УДК 517. 9

В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ З КВАЗІПЕРІОДИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ОБМЕЖЕНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ*

For the discrete dynamical system $\omega_n = \omega_0 + \alpha n$ (α is constant vector with rationally independent coordinates) on the s-dimensional torus Ω, the set L of their linear unitary extensions $x_{n+1} = A(\omega_0 + \alpha n)x_n$ is considered. $A(\omega)$ is a continuous function on the torus Ω with values in the space of m-dimensional unitary matrices. It is proved that linear extensions with non almost periodic solutions form a set of the second category (the intersection of countable everywhere dense subsets) in L. For systems of linear differential equations with quasiperiodic skew symmetric matrices, analogous statement is valid.

Для дискретної динамічної системи $\omega_n = \omega_0 + \alpha n$ (α — сталий вектор з раціонально незалежними координатами) на k-вимірному торі Ω розглядається множина L її лінійних унітарних розширень $x_{n+1} = A(\omega_0 + \alpha n)x_n$, де $A(\omega)$ – неперервна функція на торі Ω зі значеннями в просторі m-вимірних унітарних матриць. Доводиться, що в L множину другої категорії (перетин зліченної множини скрізь щільних відкритих підмножин) утворюють розширення, розв'язки яких не майже періодичні. Аналогічне твердження справедливе для систем лінійних диференціальних рівнянь з квазіперіодичними кососиметричними матрицями.

Розглянемо систему лінійних різницевих рівнянь з майже періодичними коефіцієнтами

$$x_{n+1} = a_n x_n, \quad n \in Z, \tag{1}$$

де $x_n \in C^m$ — m-вимірний комплексний простір, послідовність невироджених $m \times m$-матриць $\{a_n, n \in Z\}$ майже періодична (м. п.), тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна на дійсній осі множина ε-майже періодів τ_ε послідовності $\{a_n, n \in Z\}$: $\| a_{n+\tau_\varepsilon} - a_n \| < \varepsilon$ для всіх $n \in Z$ [1].

У множині послідовностей $\{a_n, n \in Z\}$ введемо рівномірну метрику

$$\rho(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sup_{n \in Z} \| a_n - b_n \|,$$

$\| \cdot \|$ — норма матриці чи вектора. Для послідовності $\{a_n\}$ розглянемо послідовність зсувів $\{a_n^m, n \in Z\}$, $a_n^m = a_{n+m}$. Тоді, якщо послідовність $\{a_n\}$ м. п., то замикання множини зсувів $\Omega = \mathrm{cls}\{\{a_n^m, n \in Z\}, m \in Z\}$ у рівномірній топології є компактною абелевою групою зі щільною підгрупою Z [2].

Оператор зсуву $(\{a_n\}, m) = \{a_{n+m}\} = \omega \cdot m$ задає на множині Ω динамічну систему, а систему (1) можна записати так:

$$x_{n+1} = a(\omega \cdot n)x_n, \quad n \in Z, \tag{2}$$

де $a(\omega)$ — неперервна на Ω матричнозначна функція з відокремленим від нуля визначником $\inf_\omega |\det a(\omega)| \geq c > 0$.

Аналогічно з системою з неперервним часом [3, 4] доводиться наступне твердження: якщо всі розв'язки системи (1) обмежені, то існує заміна змінних $x_n = u(\omega \cdot n)y_n$ з неперервною на Ω невиродженою матрицею-функцією $u(\omega)$, яка переводить систему (2) в систему $y_{n+1} = b(\omega \cdot n)y_n$ з унітарною при всіх $\omega \in \Omega$ матрицею $b(\omega)$.

Позначимо множину всіх унітарних матриць m-го порядку через $U(m)$. Ві-

* Робота виконана при фінансовій підтримці Державного комітету України з питань науки і технологій (Фонд фундаментальних досліджень).

