УДК 517.42:519.46

Р. О. Попович, канд. физ.-мат. наук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО СИМЕТРІЮ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ

Both the Lie and Q-conditional symmetry of a certain linear transport equation are studied and classes of its exact solutions are obtained.

Вивчена симетрія (як ліївська, так і Q-умовна) одного лінійного рівняння переносу, одержані класи його точних розв'язків.

Розглянемо рівняння переносу вигляду

$$u_t + \frac{h(t)}{x} u_x - u_{xx} = 0, \tag{1}$$

де $u_t = \partial u/\partial t$, $u_x = \partial u/\partial x$, $u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$, $h(t)$ — деяка диференційовна функція. Рівняння (1) зустрічається при редукції багатовимірного лінійного рівняння теплопровідності [1]. До нього також зводяться деякі редуковані системи, одержані з рівняння Нав'є – Стокса [2, 3]. У даній статті досліджена симетрія (як ліївська, так і Q-умовна) рівняння (1) та побудовані деякі його точні розв'язки.

Теорема 1. *Максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності рівняння* (1) *є алгебра:*

1) $A_1 = \langle u\partial_u,\ g(t,x)\partial_u\rangle$, *якщо* $h(t) \neq \mathrm{const}$;

2) $A_2 = \langle \partial_t, D, \Pi, u\partial_u, g(t,x)\partial_u\rangle$, *якщо* $h(t) = \mathrm{const}$, $h \notin \{0; -2\}$;

3) $A_3 = \langle \partial_t, D, \Pi, \partial_x + (h/2x)u\partial_u, u\partial_u, g(t,x)\partial_u, G = 2t\partial_t - (x - ht/x)u\partial_u\rangle$, якщо $h \in \{0; -2\}$.

Тут $D = 2t\partial_t + x\partial_x$, $\Pi = 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2 + 2(1-h)t)u\partial_u$; $g = g(t,x)$ — *довільний розв'язок рівняння* (1).

Теорема 1 доводиться за допомогою стандартного алгоритма Лі.

У випадку $h = \mathrm{const}$, редукуючи рівняння (1) по нееквівалентних одновимірних підалгебрах алгебри A_2, можна побудувати такі його розв'язки:

по підалгебрі $\langle \partial_t + au\partial_u\rangle$, де $a \in \{-1; 0; 1\}$:

$$u = e^{-t}x^{\nu}(C_1 J_{\nu}(x) + C_2 Y_{\nu}(x)), \text{ якщо } a = -1,$$

$$u = e^{t}x^{\nu}(C_1 I_{\nu}(x) + C_1 K_{\nu}(x)), \text{ якщо } a = 1,$$

$$u = C_1 x^{h+1} + C_2, \text{ якщо } a = 0 \text{ та } h \neq -1,$$

$$u = C_1 \ln x + C_2, \text{ якщо } a = 0 \text{ та } h = -1,$$

тут J_{ν}, Y_{ν} — функції Бесселя дійсної змінної; I_{ν}, K_{ν} — функції Бесселя уявної змінної, $(h+1)/2$;

по підалгебрі $\langle D + 2au\partial_u\rangle$, де $a \in \mathbb{R}$:

$$u = |t|^a e^{-(1/2)\omega}|\omega|^{(h-1)/4} w((h-1)/4 - a,\ (h+1)/4,\ \omega),$$

де $\omega = x^2/4t$, $w(\kappa, \mu, \omega)$ — загальний розв'язок рівняння Уіттекера

$$4\omega^2 w_{\omega\omega} = (\omega^2 - 4\kappa\omega + 4\mu^2 - 1)w;$$

по підалгебрі $\langle \partial_t + \Pi + au\partial_u\rangle$, де $a \in \mathbb{R}$:

$$u = (4h^2+1)^{(h-1)/4} \exp\{-t\omega + (a/2)\operatorname{arctg} 2t\}\,\varphi(\omega),$$

де $\omega = x^2(4t^2+1)^{-1}$, функція φ є розв'язком рівняння

$$4\omega\varphi_{\omega\omega} + 2(1-h)\varphi_{\omega} + (\omega - a)\varphi = 0,$$

при цьому, якщо $a=0$, то $\varphi(x) = \omega^{\mu}(C_1 J_{\mu}(\omega/2) + C_2 Y_{\mu}(\omega/2))$, де $\mu = (h+1)/4$.

Розглянемо рівняння (1) при довільній диференційовній функції $h = h(t)$.

Теорема 2. *Довільний оператор Q-умовної інваріантності рівняння* (1) *еквівалентний або оператору*

$$Q = \partial_t + g^1(t,x)\partial_x + (g^2(t,x)u + g^3(t,x))\partial_u,$$

де

$$g^1_t - \frac{h}{x}g^1_x + \frac{h}{x^2}g^1 - g^1_{xx} + 2g^1_x g^1 - \frac{h_t}{x} + 2g^2_x = 0,$$
$$g^k_t + \frac{h}{x}g^k_x - g^k_{xx} + 2g^1_x g^k = 0, \quad k=2,3, \tag{2}$$

або оператору

$$Q = \partial_x + \Theta(t,x,u)\partial_u,$$

де

$$\Theta_t - \frac{h}{x^2}\Theta + \frac{h}{x}\Theta_x - \Theta_{xx} - 2\Theta\Theta_{xu} - \Theta^2\Theta_{uu} = 0. \tag{3}$$

Теорема 2 доводиться за допомогою методу, викладеного в [1].

