УДК 517.574

Я. В. Васильків, А. А. Кондратюк, С. І. Тарасюк (Львів. ун-т)

ЗАГАЛЬНА ПРОБЛЕМА ПЕЛІ

In the class of subharmonic in $\mathbb{R}^{p+2}$, $p \in \mathbb{N}$, functions u of finite lower order, we find a strict upper estimate for

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{m_q(r, u^+)}{T(r, u)}, \quad 1 < q \leq \infty,$$

where $T(r, u)$ is the Nevanlinna characteristic of the functions u, $m_q(r, u^+)$ is the integral q-mean of the function u^+, $u^+ = \max(u, 0)$, on the sphere of radius r.

У класі субгармонічних в $\mathbb{R}^{p+2}$, $p \in \mathbb{N}$, функцій u скінченного нижнього порядку знайдена точна оцінка зверху для

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{m_q(r, u^+)}{T(r, u)}, \quad 1 < q \leq \infty,$$

де $T(r, u)$ — неванліннівська характеристика функції u, $m_q(r, u^+)$ — інтегральне q-середнє на сфері радіуса r функції u^+, $u^+ = \max(u, 0)$.

1. Вступ. Нехай u — субгармонічна в $\mathbb{R}^{p+2}$, $p \in \mathbb{N}$, функція, $|S^{p+1}|$ — площа одиничної сфери S^{p+1} в $\mathbb{R}^{p+2}$;

$$m_q(r, u) = \left\{ \frac{1}{|S^{p+1}|} \int_{S^{p+1}} |u(rx)|^q \, dS(x) \right\}^{1/q}, \quad r > 0, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Характеристика Неванлінни і максимум модуля функції u в кулі радіуса r визначаються відповідно співвідношеннями

$$T(r, u) = m_1(r, u^+),$$

$$B(r, u) = m_\infty(r, u^+) = \lim_{q \to \infty} m_q(r, u^+),$$

де $u^+ = \max(u, 0)$.

Нехай ρ, λ — порядок та нижній порядок функції u,

$$\rho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln T(r, u)}{\ln r}, \quad \lambda = \liminf_{r \to \infty} \frac{\ln T(r, u)}{\ln r}.$$

У 1932 р. Пелі [1] висунув гіпотезу, згідно з якою для довільної цілої функції f порядку $p \geq 0$ справедлива нерівність

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{B(r, \ln|f|)}{T(r, \ln|f|)} \leq \begin{cases} \pi\rho, & \rho \geq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}, & 0 \leq \rho < \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

В (1) рівність досягається, зокрема, для цілих функцій Мітаг–Лефлера (див., наприклад, [2, с. 111]). Повністю гіпотезу Пелі довів М. В. Говоров [3]. Із результатів В. П. Петренка [4] випливає, що співвідношення (1) залишається справедливим, якщо в ньому замінити ρ на λ. Для субгармонічних функцій в $\mathbb{R}^2$ нижнього порядку λ М. Л. Содін [5] одержав точну оцінку

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{m_q(r,u^+)}{T(r,u)} \le m_q(S_\lambda), \quad 1 < q \le \infty,$$

де $m_q(S_\lambda)$ — лебегове середнє порядку q, $1 < q < \infty$, функції

$$S_\lambda(\varphi) = \begin{cases} \pi\lambda \cos\lambda\varphi, & |\varphi| \le \pi/2\lambda, \\ 0, & \pi/2\lambda < |\varphi| \le \pi, \end{cases}$$

при $\lambda \ge 1/2$ і

$$S_\lambda(\varphi) = \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}\cos\lambda\varphi, \quad |\varphi| \le \pi,$$

при $\lambda < 1/2$, $m_\infty(S_\lambda) = \max\{S_\lambda(\varphi)\colon |\varphi| \le \pi\}$.

Основною метою даної статті є задача знаходження точної оцінки зверху

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{m_q(r,u^+)}{T(r,u)}, \quad 1 < q \le \infty,$$

для субгармонічних в $\mathbb{R}^{p+2}$, $p \in \mathbb{N}$, функцій скінченного нижнього порядку, яку ми називаємо загальною проблемою Пелі.