домо, що $U(m)$ є компактною зв'язною групою Лі. Далі вважаємо, що у системі (2) матриця $a(\omega)$ унітарна при всіх значеннях $\omega \in \Omega$, а Ω — s-вимірний тор R^s/Z^s, $s \geq 1$. Дискретна динамічна система на торі задається рівністю

$$\omega \cdot n = \alpha n + \omega_0, \tag{3}$$

де $\alpha \in R^s$ — сталий вектор, числа $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, 1)$ раціонально незалежні. Потік (3) скрізь щільний на торі. Нехай $C(\Omega, U(m))$ — простір неперервних на торі Ω функцій зі значеннями в просторі $U(m)$. У просторі $C(\Omega, U(m))$ вводиться звичайна норма $\| a(\omega) \|_0 = \sup\limits_{\omega \in \Omega} \| a(\omega) \|$. Кожному елементу $a(\omega)$ з простору $C(\Omega, U(m))$ відповідає різницеве рівняння (2), задане на торі Ω з потоком (3). Фундаментальна система розв'язків системи (2) $\Phi_a(\omega_0, n)$, $\Phi_a(\omega_0, 0) = I$ (I — одинична матриця) задається формулою

$$\Phi_a(\omega_0, n) = a(\omega_0 \cdot (n-1)) \ldots a(\omega_0 \cdot 1)\, a(\omega_0), \quad n \geq 1.$$

При від'ємних значеннях n

$$\Phi_a(\omega_0, n) = a^{-1}(\omega_0 \cdot n) \ldots a^{-1}(\omega_0 \cdot (-1)), \quad n \leq -1.$$

Функція $\Phi_a(\omega, n)$ утворює коцикл $\Phi_a(\omega, n+m) = \Phi_a(\omega \cdot n, m)\, \Phi_a(\omega, n)$.

Нехай $X = \operatorname{cls}\{(\omega_0, I) \cdot n : n \in Z\} \subset \Omega \times U(m)$ — замикання траєкторії з початковою точкою (ω_0, I) системи (2). На X очевидним чином вводиться динамічна система (X, Z):

$$(\omega, A) \cdot n = (\omega \cdot n, \Phi(\omega, n) A), \quad (\omega, A) \in X,$$

(X, Z) мінімальна та дистальна. Нехай π — проекція на перший співмножник $\pi : X \to \Omega$. В [3, 5] показано, що $\pi^{-1}(\omega_0)$ утворює компактну групу. Позначимо її через G. Відповідно для всіх $\omega \in \Omega$ прообраз $\pi^{-1}(\omega)$ є однорідним простором групи $G \subset U(m)$.

Лема 1. *Нехай для системи* (2) $\Phi_a(\omega_0, n)$ *є майже періодичною функцією* n. *Тоді означена вище група* G *комутативна.*

Доведення. Для м. п. функції $\Phi_a(\omega_0, n)$ на її замиканні $X \subset \Omega \times U(m)$ можна ввести структуру компактної комутативної групи з операцією

$$(\omega_1, A_1) \cdot (\omega_2, A_2) =$$

$$= \left(\lim_{k \to \infty} (\omega_0 \cdot (n_k^1 + n_k^2)),\ \lim_{k \to \infty} \Phi_a(\omega_0,\, n_k^1 + n_k^2) \right), \tag{4}$$

де

$$(\omega_i, A_i) = \left(\lim_{k \to \infty} \omega_0 \cdot n_k^i,\ \lim_{k \to \infty} \Phi_a(\omega_0,\, n_k^i) \right),\ i = 1, 2$$

[6, с. 420]. Елементи g групи $G \subset U(m)$ визначаються формулою $g = \lim\limits_{l \to \infty} \Phi_a(\omega_0, n_l)$ для тих послідовностей $\{n_l\}$, які задовольняють умову

$$\lim_{l \to \infty} \omega_0 \cdot n_l = \omega_0.$$

Враховуючи означення потоку на Ω, бачимо, що $\omega_0 \cdot (n_l^1 + n_l^2) \to \omega_0$, якщо

