УДК 517.928

О. А. Бурилко (Ін-т математики НАН України, Київ)

РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ В ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕННЯХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

Possibility of variable separation in linear extensions of dynamical systems on a torus are considered.

Вивчається можливість розділення змінних в лінійних розширеннях динамічних систем на торі.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in R^n$, вектор-функція $a(\varphi)$ і матрична функція $A(\varphi)$ неперервні за сукупністю змінних $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ на m-мірному торі $\mathcal{T}_m$. Відносно вектор-функції $a(\varphi)$ додатково припускаємо, що задача Коші

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \varphi\Big|_{t=0} = \varphi_0$$

має єдиний розв'язок $\varphi_t(\varphi_0)$ для кожного фіксованого $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$.

В [1–3] доведені теореми, що гарантують трьохблочне розділення змінних x за допомогою заміни $x = L(\varphi)y$. У даній роботі розглядаються більш загальні теореми, що гарантують розділення змінних на $k+1$ блок, де $k \geq 2$.

Будемо користуватися позначеннями з роботи [1].

Теорема 1. *Нехай при деяких скалярних функціях $\lambda_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ існують невироджені симетричні матриці $S_i(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m, a)$, $i = 1, \ldots, k$, що задовольняють нерівності*

$$\left\langle \left[\dot{S}_i[\varphi] + S_i(\varphi)A(\varphi) + A^*(\varphi)S_i(\varphi) + \lambda_i(\varphi)S_i(\varphi)\right]x,\ x\right\rangle \leq -\|x\|^2, \tag{2}$$

і нехай квадратичні форми $\langle S_i(\varphi)x, x\rangle$, зводяться до алгебраїчної суми квадратів, тобто існують невироджені матриці $Q_i(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m, a)$, $i = 1, \ldots, k$, такі, що

$$Q_i^*(\varphi)S_i(\varphi)Q_i(\varphi) = \operatorname{diag}\{I_{r_i}, -I_{n-r_i}\}. \tag{3}$$

При цьому припускаємо, що $r_1 < r_2 < \ldots < r_k$. Тоді виконання нерівності

$$m < \min_{2\leq i\leq k}\{r_i - r_{i-1}\}, \tag{4}$$

де m — число змінних $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, достатньо для існування невиродженої матриці $L(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m, a)$ такої, що

$$L^{-1}(\varphi)[A(\varphi)L(\varphi) - \dot{L}(\varphi)] = \operatorname{diag}\{B_1(\varphi), B_2(\varphi), \ldots, B_{k+1}(\varphi)\}, \tag{5}$$

де матриці $B_1(\varphi), B_2(\varphi), \ldots, B_{k+1}(\varphi)$ мають відповідно розміри $r_1 \times r_1$, $(r_2 - r_1)\times(r_2 - r_1), \ldots, (n - r_k)\times(n - r_k)$.

Доведення. Для того щоб система (1) відносно змінних x розділялась на k підсистем, згідно з ([1], розд. 3, § 7) достатньо можливості перетворення одного розкладу одиничної n-мірної матриці у вигляді суми змінних матриць проектування, для яких виконується властивість інваріантності, в інший розклад, що являє собою суму постійних матриць проектування.

Для кожного $i = 1, \ldots, k$ виконання нерівності (2) гарантує експоненціальну дихотомію тора $x = 0$ системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = [A(\varphi) + (1/2)\lambda_i(\varphi) I_n] x. \tag{6}$$

Для цих систем матриці проектування $C_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, k$, на підпростори $E_i^+(\varphi)$ вздовж $E_i^-(\varphi)$ неперервно залежать від параметра φ, а їх ранги не залежать від φ: $\operatorname{rang} C_i(\varphi) = r_i$.

Покажемо, що матриці $[C_i(\varphi) - C_{i-1}(\varphi)]$, $i = 2, \ldots, k$, є матрицями проектування. З нерівностей (2) випливають оцінки

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\int_\tau^t \lambda_i(\varphi_\sigma(\varphi))\, d\sigma\right\} \left\| \Omega_\tau^t(\varphi) C_i(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| \le K \exp\{-\gamma(t - \tau)\}, \quad \tau \le t,$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\int_\tau^t \lambda_i(\varphi_\sigma(\varphi))\, d\sigma\right\} \left\| \Omega_\tau^t(\varphi) [C_i(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n] \right\| \le K \exp\{-\gamma(t - \tau)\}, \quad t < \tau. \tag{7}$$