Функція Гегенбауера $C_\lambda^{p/2}(t)$ визначається [6] як розв'язок диференціального рівняння

$$(1-t^2)\frac{d^2 f}{dt^2} - (p+1)t\frac{df}{dt} + \lambda(\lambda+p)f = 0, \quad -1 < t < 1,$$

що задовольняє умову

$$\lim_{t\to 1-0} C_\lambda^{p/2}(t) = C_\lambda^{p/2}(1) := \frac{\Gamma(\lambda+p)}{\Gamma(p)\,\Gamma(\lambda+1)}.$$

Позначимо

$$\alpha_\lambda = \min\{\theta \in (0,\pi)\colon C_\lambda^{p/2}(\cos\theta) = 0\},$$

$$Q_\lambda^{p/2}(\theta) = \begin{cases} A(\lambda,p)C_\lambda^{p/2}(\cos\theta), & 0 \le \theta \le a_\lambda, \\ 0, & a_\lambda < \theta \le \pi, \end{cases}$$

де

$$A(\lambda,p) = \left(\frac{|S^p|}{|S^{p+1}|}\int_0^{a_\lambda} C_\lambda^{p/2}(\cos\theta)\sin^q\theta\, d\theta\right)^{-1}.$$

Сформулюємо основний результат статті.

Теорема 1. *Нехай u — субгармонічна в $\mathbb{R}^{p+2}$, $p \in \mathbb{N}$, функція нижнього порядку $\lambda > 0$. Тоді для всіх q, $1 < q \le \infty$, виконується співвідношення*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{m_q(r,u^+)}{T(r,u)} \le M_q(\lambda,p), \tag{2}$$

де $M_q(\lambda,p) = m_q\left(Q_\lambda^{p/2}\right)$. Існує субгармонічна в $\mathbb{R}^{p+2}$ функція u нижнього порядку λ, для якої в (2) досягається рівність.

Зауважимо, що при $q = +\infty$ цей результат встановив Б. Дальберг [7] методом, відмінним від запропонованого в цій статті. Крім того, з результату У. Хеймана [8, с. 166] випливає, що для субгармонічних функцій нульового порядку $\lambda = 0$ виконується співвідношення

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{m_q(r, u^+)}{T(r, u)} \le 1, \quad 1 < q \le \infty.$$

Надалі істотно використовується поняття стар-функції u^*, яка одержується за допомогою сферичної симетризації функції u,

$$u^*(re^{i\theta}) \le \int\limits_{C(\theta)} \tilde{u}(rx)\, dS(x) \overset{\text{def}}{=} J(\tilde{u}),$$

де

$$r = |y|, \quad y = (y_1, \ldots, y_{p+2}), \quad y_1 = r\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi,$$

$$C(\theta) = \{x \in S^{p+1} \colon x_1 \ge \cos\theta\},$$

$\tilde{u}$ — симетрична незростаюча перестановка функції $u(rx)$ як функції від x на S^{p+1} (див., наприклад, [9, 10]).

Для субгармонічних функцій стар-функцію при $p = 0$ ввів і вивчив А. Бернстейн [11, 12], а при $p \in \mathbb{N}$ — Р. Гарієпі і Дж. Льюіс [13, 14], А. Бернстейн і Б. Тейлор [10]. Для неї справедлива [13, 10] рівність

$$u^*(re^{i\theta}) = \sup_E \left\{ \int\limits_E u(rx)\, dS(x) \right\},$$

де $E \in S^{p+1}$, $|E| = |C(\theta)|$,

$$T(r, u) = \frac{1}{|S^{p+1}|} \max_\theta u^*(re^{i\theta}),$$

а також наступна лема.

Лема 1. *Нехай* $f,\ g \in L^1(S^{p+1})$. *Наступні твердження еквівалентні*:

1) *для довільного* $\theta \in [0, \pi]$ *виконується* $f^*(e^{i\theta}) \le g^*(e^{i\theta})$,

2) *для будь-якої опуклої неспадної на* $\mathbb{R}$ *функції* Φ

$$\int\limits_{S^{p+1}} \Phi(f(x))\, dS(x) = \int\limits_{S^{p+1}} \Phi(g(x))\, dS(x).$$

Доведення теореми 1 близьке за схемою до запропонованого М. Л. Содіним [5] для функцій, субгармонічних в $\mathbb{R}^2$. Труднощі, які виникають при $p \in \mathbb{N}$, пов'язані з тим, що u^* не є субгармонічною у відкритій верхній півплощині Π^+ на відміну від випадку $p = 0$. Однак вона має властивість L-субгармонічності.