$\omega_0 \cdot n_l^i \to \omega_0$, $l \to \infty$, $i = 1, 2$. Дійсно, потік на торі Ω м. п., тому він рівномірно стійкий: для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з нерівності $\rho(\omega_1, \omega_2) < \delta$ випливає $\rho(\omega_1 \cdot n, \omega_2 \cdot n) < \varepsilon/2$ для всіх $n \in Z$. Тут $\rho(\cdot, \cdot)$ — метрика на торі Ω. Оскільки $\omega_0 \cdot n_l^i \to \omega_0$, $l \to \infty$, то існують такі числа N_1 і N_2, що для $n_l^i > N_i$: $\rho(\omega_0 \cdot n_l^i, \omega_0) < \delta$. Тому

$$\rho(\omega_0 \cdot (n_l^1 + n_l^2), \omega_0) \le \rho((\omega_0 \cdot n_l^1) \cdot n_l^2, \omega_0 \cdot n_l^1) + \rho(\omega_0 \cdot n_l^1, \omega_0) < \varepsilon.$$

Елементу g групи G ставимо у відповідність елемент $(\omega_0, g) \in X$. Тим самим групу G ототожнюємо з підгрупою комутативної групи X. Тому група G комутативна. Лему доведено.

Лема 2. *У просторі $C(\Omega, U(m))$ скрізь щільну підмножину утворюють функції $a(\omega)$, яким відповідають системи* (2) *з щільною в $\Omega \times U(m)$ траєкторією.*

Доведення. Нехай W — відкрита непорожня підмножина $\Omega \times U(m)$. Розглянемо множину

$$E(W) = \{a(\omega) : a(\omega) \in C(\Omega, U(m)),\ O(\omega_0, a) \cap W \neq \varnothing\},$$

де $O(\omega_0, a)$ — траєкторія рівняння (2) при $\omega = \omega_0$, $x_0(\omega_0) = I$. Аналогічно [7] показуємо, що $E(W)$ — відкрита скрізь щільна підмножина $C(\Omega, U(m))$.

Для довільного $\delta > 0$ існує скінченне покриття компакта $\Omega \times U(m)$ відкритими множинами W_i^0, $i = \overline{1, n_0}$, і діаметр кожної множини W_i^0 менше δ. Тоді множина $\bigcap_{i=1}^{n_0} E(W_i^0)$ відкрита та щільна в $C(\Omega, U(m))$. Елементи $b \in \bigcap_{i=1}^{n_0} E(W_i^0)$ задовольняють умову: через кожну кулю діаметра 2δ в просторі $\Omega \times U(m)$ проходить траєкторія рівняння $x_{n+1} = b(\omega \cdot n) x_n$.

Розглянемо покриття множини $\Omega \times U(m)$ відкритими множинами W_i^1 діаметра $\delta/2$ таке, що для кожного W_i^1 існує множина W_j^0, для якої $W_i^1 \subset W_j^0$, $i = \overline{1, n_1}$. Аналогічно розглядаємо покриття множини $\Omega \times U(m)$ множинами W_i^j з діаметром $\delta/2^j$. Елементи $a(\omega)$ множини $E_j = \bigcap_{i=1}^{n_j} E(W_i^j)$ задовольняють умову: траєкторія відповідного рівняння (2) перетинає кожну кулю діаметра $\delta/2^{j-1}$ в множині $\Omega \times U(m)$. Множини E_j відкриті і щільні в $C(\Omega, U(m))$ за побудовою.

Множина $F = \bigcap_{i=0}^{\infty} E_i$ щільна в $C(\Omega, U(m))$. Елементи $a(\omega) \in F$ відповідають рівнянням (2) з щільними в $\Omega \times U(m)$ траєкторіями. Лему доведено.

Теорема 1. *У просторі $C(\Omega, U(m))$ при $m \ge 2$ множину другої категорії (перетин зліченної множини відкритих скрізь щільних підмножин) утворюють функції $a(\omega)$, яким відповідають рівняння* (2) *з не майже періодичними розв'язками.*

Доведення. За лемою 2 у множині $C(\Omega, U(m))$ підмножину другої категорії утворюють функції, яким відповідають рівняння (2) зі щільним в $\Omega \times U(m)$ розв'язком $\Phi_a(\omega_0, n)$. Тому для такого розв'язку множина $\pi^{-1}(\omega_0)$ співпадає з $U(m)$. При $m \ge 2$ група $U(m)$ не комутативна. За лемою 1 цей розв'язок не може бути м. п.