Для $C_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, k$, виконується властивість інваріантності

$$C_i(\varphi_t(\varphi)) \Omega_0^t(\varphi) \equiv \Omega_0^t(\varphi) C_i(\varphi). \tag{8}$$

Припустимо, що $1 \le i < j \le k$. Оскільки

$$[C_j(\varphi) - C_i(\varphi)] C_i(\varphi) \equiv [C_j(\varphi) - I_n] C_i(\varphi),$$

$$C_i(\varphi)[C_j(\varphi) - C_i(\varphi)] \equiv C_i(\varphi)[C_j(\varphi) - I_n],$$

то, враховуючи, що $\dim E_i^+(\varphi) = r_i < r_j = \dim E_j^+(\varphi)$, а також нерівність (7) для фіксованих i та j, встановлюємо, що

$$[C_j(\varphi) - C_i(\varphi)] C_i(\varphi) \equiv 0, \quad C_i(\varphi)[C_j(\varphi) - C_i(\varphi)] \equiv 0. \tag{9}$$

З (9) для довільних $i, j = 1, \ldots, k$ маємо

$$C_i(\varphi) C_j(\varphi) \equiv C_j(\varphi) C_i(\varphi) \equiv C_l(\varphi), \tag{10}$$

де $l = \min\{i, j\}$. Враховуючи (10), одержуємо

$$[C_i(\varphi) - C_{i-1}(\varphi)]^2 \equiv$$

$$\equiv C_i^2(\varphi) - C_i(\varphi) C_{i-1}(\varphi) - C_{i-1}(\varphi) C_i(\varphi) + C_{i-1}^2(\varphi) \equiv C_i(\varphi) - C_{i-1}(\varphi),$$

$$[C_i(\varphi) - C_{i-1}(\varphi)][C_j(\varphi) - C_{j-1}(\varphi)] \equiv$$

$$\equiv C_i(\varphi) C_j(\varphi) - C_i(\varphi) C_{j-1}(\varphi) -$$

$$- C_{i-1}(\varphi) C_j(\varphi) + C_{i-1}(\varphi) C_{j-1}(\varphi) \equiv 0 \quad \forall\, i \ne j.$$

Остаточно для кожного $i, j = 2, \ldots, k$ маємо

$$[C_i(\varphi)-C_{i-1}(\varphi)][C_j(\varphi)-C_{j-1}(\varphi)] \equiv \begin{cases} C_i(\varphi)-C_{i-1}(\varphi), & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

З (8) випливає, що для кожної з матриць $[C_i(\varphi)-C_{i-1}(\varphi)]$, $i=2, \ldots, k$, виконується властивість інваріантності

$$[C_i(\varphi_t(\varphi))-C_{i-1}(\varphi_t(\varphi))]\Omega_0^t(\varphi) \equiv \Omega_0^t(\varphi)[C_i(\varphi)-C_{i-1}(\varphi)]. \tag{11}$$

Таким чином, одинична матриця може бути представлена у вигляді суми $k+1$ матриць проектування

$$I_n \equiv C_1(\varphi) + [C_2(\varphi)-C_1(\varphi)] + \ldots + [I_n - C_k(\varphi)], \tag{12}$$

для кожної з яких виконується (11).

З тотожності (3) при $i=1$ випливає, що існує невироджена матриця $T(\varphi) \in$ $\in C'(\mathcal{T}_m, a)$ така, що

$$T^{-1}(\varphi)C_1(\varphi)T(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{I_{r_1}, 0\},$$

а також

$$T_1^{-1}(\varphi)[C_2(\varphi)-C_1(\varphi)]T(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{0, P_1(\varphi)\},$$

де $P_1(\varphi)$ — $(n-r_1)\times(n-r_1)$-мірна матриця проектування.

