УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Ин-т геотехн. механики НАН Украины, Днепропетровск)

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

For classes of analytic in a neighborhood of zero functions on the Banach space of Hardy, we obtain exact values for Kolmogorov's widths in the case when the metrics of the class and the space are not the same.

Для класів аналітичних в одиничному колі функцій в банаховому просторі Харді одержано точні значення колмогоровського поперечника при неспівпаданні метрики класу і простору.

Пусть $U_R \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $R > 0$; $U \overset{\text{def}}{=} U_1$; $f(z)$ — аналитическая в U_R функция и для $r < R$

$$M_p(f, r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Под H_R^p, $p \geq 1$, понимаем банахово пространство Харди, состоящее из аналитических в U_R функций $f(z)$, которые почти всюду на $\partial U_R = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = R\}$ имеют угловые граничные значения $f(\xi)$, удовлетворяющие условию

$$\| f \|_{H_R^p} = \lim_{r \to R-0} M_p(f, r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(Re^{it}) \right|^p dt \right\}^{1/p} < \infty.$$

В случае $R = 1$ полагаем $H^p \equiv H_1^p$ и обозначаем

$$B H_R^p = \{ f(z) \in H_R^p : \| f \|_{H_R^p} \leq 1 \}.$$

Пусть X — банахово пространство, $\mathfrak{N}$ — некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество X; $L_n \subset X$ — n-мерное подпространство. Величины

$$d_n(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_n \subset X} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{g \in L_n} \| f - g \|_X,$$

$$\delta_n(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_n \subset X} \inf_{\Lambda : X \to L_n} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \| f - \Lambda f \|_X,$$

где Λ — линейный непрерывный оператор, отображающий X в L_n, называют соответственно колмогоровским и линейным n-поперечниками.

Из теоремы 1 [1, с. 250] при $m = 0$ следует, что для $R \geq 1$ справедливы равенства

$$d_n(B H_R^p, H^p) = \delta_n(B H_R^p, H^p) = \sup_{f \in B H_R^p} \| f - h_{n-1}(f) \|_{H^p} = R^{-n},$$

где

$$h_{n-1}(f, z) = \sum_{j=0}^{n-1} (1 - R^{-2(n-j)}) c_j z^j;$$

c_j — коэффициенты Тейлора аналитической функции $f(z)$. Также известно [2, с. 220], что при $1 \le p \le q \le \infty$ $d_n(B\,H_R^p, H^q) \asymp R^{-n}$.

Однако какие-либо результаты, связанные с вычислениями точных значений n-поперечников классов $B\,H_R^p$ в пространстве H^q при $p \ne q$, автору не известны. В данной статье найдены точные значения величин $d_n(B\,H_R^1, H^2)$ при определенном ограничении на R.

Введем функцию

$$Q_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^n-1}{x^n(x-1)} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{1/2}; \quad 1<x<\infty; \quad n \in \mathbb{N},$$

которая является монотонно убывающей, и символом ρ_n обозначим единственный корень уравнения $Q_n(x)=1$. При этом $1{,}2 < \rho_n < 2{,}5$.

Теорема. *Пусть $R \ge \rho_n$. Тогда для произвольных $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$d_n(B\,H_R^1, H^2) = \sup_{f \in BH_R^1} \|f - h_{n-1}(f)\|_{H^2} = \frac{1}{2\pi R^n}\left\{\frac{R^2+1}{R^2-1}\right\}^{1/2}. \tag{1}$$

Доказательство. Для каждой $f \in B\,H_R^p$ запишем

$$f(e^{it}) - h_{n-1}(f, e^{it}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(R\,e^{i(t-\theta)})\,G_{R,n}(\theta)\,d\theta, \tag{2}$$

где

$$G_{R,n}(\theta) = R^{-n}e^{in\theta}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k}\cos k\theta\right).$$

Обозначив через $L_p = L_p([0, 2\pi])$, $p \ge 1$, пространство 2π-периодических комплекснозначных функций $F(t)$, для которых

$$\|F\|_{L_p} = \left\{(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} |F(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} < \infty,$$

запишем неравенство Юнга для сверток периодических функций

$$\|\varphi * \psi\|_{L_q} \le \|\varphi\|_{L_p}\|\psi\|_{L_s}, \tag{3}$$

где $1 \le p \le q \le \infty$; $1/q = 1/p + 1/s - 1$; $\varphi \in L_p$, $\psi \in L_s$. Применив при $s = q = 2$ и $p = 1$ неравенство (3) к (2), получим оценку сверху

$$d_n(B\,H_R^1, H^2) \le \sup_{f \in BH_R^1} \|f - h_{n-1}(f)\|_{H^2} \le \frac{1}{2\pi R^n}\left\{\frac{R^2+1}{R^2-1}\right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Для получения оценки снизу сформулируем один результат Р. С. Исмагилова [3] в удобной для нас форме.

Лемма. *Пусть X — гильбертово пространство, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная система элементов в X и для некоторого элемента*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k \in X, \quad \{c_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \varphi_k\rangle\}$$

справедливы неравенства $|c_k| \geq |c_{k+1}|$; $k = 0, 1, \ldots$. *Тогда для множества* $\mathfrak{M}(f)$, *состоящего из элементов*

$$f_\theta = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k \varphi_k,$$

где $\xi = \exp(i\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$, *колмогоровский* n-*поперечник равен*

$$d_n(\mathfrak{M}(f), X) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \right\}^{1/2}. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$P_n^*(z) \stackrel{\text{def}}{=} R^{-n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} z^k + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{R^2+1}{R^2-1} \right)^{1/2} z^n \right\}.$$

Поскольку при $R \geq \rho_n$

$$\| P_n^* \|_{H_R^1} \leq \sum_{k=1}^{n} R^{-k} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{R^2+1}{R^2-1} \right)^{1/2} = Q_n(R) \leq 1,$$

то справедливо включение $P_n^*(z) \in B H_R^1$. Используя лемму, где в качестве $f(z)$ возьмем функцию $P_n^*(z)$, получаем

$$d_n(B H_R^1, H^2) \geq d_n(\mathfrak{M}(P_n^*), H^2) = \frac{1}{2\pi R^n} \left(\frac{R^2+1}{R^2-1} \right)^{1/2}. \tag{6}$$

Равенства (1) следуют из (4) и (6), чем и завершается доказательство теоремы.

1. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 292 p.
2. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. математики. Фундамент. направления. – 1987. – **14**. – С. 103–260.
3. *Исмагилов Р. С.* Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функцион. анализ. – 1968. – **2**, № 2. – С. 32–39.

Получено 23.09.94