Наслідок 1. *У просторі $R^s \times C(\Omega_s, U(m))$ при $m \ge 2$ множину другої категорії утворюють вектори $\alpha \in R^s$ і функції $a(\omega) \times C(\Omega_s, U(m))$, яким* *відповідають рівняння (2), (3) з не майже періодичними розв'язками.*

***Зауваження* 1.** В роботі [8] побудовано приклад системи (2) такої, що всі системи з деякого її околу (в топології простору матриць-коефіцієнтів $C(\Omega, U(m))$) мають не м. п. розв'язки. Це система

$$x_{n+1} = \operatorname{diag}(e^{in}, \dots, e^{in})x_n, \quad x_n \in C^m, \quad n \in Z. \tag{5}$$

Матриця коефіцієнтів системи (5) не задовольняє таку умову.

Умова А. Для неперервної функції $a(\omega): \Omega \to U(m)$ існує гомотопія в просторі $U(m)$ в одиничну матрицю.

Умова А дає можливість продовжити різницеве рівняння (2) до звичайного диференціального рівняння з квазіперіодичною матрицею

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{6}$$

$x \in C^m$, $A(t)$ — неперервна квазіперіодична функція зі значеннями в просторі косоермітових матриць $A(t) + A^*(t) = 0$ (A^* — спряжена матриця). Введемо відстань між двома системами вигляду (6) як відстань між матрицями-функціями коефіцієнтів у рівномірній на осі метриці. Фундаментальна система розв'язків $\Phi_A(t)$ системи (6) є унітарною матрицею при всіх $t \in R$.

Запишемо квазіперіодичну систему (6) як лінійне розширення динамічної системи на торі

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta, \tag{7}$$

де $x \in C^m$, $\varphi \in \Omega_{s+1}$, $\Omega_{s+1} = R^{s+1}/Z^{s+1}$ — $(s+1)$-вимірний тор, $P(\varphi)$ — неперервна функція $\Omega_{s+1} \to u(m)$, $u(m)$ — множина косоермітових матриць m-го порядку, $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_s, 1) = (\alpha, 1)$ — сталий вектор з раціонально незалежними координатами. Нехай $\varphi(t, \varphi_0)$ — розв'язок другого рівняння (7), $\Phi_P(\varphi_0, t)$, $\Phi_P(\varphi_0, 0) = I$, $\varphi_0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_{s+1}^0)$ — фундаментальна система розв'язків системи рівнянь $dx/dt = P(\varphi(t, \varphi_0))x$. Як і в дискретному випадку, введемо замикання траєкторії

$$X = \operatorname{cls}\{(\varphi(t, \varphi_0), \Phi_P(\varphi_0, t)) : t \in R\} \subset \Omega_{s+1} \times U(m)$$

та проекцію $\pi: X \to \Omega_{s+1} \times \pi^{-1}(\varphi_0) = G$ утворює компактну групу. Повторюючи доведення леми 1, показуємо: якщо функція $\Phi_P(\varphi_0, t): R \to U(m)$ м. п., то група G комутативна.

Розглянемо множину лінійних розширень (7) динамічної системи на торі $d\varphi/dt = \beta$. Відстань між двома розширеннями задається рівномірною на торі нормою матричних функцій $P(\varphi)$.

Теорема 2. *У просторі лінійних розширень (7) множину другої категорії утворюють розширення з не майже періодичними розв'язками.*

Спочатку доведемо наступну лему.