Нехай

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{p+1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - p\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) =$$

$$= r^{-(p+1)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{p+1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + r^{-2}(\sin^p\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^{-p}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Означення [10]. *Функція f називається L-субгармонічною у відкритій множині $D \subset \Pi^+$, якщо:*

1) $f \in C(D)$;

2) *для будь-якої відкритої множини V, $\overline{V} \subset D$, і функції h такої, що $h \in C(\overline{V}), Lh = 0$ в V і $f \le h$ на ∂V нерівність $f \le h$ виконується скрізь у V.*

Лема 2 [10, 15]. *Нехай u — субгармонічна в $\mathbb{R}^{p+2}$ функція, $p \in \mathbb{N}$, $u(0) = 0$. Тоді $u^*(re^{i\theta})$ є L-субгармонічною в Π^+ і неперервною в $\overline{\Pi}^+$ функцією.*

Цей результат базується на наступному зауваженні А. Бернстейна і Б. Тейлора. Для довільної функції $u \in C^2(\mathbb{R}^{p+2})$ рівність $L(Ju) = J(\Delta u)$, де Δ — лапласіан в $\mathbb{R}^{p+2}$, виконується в Π^+.

При $p = 0$ оператори L і Δ співпадають, а при $p \in \mathbb{N}$ оператор L відрізняється від лапласіана на функціях $\mathbb{R}^{p+2}$, симетричних відносно осі y_1, знаком перед доданком $p \operatorname{ctg} \theta$.

2. Принцип Фрагмена–Ліндельофа. Нехай $\psi_\lambda(\theta)$ і $\varphi_\lambda(\theta)$ — два лінійно незалежні розв'язки [6] ультрасферичного диференціального рівняння

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^p\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \lambda(\lambda+p)(\sin^p\theta)f(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi,$$

що задовольняють умови

$$\lim_{\theta\to+0}\psi_\lambda(\theta) = \psi_\lambda(0) = 1, \quad \lim_{\theta\to+0}\frac{d\varphi_\lambda(\theta)}{d\theta}\sin^p\theta = -1.$$

Тоді функції

$$\Omega_\lambda(\theta) = \int_0^\theta \psi_\lambda(\tau)\sin^p\tau\,d\tau,$$

$$\Lambda_\lambda(\theta) = \lambda(\lambda+p)\int_0^\theta \varphi_\lambda(\tau)\sin^p\tau\,d\tau + 1$$

є лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння [15]

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^{-p}\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \lambda(\lambda+p)(\sin^{-p}\theta)f(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi,$$

звідки випливає L-гармонічність функцій $r^\lambda\Omega_\lambda(\theta)$ і $r^\lambda\Lambda_\lambda(\theta)$ у відкритій верхній півплощині Π^+. Позначимо $\theta_\lambda = \min(\pi, \inf\{\theta : \Omega_\lambda(\theta) = 0\})$.

Функція $\psi_\lambda(\theta)$ відрізняється від $C_\lambda^{p/2}(\cos\theta)$ сталим множником, тому $\alpha_\lambda < \theta_\lambda$.

Теорема 2 (принцип Фрагмена–Ліндельофа). *Нехай $u(z)$ — L-субгармонічна в куті $\{z : 0 < \arg z < \alpha\}$, $\alpha < \theta_\lambda$, функція, неперервна на його сторонах, така, що*

$$u(r) \le 0, \quad u(re^{i\alpha}) \le 0, \tag{3}$$

та існує число A таке, що $u(re^{i\theta}) \le Ar^\lambda$, $r > r_0$.

Тоді $u(z) \le 0$ *в замкненому куті* $\{z\colon 0 \le \arg z \le \alpha\}$.