Використовуючи умову $m<r_2-r_1$, яка випливає з (4), встановлюємо [4], що існує $(n-r_1)\times(n-r_1)$-мірна матриця $T_1(\varphi)\in C'(\mathcal{T}_m, a)$ така, що

$$T_1^{-1}(\varphi)P_1(\varphi)T_1(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{I_{r_2-r_1}, 0\}.$$

Тоді існує невироджена матриця $L_1(\varphi)\in C'(\mathcal{T}_m, a)$ вигляду $L_1(\varphi) =$ $= T(\varphi)\operatorname{diag}\{I_{r_1}, T_1(\varphi)\}$, для якої виконуються рівності

$$L_1^{-1}(\varphi)C_1(\varphi)L_1(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{I_{r_1}, 0, 0\},$$

$$L_1^{-1}(\varphi)[C_2(\varphi)-C_1(\varphi)]L_1(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{0, I_{r_2-r_1}, 0\},$$

звідки випливає

$$L_1^{-1}(\varphi)C_2(\varphi)L_1(\varphi) \equiv$$

$$\equiv L_1^{-1}(\varphi)C_1(\varphi)L_1(\varphi) + L_1^{-1}(\varphi)[C_2(\varphi)-C_1(\varphi)]L_1(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{I_{r_2}, 0\}.$$

Далі одержуємо

$$L_1^{-1}(\varphi)[C_3(\varphi)-C_2(\varphi)]L_1(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{0, P_2(\varphi)\},$$

де $P_2(\varphi)$ — $(n-r_2)\times(n-r_2)$-мірна матриця проектування.

Проробляючи аналогічну операцію ще $k-2$ разів, доводимо, що існує невироджена матриця $L(\varphi)\in C'(\mathcal{T}_m, a)$ вигляду

$$L(\varphi) = T(\varphi)\operatorname{diag}\{I_{r_1}, T_1(\varphi)\} \ldots \operatorname{diag}\{I_{r_{k-1}}, T_{k-1}(\varphi)\},$$

за допомогою якої тотожність (12) перетворюється на тотожність

$$I_n \equiv L^{-1}(\varphi)C_1(\varphi)L(\varphi) + L^{-1}(\varphi)[C_2(\varphi) - C_1(\varphi)]L(\varphi) + \ldots$$
$$\ldots + L^{-1}(\varphi)[I_n - C_k(\varphi)]L(\varphi) \equiv$$
$$\equiv \operatorname{diag}\{I_{r_1}, 0, \ldots, 0\} + \operatorname{diag}\{0, I_{r_2-r_1}, \ldots, 0\} + \ldots + \operatorname{diag}\{0, 0, \ldots, I_{n-r_k}\}, \tag{13}$$

а згідно з [1] цього досить для виконання (5). Теорему доведено.

В умовах теореми 1 відмова від нерівності (4) може призвести до неможливості розділення змінних, але відмовитись від неї все ж можна, якщо накласти додаткові умови на матриці $S_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, k$. Сформулюємо це у вигляді теореми.

Теорема 2. *Нехай при деяких* $\lambda_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $i = 1, \ldots, k$, *існують невироджені симетричні матриці* $S_i(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m, a)$, $i = 1, \ldots, k$, *що задовольняють нерівності* (5) *і мають вигляд*

$$S_1(\varphi) = \operatorname{diag}\left\{\check{S}_1, -\hat{S}_1(\varphi)\right\},$$

$$S_i(\varphi) = \operatorname{diag}\left\{\check{S}_i, -\hat{S}_i(\varphi)\right\}, \quad i = 2, \ldots, k,$$

де $\check{S}_i(\varphi)$ — $(r_1 \times r_1)$-мірні, $\hat{S}_1(\varphi)$, $\check{S}_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, k$, додатно визначені; $\hat{S}_i(\varphi)$, $i = 2, \ldots, k$, мають $r_i - r_1$ додатних власних чисел і $n - r_i$ від'ємних. Тоді для того щоб існувала невироджена матриця $L(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m, a)$, що забезпечує (5), необхідно і достатньо, щоб квадратичні форми $\left(\hat{S}_i(\varphi)z, z\right)$, $i = 2, \ldots, k$, $z \in R^{n-r_1}$, можна було звести до алгебраїчної суми квадратів, тобто існували $(n - r_1) \times (n - r_1)$-мірні матриці $\overline{Q}_i(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m, a)$, $i = 2, \ldots, k$, такі, що

$$\overline{Q}_i^*(\varphi)\hat{S}_1(\varphi)\overline{Q}_i(\varphi) = \operatorname{diag}\{I_{r_i - r_1}, -I_{n-r_i}\}.$$

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
2. *Самойленко А. М., Мальков В. А., Трофимчук С. И.* Расщепляемость линейного расширения динамической системы на торе // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 11. – С. 19–22.
3. *Ткаченко В. И.* О блочной диагонализации почти-периодических систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 6. – С. 18–20.
4. *Самойленко А. М.* Квазипериодические решения систем линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 5–26.

Одержано 05.07.94