Лема 3. *Нехай відображення $F(t, \varphi)$: $[0, 1] \times \Omega_s \to U(m)$ неперервне відносно t, φ і неперервно диференційовне відносно t, $F(0, \varphi) = I$, $F(1, \varphi) = a(\varphi)$. Тоді для досить малого $\varepsilon > 0$ і $b(\varphi) \in C(\Omega_s, U(m))$, $\|a(\varphi) - b(\varphi)\|_0 < \varepsilon$ існує неперервне відносно t, φ та неперервно диференційовне відносно t відображення $G(t, \varphi)$: $[0, 1] \times \Omega_s \to U(m)$ таке, що $G(0, \varphi) = I$, $G(1, \varphi) = b(\varphi)$ і виконуються нерівності*

$$\| G(t, \varphi)-F(t, \varphi)\|_0 < \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial G(t, \varphi)}{\partial t} - \frac{\partial F(t, \varphi)}{\partial t} \right\|_0 < K\varepsilon \tag{8}$$

з константою $K > 0$, *яка залежить тільки від функції* $F(t, \varphi)$.

Доведення. Справедлива оцінка

$$\| a^*(\varphi)b(\varphi)-I\|_0 \le \| a^*(\varphi)\|_0 \| a(\varphi)-b(\varphi)\|_0 < \varepsilon.$$

При досить малих $\varepsilon > 0$ існує неперервний на торі Ω_s логарифм

$$\ln (a^*(\varphi)b(\varphi)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\lambda I - a^*(\varphi)b(\varphi))^{-1} \ln\lambda\, d\lambda, \tag{9}$$

де Γ — границя однозв'язної області комплексної площини, яка містить замикання множини власних значень матриць $a^*(\varphi)b(\varphi)$, $\varphi \in \Omega_s$, і не містить нуля [9, с. 49]. Оцінюючи праву частину (9), одержуємо нерівність

$$\| \ln (a^*(\varphi)b(\varphi)) \|_0 \le 8\varepsilon.$$

Функція $H(t, \varphi) = \exp [t \ln (a^*(\varphi)b(\varphi))]$ здійснює гомотопію $a^*(\varphi)b(\varphi)$ до одиничної матриці;

$$\left\| \frac{\partial H(t, \varphi)}{\partial t} \right\|_0 \le \| H(\varphi)\|_0 \| \ln (a^*(\varphi)b(\varphi)) \|_0 \le 8\varepsilon.$$

Шукана функція $G(t, \varphi)$ має вигляд $G(t, \varphi) = F(t, \varphi)H(t, \varphi)$. Використовуючи останню формулу, одержуємо оцінки (8):

$$\| G-F \|_0 \le \| H-I \|_0 < \varepsilon,$$

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t} \right\|_0 \le \left\| \frac{\partial F}{\partial t}(H-I) \right\|_0 + \left\| F \frac{\partial H}{\partial t} \right\|_0 \le \varepsilon\left(\left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|_0 + 8 \right).$$

***Доведення** теореми* 2. Послідовність $\varphi(n, \varphi_0) = \beta n + \varphi_0$, $x_n = \Phi_P(\varphi_0, n)$, $n \in Z$, є розв'язком дискретної системи (2), де

$$\omega_0 \cdot n = \alpha n + \omega_0, \; a(\omega) = \Phi_P(\varphi, 1), \; \omega = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s) \in \Omega_s, \; \varphi = (\omega, \varphi_{s+1}^0).$$

Вигляд функції $a(\omega)$ одержуємо з формули

$$a(\omega \cdot n) = \Phi_P(\varphi, n+1)\, \Phi_P^*(\varphi, n) = \Phi_P(\varphi \cdot n, 1), \; n \in Z,$$

враховуючи те, що точка $\varphi = (\omega, \varphi_{s+1}^0)$ має $(s+1)$-шу координату, яка не змінюється при відображенні $\varphi \cdot n$.