Доведення. Нехай $0 < \alpha < \theta_\lambda$. Оскільки [13] $\varphi_\gamma(\theta) \to \varphi_\lambda(\theta)$ рівномірно при $\gamma \to \lambda$ на кожному компакті з $[0, \pi)$, то існує γ таке, що $\gamma > \lambda$ і $\alpha < \theta_\gamma$. Функція $\Lambda_\gamma(\theta)$ неперервна і $\Lambda_\gamma(0) = 1$, тому знайдеться δ, $0 < \delta < \alpha$, таке, що $\Lambda_\gamma(\theta) \ge 1/2$ для всіх $\theta \in [0, \delta]$.

Позначимо $H_\gamma(\theta, \varepsilon) = \Omega_\gamma(\theta) + 2\varepsilon\Lambda_\gamma(\theta)$, $\varepsilon > 0$. Оскільки $\alpha < \theta_\gamma$, $\Omega_\gamma(\theta) > 0$ для всіх $\theta \in [0, \alpha]$. Отже, для $\theta \in [0, \delta]$ виконується нерівність $H_\gamma(\theta, \varepsilon) \ge \varepsilon$. Крім того,

$$\min_{\delta \le \theta \le \alpha} H_\gamma(\theta, \varepsilon) \ge \min_{\delta \le \theta \le \alpha} \Omega_\gamma(\theta) - 2\varepsilon \min_{\delta \le \theta \le \alpha} |\Lambda_\gamma(\theta)| = m - 2\varepsilon M \ge \varepsilon$$

при $\varepsilon < m/(2M+1)$. Тому при $\theta \in [0, \alpha]$ і $0 < \varepsilon \le m/(2M+1)$

$$H_\gamma(\theta, \varepsilon) \ge \varepsilon. \tag{4}$$

Позначимо $W(re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) - \omega r^\gamma H_\gamma(\theta, \varepsilon)$, $\omega > 0$. Оскільки $u(re^{i\theta}) \le \le Ar^\lambda$, $r > r_0$, $\theta \in [0, \alpha]$, то з (4) випливає, що для довільного $\omega > 0$ існує $r_0(\omega) \ge 0$ таке, що

$$W(Re^{i\theta}) \le AR^\lambda - \omega\varepsilon R^\gamma \le 0, \quad R > r_0(\omega), \quad \theta \in [0, \alpha].$$

Функція $r^\gamma H_\gamma(\theta, \varepsilon)$ як лінійна комбінація L-гармонічних функцій $r^\gamma \Omega_\gamma$ і $r^\gamma \Lambda_\gamma$ є L-гармонічною у відкритій верхній півплощині Π^+. Отже, функція $W(re^{i\theta})$ є L-субгармонічною в куті $\{z\colon 0 \le \arg z \le \alpha\}$. Крім того, з (3) і (4) випливає, що $W(re^{i\theta})$ є недодатною на сторонах цього кута. Позначимо $K_{R,\alpha} = \{z\colon |z| < R,\ 0 < \arg z < \alpha\}$, $R > r_0(\omega)$. Функція $W(re^{i\theta})$ є L-субгармонічною в $K_{R,\alpha}$ і $W(re^{i\theta}) \le 0$ на $\partial K_{R,\alpha}$. Тоді згідно з принципом максимуму для L-субгармонічних функцій [16, 10] нерівність $W(re^{i\theta}) \le 0$ залишається вірною в замкненому секторі $\overline{K}_{R,\alpha}$. Зафіксуємо $z = re^{i\theta}$. Оскільки нерівність $u(re^{i\theta}) \le \omega r^\lambda H_\gamma(\theta, \varepsilon)$ виконується для довільного $\omega > 0$, то $u(re^{i\theta}) \le 0$ в секторі $\overline{K}_{R,\alpha}$. Завдяки довільності R ця нерівність виконується в куті $\{z\colon 0 \le \arg z \le \alpha\}$.

3. Неасимптотичний випадок.

Теорема 3. *Нехай* $u(y)$ *— субгармонічна в* $\mathbb{R}^{p+2}$ *функція,* $p \in \mathbb{N}$, $u(0) = 0$, *така, що для всіх* $r > 0$ *при деякому* $\lambda > 0$ *виконується нерівність* $T(r, u) \le r^\lambda$. *Тоді для всіх* $r > 0$ *і* q, $1 < q \le \infty$,

$$m(r, u^+) \le M_q(\lambda, p)\, r^\lambda,$$

де $M_q(\lambda, p) = m_q\left(Q_\lambda^{p/2}\right)$.

