УДК 517.946
Р. В. Самуляк, канд.-фіз.-мат наук (Ун-т „Львів. політехніка", Львів)

УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ ДІККЕ ЯК ІНВЕРСНА НЕЛІНІЙНОМУ РІВНЯННЮ ШРЕДІНГЕРА ІНТЕГРОВНА ДИНАМІЧНА СИСТЕМА

We prove that a dynamical system obtained by the space–time inversion of a nonlinear Schrödinger equation is equivalent to a generalized Dicke model. We study the complete Liouville integrability of the obtained dynamical system.

Показано, що динамічна система, отримана при просторово-часовій інверсії нелінійного рівняння Шредінгера, є еквівалентною узагальненій моделі Дікке та досліджена її повна інтегровність за Ліувіллем.

Питання існування, гамільтоновості та інтегровності інверсних динамічних систем досліджувалось у роботах [1–4], де, зокрема, було показано, що рівняння Кортевега – де Фріза для еволюції по x зводиться до інтегровної бігамільтонової системи із квадратичними гамільтоніанами та канонічними дужками Пуассона гідродинамічного типу. В даній статті наводяться результати дослідження динамічної системи, інверсної нелінійному рівнянню Шредінгера:

$$\begin{cases} \psi_t = i\psi_{xx} + 2i|\psi|^2\psi, \\ \psi_t^* = -i\psi_{xx}^* - 2i|\psi|^2\psi^*. \end{cases} \tag{1}$$

Після перетворення просторово-часової інверсії $x \rightleftarrows t$ та введення функцій $\varepsilon = \psi^*$, $p = -i\psi_t^*$, $\varepsilon^* = \psi$, $p^* = i\psi_t$, $n = -2\psi\psi^*$ (1) зводиться до нелінійної динамічної системи — так званої узагальненої моделі Дікке [5]:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_t &= ip \\ p_t &= \varepsilon_x - i\varepsilon n \\ n_t &= 2i(\varepsilon p^* - \varepsilon^* p) \\ p_t^* &= \varepsilon_x^* + i\varepsilon^* n \\ \varepsilon_t^* &= -ip^* \end{aligned}\right\} = K[w], \tag{2}$$

де $w = (\varepsilon, p, n, p^*, \varepsilon^*)^\tau \in M \simeq C_1^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^4 \times \mathbb{R}^1)$, τ — знак транспонування, K — локальний функціонал на многовиді M, гладко диференційовний за Фреше. Динамічна система (2) має стандартне зображення Лакса з L — оператором вигляду

$$L = \frac{d}{dx} - \begin{Vmatrix} i\lambda^2/2 & i\lambda\varepsilon \\ i\lambda\varepsilon^* & -i\lambda^2/2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} in/2 & ip \\ ip^* & -in/2 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Нелінійна динамічна система* (2) *має дві канонічні дужки Пуассона гідродинамічного типу (дужки Пуассона – Дубровіна – Новікова* [3]), *породжені R-структурою на алгебрі струмів, асоційованій з алгеброю Лі* sl(2) *із центральним розширенням Мауера– Картана.*

Явний вигляд цих дужок Пуассона задається для довільних функціоналів імплектичними операторами η та θ:

$$\{\cdot,\cdot\}_A = (\operatorname{grad}(\cdot),\ A\operatorname{grad}(\cdot)), \quad A = \eta,\ \theta, \tag{4}$$

де

© Р. В. САМУЛЯК, 1995

$$\eta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2i\varepsilon & 0 & i \\ 0 & 2i\varepsilon & 0 & -2i\varepsilon^* & 0 \\ -i & 0 & 2i\varepsilon^* & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

$$\theta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 2ip & \partial - in & 0 \\ 0 & -2ip & 2\partial & 2ip^* & 0 \\ 0 & \partial + in & -2ip^* & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Легко переконатися безпосередньою перевіркою, що оператори η та θ задовольняють рівняння нетеровості

$$\partial\eta/\partial t - \eta K'^* - K'\eta = 0 \tag{7}$$

та що ця пара операторів є узгодженою.