Таким чином, на відміну від ліївської, Q-умовна симетрія рівняння (1) є досить широкою при довільній гладкій функції $h = h(t)$. Наприклад, з теореми 2 випливає, що рівняння (1) Q-умовно інваріантне відносно операторів ∂_x, $X = \partial_t + ((h-1)/x)\partial_x$, $G = (2t+C)\partial_x - xu\partial_u$, $C = \mathrm{const}$. Редукцією рівняння (1) по оператору X одержуємо такий розв'язок:

$$u = C_2\Big(x^2 - 2\int(h(t)-1)dt\Big) + C_1. \tag{4}$$

Його узагальненнями є розв'язки вигляду

$$u = \sum_{k=0}^{N} T^k(t)x^{2k}, \tag{5}$$

де коефіцієнти $T^k = T^k(t)$, $k = \overline{0,N}$, задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь

$$T^k_t + (2k+2)(h(t)-2k-1)T^{k+1} = 0, \quad k=\overline{0,\ N-1}, \quad T^N_t = 0,$$

яка легко інтегрується при довільному $N \in \mathbb{N}$. Наприклад, якщо $N=2$, то

$$u = C_3\Big\{x^4 - 4x^2\int(h(t)-3)dt + 8\int\Big[(h(t)-1)\int(h(t)-3)dt\Big]dt\Big\} +$$
$$+ C_2\Big(x^2 - 2\int(h(t)-1)dt\Big) + C_1.$$

Точний вираз для розв'язку вигляду (5) при $N=1$ одержується за формулою (4). Узагальнюючи розв'язок

$$u = C_0\exp\Big\{-x^2/(4t+2C) + \int(h(t)-1)/(2t+C)\,dt\Big\},$$

одержаний редукцією рівняння (1) по оператору G, можна побудувати розв'язки загального вигляду

$$u = \sum_{k=0}^{N} S^k(t)(x/(2t+C))^{2k}\exp\Big\{-x^2/(4t+2C) + \int(h(t)-1)/(2t+C)\,dt\Big\},$$

де коефіцієнти $S^k = S^k(t)$, $k = \overline{0,N}$, задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$S_t^k + (2k+2)(h(t)-2k-1)S^{k+1}/(2t+C)^2 = 0, \quad k=\overline{0,\ N-1},\ S_t^N = 0.$$

Наприклад, при $N = 1$

$$u = \left\{ C_1((x/(2t+C))^2 - 2\int (h(t)-1)/(2t+C)^2 dt) + C_0 \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-x^2/(4t+2C) + \int (h(t)-1)/(2t+C)dt\right\}.$$

Якщо припустити, що в системі (2) $g^2 = g^3 = 0$, то для знаходження функції g^1 маємо рівняння

$$g_t^1 - \frac{h}{x} g_x^1 + \frac{h}{x^2} g^1 - g_{xx}^1 + 2 g_x^1 g^1 - \frac{\dot{h}}{x} = 0.$$

Звідси $g^1 = -v_x/v + (h-1)/x$, де $v = v(t,x)$ є розв'язком рівняння

$$v_t + \frac{h-2}{x} v_x - v_{xx} = 0. \tag{6}$$

З Q-умовної симетрії рівняння (1) відносно оператора $Q = \partial_t + (-v_x/v + (h-1)/x)\partial_x$ випливає наступне твердження.

Теорема 3. *Якщо* v *— розв'язок рівняння* (6) *і*

$$u = u(t,x) = \int_{x_0}^{x} x'v(t,x')\,dx' + \int_{t_0}^{t} (x_0 v_x(t',x_0) - (h(t')-1)v(t',x_0))\,dt', \tag{7}$$

де (t_0, x_0) — деяка фіксована точка, то u — розв'язок рівняння (1).

Доведення. З рівняння (7) випливає, що $(x,v)_t = (xv_x - (h-1)v)_x$, а тому $u_t = xv_x - (h-1)v$, $u_x = xv$ та $u_t + hu_x/x - u_{xx} = xv_x - (h-1)v + hxv/x - (xv)_x = 0$, що й вимагалося довести.

Оберненим до теореми 3 є таке очевидне твердження.

Теорема 4. *Якщо* u *— розв'язок рівняння* (1), *то функція*

$$v = \frac{1}{x} u_x \tag{8}$$

задовольняє рівняння (6).

З теорем 3, 4 випливає, що для $h = 2n$, де $n \in \mathbb{Z}$, розв'язки рівняння (1) можна будувати з відомих розв'язків рівняння теплопровідності, застосовуючи n раз формулу (7) (коли $n > 0$), або формулу (8) (коли $n < 0$).

Аналогічно тому, як це робиться при дослідженні Q-умовної симетрії лінійного рівняння теплопровідності ($h = 0$, див. [4]), можна довести такі теореми.