Доведення. Позначимо $v(re^{i\theta}) = r^\lambda Q_\lambda^{p/2}(\theta)$. Оскільки функція $C_\lambda^{p/2}(\cos\theta)$ спадає на $[0, \alpha_\lambda]$ [6, 14] і $Q_\lambda^{p/2}(\theta)$ співпадає з нею на цьому проміжку з точністю до сталого множника, то функція v^* є L-гармонічною в куті $\{z\colon 0<\arg z<\alpha_\lambda\}$. Отже, за лемою 2 функція u^*-v^* є L-субгармонічною в ньому. Зауважимо, що

$$\frac{1}{|S^{p+1}|}\max_{0\le\theta\le\pi} v^*(re^{i\theta}) = T(r,v) =$$

$$= A(\lambda,p)\,r^\lambda\,\frac{|S^p|}{|S^{p+1}|}\int\limits_0^{\alpha_\lambda} C_\lambda^{p/2}(\cos\theta)\sin^p\theta\,d\theta = r^\lambda,$$

а також $u^*(r)=v^*(r)=0$. При $\alpha_\lambda\le\theta\le\pi$ маємо

$$u^*(re^{i\theta}) \le |S^{p+1}|\,T(r,u) \le |S^{p+1}|\,r^\lambda = v^*(re^{i\theta}). \tag{5}$$

Таким чином, на сторонах кута $\{z\colon 0<\arg z<\alpha_\lambda\}$ виконується $u^*-v^*\le 0$. За принципом Фрагмена–Ліндельофа $u^*-v^*\le 0$ в цьому куті. Із співвідношення (5) випливає виконання цієї нерівності в $\overline{\Pi}^+$. Покладаючи в лемі 1 $\Phi(s)=(s^+)^q$, маємо

$$m_q(r,u^+) \le m_q(r,v^*) \le M_q(\lambda,p)\,r^\lambda,\quad 1<q<\infty. \tag{6}$$

Оскільки

$$m_\infty(r,u^+) = \lim_{q\to\infty} m_q(r,u^+),$$

то, переходячи до границі при $q\to\infty$ в нерівності (6), маємо

$$m_\infty(r,u^+) \le m_\infty(r,v^*) \le M_\infty(\lambda,p)\,r^\lambda.$$

4. Доведення теореми 1. Наведемо результат про нормальні сім'ї субгармонічних функцій, одержаний для $p=0$ Д. Андерсоном і А. Бернстейном [17], а для $p\in\mathbb{N}$ — авторами [18].

Теорема 4. *Нехай U — сім'я субгармонічних функцій $\mathbb{R}^{p+2}$, $p\in\mathbb{N}$, така, що при кожному фіксованому r*

$$\sup_{u\in U}\int\limits_{S^{p+1}} |u(rx)|\,dS(x) < \infty.$$

Тоді для будь-якої послідовності $\{u_n\}$ з U існують субгармонічна в $\mathbb{R}^{p+2}$ функція $\hat{u}$ і підпослідовність $\{u_{n_j}\}$ такі, що при всіх $r>0$

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{S^{p+1}} \left|u_{n_j}(rx)-\hat{u}(rx)\right| dS(x) = 0.$$

Нагадаємо означення піків Пойа і необхідні нам результати. Нехай $S(r)$ — додатна неспадна функція, визначена на $(0,\infty)$. Неспадна необмежена послідовність $\{r_n\}$ з інтервалу $(0,\infty)$ називається послідовністю піків Пойа порядку α для $S(r)$, якщо існують послідовності додатних чисел $\{A_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$ такі, що $A_n\to\infty$ і $\varepsilon_n\to\infty$ при $n\to\infty$, і

$$S(r) \le S(r_n)\left(\frac{r}{r_n}\right)^\alpha(1+\varepsilon_n),$$

де $r_n A_n^{-1} < r < r_n A_n$. У цьому вигляді піки Пойа ввів А. Едрей [19], який показав, що коли функція $S(r)$ зростає на інтервалі $(0, \infty)$ і має нижній порядок λ, $0 < \lambda < \infty$, тоді для неї існують піки Пойа порядку λ. Нескладним наслідком з теореми 4 згадуваного результату Едрея і теореми про підвищення [20, с, 120; 21, с. 63] є наступний результат.