Теорема 2. *Динамічна система* (2) *має нескінченну ієрархію законів збереження, інволютивних відносно обох дужок Пуассона.*

Для одержання явного вигляду законів збереження скористаємося методом, що грунтується на властивостях матриці монодромії [6]. Нехай $\sigma = \partial_x \ln y_1(x, \lambda)$, де y_1 — перша компонента нормованої в точці x_0 блохівської власної функції оператора L. Функція σ є породжуючою функцією законів збереження для вихідної динамічної системи. Використовуючи явний вигляд оператора L (3), із спектральної задачі $LY = 0$, де $Y = (y_1, y_2)^\tau$, легко одержуємо рівняння типу Ріккаті для функції σ:

$$\begin{aligned} &(\lambda i\varepsilon + ip)\sigma_x + (\lambda i\varepsilon + ip)\sigma^2 - (\lambda i\varepsilon_x + ip_x)\sigma + \\ &+ [i\lambda^5\varepsilon/4 + i\lambda^4 p/4 + \lambda^3(i\varepsilon^2\varepsilon^* + i\varepsilon n - \varepsilon_x/2) + \\ &+ \lambda^2(i\varepsilon^2 p^* + 2i\varepsilon\varepsilon^* p + ipn/2 - p_x/2) + \lambda(\varepsilon n_x/2 - \varepsilon_x n/2 + i\varepsilon n^2/4 + \\ &+ 2i\varepsilon p^* p + i\varepsilon^* p^2) + pn_x/2 - p_x n/2 + ipn^2/4 + ip^2 p^*] = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

При $\lambda \to \infty$ функцію σ можна розкласти в асимптотичний ряд

$$\sigma \simeq i\lambda^2/2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \lambda^{-j}. \tag{9}$$

Підставляючи його в (4), маємо для функцій σ_j систему рекурентних співвідношень. Розв'язуючи її послідовно, одержуємо згідно з формулою

$$H_j = \int_{x_0}^{x_0 + l} \sigma_j \, dx$$

нескінченну ієрархію законів збереження для узагальненої моделі Дікке:

$$H_0 = i \int_{x_0}^{x_0 + l} dx\,(\varepsilon^*\varepsilon + n/2), \qquad H_1 = i \int_{x_0}^{x_0 + l} dx\,(\varepsilon^* p + \varepsilon p^*),$$

$$H_2 = i \int_{x_0}^{x_0+l} dx(-\varepsilon_x^* \varepsilon + ip^* p - i\varepsilon^* \varepsilon(\varepsilon^* \varepsilon + n)), \tag{10}$$

....

Це ієрархія законів збереження впорядковується рекурсійним оператором $\Lambda = \eta^{-1}\theta$:

$$\operatorname{grad} H_{j+1} = \Lambda \operatorname{grad} H_j, \tag{11}$$

а узагальнена модель Дікке (2) зображається у бігамільтоновій формі

$$w_t = -i\eta \operatorname{grad} H_2 = -i\theta \operatorname{grad} H_1. \tag{12}$$

Зауважимо, що оскільки гамільтоніан H_1 квадратичний, то динамічна система (2) гідродинамічного типу згідно з класифікацією Новікова [3].

Таким чином, показано, що інверсна нелінійному рівнянню Шредінгера узагальнена модель Дікке є цілком інтегровним за Ліувіллем гамільтоновим потоком гідродинамічного типу.

1. *Царев С. П.* Гамильтоновость стационарных и обобщенных уравнений механики сплошных сред и математической физики // Мат. заметки. – 1989. – **46**, вып. 1. – С. 105 – 111.
2. *Мохов О. И.* О гамильтоновой структуре эволюции по пространственной переменной x для уравнения Кортевега – де Фриза // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, вып. 1. – С. 181 – 182.
3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР. – 1984. – **279**, № 2. – С. 294 – 297.
4. *Притула Н. Н.* Анализ полной интегрируемости инверсного уравнения Кортевега – де Фриза // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 9. – С. 1239 – 1248.
5. *Прикарпатский А. К., Самуляк Р. В.* Класична та квантова інтегровність нелінійних динамічних систем типу Дікке // Матеріали конф. „Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь та математичної фізики". – Київ, 1992. – С. 124.
6. *Теория* солитонов: метод обратной задачи / Под. ред. С. П. Новикова. – М.: Наука, 1980. – 324 с.

Одержано 19.04.94