Для відкритої непорожньої підмножини W множини $\Omega_s \times U(m)$ розглянемо множину

$$E_1(W) = \{ P(\varphi) \colon P(\varphi) \in C(\Omega_{s+1}, u(m)), \; O(\varphi_0, P) \cap W \ne \varnothing \},$$

де $O(\varphi_0, P)$ — траєкторія в $\Omega_s \times U(m)$ системи (2) при $a(\omega) = \Phi_P(\varphi, 1)$, яка проходить через точку (φ_0, I). Як і множина $E(W)$ в лемі 2, множина $E_1(W)$ відкрита в $C(\Omega_{s+1}, u(m))$. Доведемо її щільність. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та функцію $P(\varphi)$. Рівнянню (7) відповідає дискретна система (2) з матрицею $a(\omega)$. За лемою 2 в ε-околі функції $a(\omega)$ існує функція $a_1(\omega) \in C(\Omega_s, U(m))$ така, що $a_1(\omega) \in E(W)$. При досить малих ε функція $a_1(\omega)$ гомотопна $a(\omega)$, а тому й одиничній матриці.

Покажемо, що $a_1(\omega)$ відповідає лінійне розширення

$$\frac{dx}{dt} = P_1(\varphi)x, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta \tag{10}$$

з матрицею $P_1(\varphi)$, яка мало відрізняється від $P(\varphi)$. Матрична функція $\Phi_P(\varphi, t)$ при $\varphi = (\omega, \varphi_{s+1}^0)$, $t \in [0, 1]$ задає гомотопію $a(\omega)$ до одиничної матриці. Нехай функція $F(\varphi, t): \Omega_s \times [0, 1] \to U(m)$ задає гомотопію $a_1(\omega)$ до одиничної матриці. За лемою 3 функцію $F(\varphi, t)$ можна вибрати так, щоб

$$\| F(\varphi, t) - \Phi_P(\varphi, t) \|_0 < \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial F(\varphi, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_P(\varphi, t)}{\partial t} \right\|_0 < K\varepsilon$$

з константою $K > 0$, яка залежить тільки від правої частини системи (7). Функція $F(\varphi, t)$ є розв'язком системи (10) при $\varphi = (\omega, \varphi_{s+1}^0)$, $t \in [0, 1]$. Розв'язок системи (10) при $\varphi = (\omega, \varphi_{s+1}^0)$, $t \in R$ визначається за формулою

$$\Phi_{P_1}(\varphi, t) = \Phi_{P_1}(\varphi \cdot [t], t - [t]) \Phi_{P_1}(\varphi, [t]),$$

де $[t]$ — ціла частина числа t. Оскільки потік на торі Ω_{s+1} задається другим рівнянням (10), то $\varphi_0 \cdot [t]$ має вигляд $(\omega, \varphi_{s+1}^0)$. Тому

$$\Phi_{P_1}(\varphi \cdot [t], t - [t]) = F(\varphi_0 \cdot [t], t - [t]),$$

а $\Phi_{P_1}(\varphi_0, [t])$ визначається через розв'язок дискретного рівняння $x_{n+1} = a_1(\omega_0 \cdot [t]) x_n$; $\Phi_{P_1}(\varphi, t)$ при інших значеннях $\varphi \in \Omega_{s+1}$ визначаємо, використовуючи властивість коциклу

$$\Phi_{P_1}(\varphi, t_1 + t_2) = \Phi_{P_1}(\varphi \cdot t_1, t_2) \Phi_{P_1}(\varphi, t_1), \quad t_1, t_2 \in R, \quad \varphi \in \Omega_{s+1}.$$

Матрицю $P_1(\varphi)$ в системі (10) знаходимо з формули

$$P_1(\varphi) = \frac{\partial \Phi_{P_1}(\varphi_0, t)}{\partial t} \Phi_{P_1}^*(\varphi_0, t),$$

де $\varphi = \varphi_0 \cdot t$, $\varphi, \varphi_0 \in \Omega_{s+1}$. Якщо $\varphi_0 = (\omega, \varphi_{s+1}^0)$, $t \in [0, 1]$, то

$$P_1(\varphi) = \frac{\partial F(\varphi_0, t)}{\partial t} F^*(\varphi_0, t).$$

Зауважимо, що для кожної точки $\varphi \in \Omega_{s+1}$ існує зображення $\varphi = (\omega, \varphi_{s+1}^0) \cdot t$, $t \in [0, 1]$. Враховуючи нерівності (9), маємо оцінку

$$\| P(\varphi) - P_1(\varphi) \|_0 < 3K\varepsilon.$$

Таким чином, системи, розв'язки яких проходять через множину W, утворюють відкриту скрізь щільну підмножину в множині всіх систем (7).