Лема 3. *Нехай $u(y)$ — субгармонічна в $\mathbb{R}^{p+2}$ функція, $p \in \mathbb{N}$, нижнього порядку λ, $\lambda \in (0, \infty)$. Тоді існують послідовність піків Пойа $\{r_n\}$ порядку λ для $T(r, u)$ і субгармонічна в $\mathbb{R}^{p+2}$ функція $\hat{u}$ такі, що для кожного $r \in (0, \infty)$*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{S^{p+1}} \left| \frac{u(rr_n x)}{T(r_n, u)} - \hat{u}(rx) \right| dS(x) = 0, \tag{7.a}$$

$$T(r, \hat{u}) \le r^{\lambda}, \tag{7.b}$$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{u(rr_n x)}{T(r_n, u)} \le \hat{u}(rx). \tag{7.c}$$

Доведемо теорему 1. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $u(0) = 0$. Нехай $\{r_n\}$ — така послідовність піків Пойа, як у лемі 3,

$$u_n(rx) = \frac{u(rr_n x)}{T(r_n, u)}.$$

Нехай також $(1/q) + (1/q') = 1$. З нерівності Гельдера (див. також [22, с. 236]) випливає нерівність опуклості для лебегових норм

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^{1-\theta} \, \|f\|_s^{\theta}, \tag{8}$$

де $(1/q') = (1-\theta)(1/p') + \theta(1/s')$, $0 < \theta < 1$, а f — інтегровна в довільному степені функція. Нерівність (8) залишається вірною, якщо f, крім того, обмежена майже скрізь, а p чи s дорівнює $+\infty$. Покладемо в нерівності (8)

$$p = 1, \quad s = +\infty, \quad f(rx) = u_n^+(rx) - \hat{u}^+(rx).$$

Тоді $\theta = 1/q' = (q-1)/q$, $1 - \theta = 1/q$, отже,

$$\left\| u_n^+(rx) - \hat{u}^+(rx) \right\|_q \le$$

$$\le \left\| u_n^+(rx) - \hat{u}^+(rx) \right\|_1^{1/q} \left\| u_n^+(rx) - \hat{u}^+(rx) \right\|_\infty^{(q-1)/q}, \quad 1 < q < \infty. \tag{9}$$

Із співвідношення (7.a) випливає

$$\lim_{n \to \infty} \left\| u_n^+(rx) - \hat{u}^+(rx) \right\|_1^{1/q} = 0.$$

Використовуючи нерівність трикутника для норм, співвідношення між $T(r, u)$ і $B(r, u)$ [8, с. 162] та властивості піків Пойа, маємо

$$\left\| u_n^+(rx) - \hat{u}^+(rx) \right\|_\infty \le B\left(r, u_n^+\right) + B(r, \hat{u}) \le$$

$$\le 2^p 3 \left(\frac{T(2rr_n, u)}{T(r_n, u)} + r^{\lambda} \right) \le 2^p 3 \left((2r)^{\lambda} (1 + \varepsilon_n) + r^{\lambda} \right), \quad A_n^{-1} < r < A_n,$$

де $\varepsilon_n \to 0$, $A_n \to \infty$. Таким чином, використовуючи (9) для кожного фіксованого $r > 0$, при $1 < q < +\infty$ одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u_n^+(rx) - \hat{u}^+(rx) \right\|_q = 0.$$

Звідси для кожного $r \in (0, \infty)$ і $q \in (1, \infty)$ випливає

$$\lim_{n\to\infty} m_q\left(r; u_n^+(rx)\right) = m_q\left(r, \hat{u}^+(rx)\right). \tag{10}$$

Нехай $q = +\infty$. З формули Пуассона–Йенсена (див., наприклад, [8, с. 140]) маємо

$$u_n^+(x) \leq \int\limits_{S^{p+1}} P_R(x, \xi)\, u_n^+(R\xi)\, dS(\xi), \quad R > 1, \quad x \in S^{p+1}, \tag{11}$$

