^{2p/(p+2)} \nu^{(2-p)/(p+2)} \asymp$$

$$\asymp \delta^{2p/(p+2)} \log^{(2-p)/(p+2)} \frac{1}{\delta} \le c_{14} \delta^{p/(p+1)}. \qquad (16)$$

Напомним теперь, что для $x = A^{-1} f \in M_{p,\rho}(A)$ справедливо представление $x = |A|^p \varphi$, $\|\varphi\|_X \le \rho$. Но тогда, используя лемму 2 и (16), находим

$$\| S_\alpha(A_{p,\nu}) x \|_X = \| S_\alpha(A_{p,\nu}) |A|^p \varphi \|_X \le$$

$$\le \| S_\alpha(A_{p,\nu}) |A_{p,\nu}|^p \varphi \|_X + \| S_\alpha(A_{p,\nu}) (|A|^p - |A_{p,\nu}|^p) \varphi \|_X \le$$

$$\le c_4 \rho \alpha^p + c_5 \rho \| |A|^p - |A_{p,\nu}|^p \|_{X \to X} \le c_{15} \delta^{p/(p+1)}. \qquad (17)$$

Для оценки последнего слагаемого в (10) нам потребуется неравенство (см. [4], лемма 4.3)

$$\| (I - P_{2^\nu}) |A|^p \|_{X \to X} \le$$

$$\le \|A(I - P_{2^\nu})\|^p_{X \to X} = \|(I - P_{2^\nu}) A^*\|^p_{X \to X} \le c_r^p \gamma_2^p 2^{-p\nu r}.$$

Используя это неравенство, лемму 2 и оценки (6), (7), получаем

$$\| R_\alpha(A_{p,\nu})(A_{p,\nu} - A) x \|_X = \| R_\alpha(A_{p,\nu})(A_{p,\nu} - A) |A|^p \varphi \|_X \le$$

$$\le \| R_\alpha(A_{p,\nu}) \|_{X \to X} (\| (A_\nu - A_{p,\nu}) |A|^p \varphi \|_X + \| (A - A_\nu) |A|^p \varphi \|_X) \le$$

$$\le c_6 \alpha^{-1} (\gamma_1^p \rho \| A_\nu - A_{p,\nu} \|_{X \to X} + \| (A - A_\nu)(I - P_{2^\nu}) |A|^p \varphi \|_X) \le$$

$$\le c_{16} \alpha^{-1} (\nu 2^{-(p+2)\nu r} + \| A - A_\nu \|_{X \to X} \| (I - P_{2^\nu}) |A|^p \varphi \|_X) \le$$

$$\le c_{17} \alpha^{-1} (\nu 2^{-(p+2)\nu r} + 2^{-2\nu r} 2^{-p\nu r}) \le c_{18} \alpha^{-1} \nu 2^{-(p+2)\nu r} \asymp$$

$$\asymp \delta^{-1/(p+1)} \delta \asymp \delta^{p/(p+1)}. \qquad (18)$$

Утверждение теоремы следует теперь из (10), (15), (17), (18).

Оценим величину $\mathrm{Card}\,(IP)$ для схемы дискретизации метода Лаврентьева, определяемой соотношениями (8), (9).

Заметим, что

$$(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\,A P_{2^{(p+2)\nu-k}}\varphi = \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} e_i \sum_{j=1}^{2^{(p+2)\nu-k}} (e_i, Ae_j)(e_j, \varphi)$$

и, как легко видеть, для построения одного члена в правой части (5) требуется не более $2^{(p+2)\nu}$ значений скалярных произведений вида (e_i, Ae_j). Но тогда общее число таких значений, требуемое для построения $A_{p,\nu}$ слабо эквивалентно $2^{(p+2)\nu}\nu$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2 *оптимальный порядок погрешности* (3) *на классе истокопредставимых решений* $M_{p,\rho}(A)$ *обеспечивается в рамках схемы дискретизации* (8) *при*

$$\mathrm{Card}\,(IP) \asymp 2^{(p+2)\nu}\nu \asymp \delta^{-1/r}\log^{(r+1)/r}\frac{1}{\delta}.$$

Замечание. Сравнение следствий 1 и 2 показывает, что с точки зрения объема дискретной информации, требуемой для достижения оптимального порядка (3), при $p \in (0, 1)$ схема дискретизации метода Лаврентьева (8) экономичнее традиционной схемы дискретизации (4). Однако при $p = 1$ это уже не так, хотя порядки величин $\mathrm{Card}\,(IP)$ в этом случае отличаются лишь на логарифмический множитель. В то же время, если мы будем искать решение регуляризованного уравнения (8) в виде

$$x_{p,\nu} = \sum_{i=1}^{2^{\nu+1}} x_i\varphi_i + P_{2^{(p+2)\nu}} f_\delta,$$

где

$$\varphi_i = \begin{cases} e_i, & i = 1, 2, \ldots, 2^\nu; \\ P_{2^{(p+2)\nu-k}} A e_{i-2^\nu}, & i = 2^\nu+1, \ldots, 2^{\nu+1};\ i \in (2^\nu + 2^{k-1}, 2^\nu + 2^k]; \\ & k = 0, 1, \ldots, \nu, \end{cases}$$

то размерность системы линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов x_i имеет порядок

$$2^{\nu+1} \asymp \delta^{-1/r(p+2)}\log^{1/r(p+2)}\frac{1}{\delta},$$

что при любом $p \in (0, 1]$ меньше порядка $\delta^{-1/r(p+1)}$ системы уравнений, решаемой в рамках традиционной схемы (4).

1. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986. – 180 с.
2. *Васин В. В.* Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1979. – **19**, № 1. – С. 11–21.
3. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of the Ritz–Galerkin method for solving ill-posed problems // Учен. зап. Тарт. ун-та. – 1989. – **863**. – С. 3–17.
4. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57**. – P. 63–70.
5. *Солодкий С. Г.* Оптимизация адаптивных прямых методов решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 95–102.
6. *Функциональный* анализ (серия „Справочная математическая библиотека") / Под ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

Получено 14.02.95