Розглядаючи скінченні покриття $\Omega_s \times U(m)$ відкритими множинами і повторюючи доведення леми 2, доводимо, що в просторі систем (7) підмножину другої категорії утворюють системи, розв'язки яких щільні в $\Omega_s \times U(m)$. Тому системи, у яких $\pi^{-1}(\varphi_0) = U(m)$, утворюють підмножину другої категорії у множині систем (7). Ці системи при $m \geq 2$ мають не м. п. розв'язки. Теорему доведено.

Наслідок 2. *У просторі* $R^s \times C(\Omega_s, u(m))$ *при* $m \geq 2$ *множину другої категорії утворюють вектори* $\beta \in R^s$ *і функції* $P(\varphi) \in C(\Omega_s, u(m))$, *яким відповідають системи* (7) *з не м. п. розв'язками.*

Розглянемо тепер систему (6) з майже періодичною матрицею $A(t)$. Апроксимуючи м. п. функцію $A(t)$ квазіперіодичною та застосовуючи теорему 2, доводимо таку теорему.

Теорема 3. *При* $m \geq 2$ *у просторі всіх систем* (6) *з м. п. косоермітовою матрицею скрізь щільну підмножину утворюють системи з не м. п. розв'язками.*

***Зауваження.* 2.** Теореми 1–3 залишаються справедливими для $x \in R^m$. У цьому випадку унітарні матриці замінюються на ортогональні, косоермітові на кососиметричні.

3. З теореми 2 випливає, що в довільному околі кожної системи звичайних диференціальних рівнянь з квазіперіодичною косоермітовою матрицею існує система зі всіма обмеженими, але не м. п. розв'язками. У роботі [10] доведено в деякій мірі обернене твердження: у довільному околі кожної системи звичайних диференціальних рівнянь з квазіперіодичною кососиметричною матрицею з частотним базисом розмірності два чи три (в рівномірній на осі метриці для матриць коефіцієнтів) існує система з усіма квазіперіодичними розв'язками. Аналогічні викладки справедливі для систем різницевих рівнянь, які задовольняють умову А. Тобто для цих розмірностей у просторі всіх систем (у рівномірній на осі метриці для матриць-коефіцієнтів) скрізь щільні підмножини утворюють як системи з м. п. розв'язками, так і системи, розв'язки яких не є м. п. Для розмірностей частотного базису більше трьох аналогічне питання відкрите. Зауважимо, що у просторі $R^s \times C(\Omega_s, u(m))$ задача про щільність систем (7) з м. п. розв'язками тривіальна.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
2. *Johnson R. A.* Exponential dichotomy, rotation number and linear differential operators with bounded coefficients // J. Different. Equats. – 1986. – **61**, № 1. – P. 54–78.
3. *Johnson R. A.* On a Floquet theory for almost periodic, two-dimensional linear systems // Ibid. – 1980. – **37**, № 2. – 184–205.
4. *Ellis R., Johnson R. A.* Topological dynamics and linear differential systems // Ibid. – 1982. – **44**, № 1. – P. 21–39.
5. *Coppel W. A.* Almost periodic properties of ordinary differential equations // Ann. Math. Pura Appl. – 1967. – **76**, № 1. – 27–49.
6. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.–Л.: ОГИЗ – Гостехиздат, 1947. – 448 с.
7. *Ellis R.* The construction of minimal discrete flows // Amer. J. Math. – 1965. – **87**, № 3. – P. 564–574.
8. *Ткаченко В. И.* О линейных почти периодических разностных уравнениях с ограниченными решениями // Асимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметром. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 121–124.
9. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 242 с.
10. *Kurzweil J., Venkovska A.* Linear differential equations with quasiperiodic coefficients // Czechoslovak. Math. J. – 1987. – **37**, № 2. – P. 424–470.

Одержано 08.07.94