де

$$P_R(x, \xi) = \frac{R^p (R^2 - 1)}{|S^{p+1}|\,|x - R\xi|^{p+2}}$$

— ядро Пуассона. Існує послідовність $\{x_n\}$, $x_n \in S^{p+1}$, така, що $u_n^+(x_n) = B\left(1, u_n^+\right)$. Нехай x_0 — точка скупчення множини $\{x_n\}$, $x_0 \in S^{p+1}$. Тоді нерівність (11) набуває вигляду

$$B\left(1, u_n^+\right) \leq \int\limits_{S^{p+1}} P_R(x_n, \xi)\, u_n^+(R\xi)\, dS(\xi).$$

Використовуючи лему Фату і враховуючи (7.с), одержуємо

$$\limsup_{n\to\infty} B\left(1, u_n^+\right) \leq \int\limits_{S^{p+1}} P_R(x_0, \xi)\, \hat{u}^+(R\xi)\, dS(\xi) \leq$$

$$\leq B(R, \hat{u}^+) \int\limits_{S^{p+1}} P_R(x_0, \xi)\, dS(\xi) = B(r, \hat{u}^+).$$

Таким чином,

$$\limsup_{n\to\infty} B\left(1, u_n^+\right) \leq B(R, \hat{u}^+), \quad R > 1.$$

Використовуючи неперервність $B(R, \hat{u}^+)$, маємо

$$B\left(1, u_n^+\right) \leq B(1, \hat{u}^+). \tag{12}$$

Із співвідношень (10), (12) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує n_0 таке, що для всіх $n > n_0$ $m_q\left(1, u_n^+\right) = m_q(1, \hat{u}^+) + \varepsilon$, $1 < q \leq \infty$. Оскільки для функції $\hat{u}^+(rx)$ виконується нерівність (7.b), а з припущення $u(0) = 0$ випливає, що $\hat{u}(0) = 0$, то функція $\hat{u}^+(rx)$ задовольняє умови теореми 3. Отже,

$$m_q\left(1, u_n^+\right) = M_q(\lambda, p) + \varepsilon. \tag{13}$$

Оскільки

$$u_n^+(rx) = \frac{u^+(r r_n x)}{T(r_n, u)},$$

то, перейшовши в (13) до границі при $n \to +\infty$ і врахувавши довільність ε, одержимо

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{m_q(r, u^+)}{T(r, u)} \le M_q(\lambda, p).$$

Субгармогічна в $\mathbb{R}^{p+2}$ функція нижнього порядку λ, для якої в (2) досягається рівність, має вигляд $r^\lambda Q_\lambda^{p/2}(\theta)$.

Зауваження. Теорема 1 залишається справедливою, якщо в ній λ замінити на μ, $\mu \in [\lambda_*, \rho^*]$, де

$$\lambda_* = \inf\left\{\omega\colon \liminf_{r, A \to \infty} \frac{T(Ar, u)}{A^\omega T(r, u)} = 0\right\},$$

$$\rho^* = \left\{\omega\colon \limsup_{r, A \to \infty} \frac{T(Ar, u)}{A^\omega T(r, u)} = 0\right\},$$

при умовах $0 < \lambda_*$, $\rho^* < +\infty$.

Це випливає з результату Д. Дрейсіна і Д. Шіа [23] про існування піків Пойа порядку μ для тих і лише тих μ, які попадають в проміжок $[\lambda_*, \rho^*]$.

5. Застосування. Близький до поданої нижче теореми результат наведено в [7].

Теорема 5. *Нехай Ω — область на S^{p+1}, Δ_s — оператор Бельтрамі–Лапласа на S^{p+1}, λ — перше власне значення крайової задачі*

$$\Delta_s u + \lambda(\lambda + p)u = 0, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{14}$$

і φ_Ω — відповідна цьому власному значенню власна функція, нормована так, що $m_2(\varphi_\Omega) = 1$, $\varphi_\Omega > 0$ в Ω. Тоді

$$\frac{1}{|S^{p+1}|} \int_\Omega \varphi_\Omega(x)\, dS(x) \ge \frac{1}{M_2(\lambda, p)}.$$

Доведення. Нехай $\Omega' = \{rx\colon r > 0,\ x \in \Omega\}$. Позначимо

$$u(y) = \begin{cases} r^\lambda \varphi_\Omega(y/r), & y \in \Omega',\ |y| = r, \\ 0, & y \notin \Omega'. \end{cases}$$

Тоді функція u субгармонічна в $\mathbb{R}^{p+2}$, оскільки $u \ge 0$ в Ω' і $u = 0$ на $\partial\Omega'$. Згідно з нормуванням φ_Ω маємо $m_2(r, u) = r^\lambda$, і за теоремою 1

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{T(r, u)}{m_2(r, u)} = \frac{1}{|S^{p+1}|} \int_\Omega \varphi_\Omega(x)\, dS(x) \ge \frac{1}{M_2(\lambda, p)}.$$

Лебегове середнє m_2 можна замінити в теоремі 5 будь-яким іншим m_q, $1 < q \le \infty$.

Теорема 5 має таку інтерпретацію: серед усіх областей Ω на S^{p+1} з першим власним значенням λ крайової задачі (14) і відповідною йому власною функцією φ_Ω величина $\left(|S^{p+1}|\right)^{-1} \int_\Omega \varphi_\Omega(x)\, dS(x)$ мінімізується для геодезичного круга.

Робота виконана при частковій фінансовій підтримці Міжнародного наукового фонду та Уряду України.

1. *Paley R. E. A. C.* A note on integral function // J. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1932. – **28**. – P. 262–265.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
3. *Говоров Н. В.* О гипотезе Пейли // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, № 2. – С. 41–45.
4. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций. – Харьков: Вища шк., 1978. – 136 с.
5. *Содин М. Л.* О росте в метрике L_p целых функций конечного нижнего порядка. – 1983. – 20 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, 2.06.83. № 420Ук-Д83.
6. *Бейтмен У., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 296 с.
7 *Dalberg B.* Mean values of subharmonic functions // Ark. Math. – 1972. – **10**, № 2. – P. 293–309.
8. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
9. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Пойа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 450 с.
10. *Baernstein A., Teylor B. A.* Spherical rearrangements subharmonic function and $*$-function in n-space // Duke Math. J. – 1976. – **43**, № 2. – P. 245–268.
11. *Baernstein A.* Proof of Edrei's spread conjecture // Proc. London Math. Soc. – 1973. – **26**, № 3. – P. 418–434.
12. *Baernstein A.* Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Akta Math. – 1974. – **133**. – P. 139–169.
13. *Gariepy R., Lewis J. L.* A maximum principle with applications to subharmonic functions in n-space // Ark. Math. – 1974. – **12**. – P. 253–266.
14. *Gariepy R., Lewis J. L.* Space analogues of some theorem for subharmonic functions // Ark. Math. – 1975. – **13**. – P. 91–105.
15. *Rossi J., Weistman A.* A unified approach to certain questions in value distribution theory // J. London Math. Soc. – 1983. – **28**, № 2. – P. 310–326.
16. *Littman W.* A strong maximum principle for weakly L-subharmonic functions // J. Math. Mech. – 1959. – **8**, № 5. – P. 761–770.
17. *Anderson J. M., Baernstein A.* The size of the set on which a meromorphic function is large // Proc. London Math. Soc. – 1978. – **36**, № 3. – P. 518–539.
18. *Кондратюк А. А., Тарасюк С. И.* Нормальные семейства мероморфных и δ-субгармонических функций // Респ. совещание-семинар по комплекс. анализу и прикл. задачам управления (Алушта, 27 сент. – 4 окт. 1989 г.): Тез. докл. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 26.
19. *Edrei A.* Locally Tauberian theorem for meromorphic function of lower order less than one // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **140**. – P. 309–332.
20. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределения и анализ Фурье. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
21. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций. Ч. 1. – Харьков: Харьк. ун-т, 1978. – 74 с.
22. *Бурбаки Н.* Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
23. *Drasin D., Shea D.* Polya peaks and oscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – **34**, № 2. – P. 403–411.

Одержано 22.04.94