Теорема 5. *Система* (2) *за допомогою нелокальної заміни*

$$g^1 = -\frac{z_{xx}^1 z^2 - z^1 z_{xx}^2}{z_x^1 z^2 - z^1 z_x^2} + \frac{h}{x}, \qquad g^2 = -\frac{z_{xx}^1 z_x^2 - z_x^1 z_{xx}^2}{z_x^1 z^2 - z^1 z_x^2},$$
$$g^3 = z_{xx}^3 + \left(g^1 - \frac{h}{x}\right) z_x^3 - g^2 z^3 \tag{9}$$

($z_x^1 z^2 - z^1 z_x^2 \neq 0$) *зводиться до незачепленої системи трьох рівнянь вигляду* (1) *для функцій* $z^a = z^a(t,x)$, $a = \overline{1,\ 3}$:

$$z_t^a + \frac{h}{x} z_x^a - z_{xx}^a = 0, \quad a = \overline{1, 3}. \tag{10}$$

Доведення. Введемо позначення:

$$L = \partial_{xx} - \frac{h}{x}\partial_x + g^1\partial_x - g^2, \quad T = \partial_t + \frac{h}{x}\partial_x - \partial_{xx},$$

$$B = T + 2g_x^1, \quad \tilde{B} = B - 2\frac{h}{x}\partial_x.$$

В цих позначеннях

$$BL = LT \tag{11}$$

(при умові, що g^1, g^2 є розв'язками перших двох рівнянь системи (2)), а $g^3 = Lz^3$. З (11) випливає, що $Bg^3 = 0$, якщо $Tz^3 = 0$. Доведемо, що для довільного розв'язку g^3 рівняння $Bg^3 = 0$ існує розв'язок z^3 рівняння $Tz^3 = 0$ такий, що $g^3 = Lz^3$.

Нехай z^H — частковий розв'язок лінійного неоднорідного звичайного диференціального рівняння $Lz = g^3$, а $\{z^{0i} = z^{0i}(t, x)\}$ — фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння $Lz = 0$ (в ці рівняння змінна t входить як параметр). Тут і надалі індекси i, j змінюються від 1 до 2. За індексами, що повторюються, йде підсумовування. Оскільки $LTz^H = BLz^H = Bg^3 = 0$, $LTz^{0i} = BLz^{0i} = 0$, то існують функції $\Theta^i = \Theta^i(t)$, $\chi^{ij} = \chi^{ij}(t)$ такі, що $Tz^H = \Theta^i z^{0i}$, $Tz^{0i} = \chi^{ij}z^{0j}$.

Нехай $z^3 = z^H + \eta^i z^{0i}$, де функції $\eta^i = \eta^i(t)$ задовольняють систему звичайних деференціальних рівнянь $\eta_t^i + \chi^{ji}\eta^j + \Theta^i = 0$. Тоді $Tz^3 = 0$ і $Lz^3 = g^3$.

Розглянемо перші два рівняння системи (2). Заміну (9) для функцій g^1, g^2 перепишемо у вигляді

$$g^1 = -\frac{z_x^1}{z^1} - \frac{\tilde{z}_x}{\tilde{z}} + \frac{h}{x}, \quad g^2 = \left(\frac{z_x^1}{z^1}\right)_x - \frac{z_x^1}{z^1}\frac{\tilde{z}_x}{\tilde{z}}, \tag{12}$$

де $\tilde{z} = z_x^1 z^2/z^1 - z_x^2$. В позначеннях (12) рівняння $\tilde{B}g^1 + 2g_1^2 = 0$, $Bg^2 = 0$ набувають відповідно вигляду

$$-F_x - G_x = 0, \quad -\frac{\tilde{z}_x}{\tilde{z}}F_x - \frac{z_x^1}{z^1}G_x + F_{xx} = 0, \tag{13}$$

де

$$F = \frac{Tz^1}{z^1}, \quad G = \frac{T\tilde{z}}{\tilde{z}} - \frac{h}{x^2} - 2\left(\frac{z_x^1}{z^1}\right)_x.$$

З рівнянь (13) випливає, що $F_x = -G_x = \rho^1(t)\tilde{z}/z^1 = -\rho^1(t)(z^2/z^1)_x$. Отже,

$$Tz^1 = z_t^1 + \frac{h}{x}z_x^1 - z_{xx}^1 = -\rho^1(t)z^2 + \rho^2(t)z^1 \tag{14}$$

та

$$\tilde{z}G = \tilde{z}(\rho^1(t)z^2/z^1 + \rho^3(t)) = -(z^2/z^1)_x(\rho^1(t)z^2 + \rho^3(t)z^1).$$

З другого боку,

$$\tilde{z}G = z^2\left(\frac{Tz^1}{z^1}\right)_x + \frac{z_x^1}{z^1}Tz^2 - (Tz^2)_x. \tag{15}$$

Тому

$$\left(\frac{Tz^2}{z^1}\right)_x = \rho^3(t)\left(\frac{z^2}{z^1}\right)_x,$$

або після інтегрування

$$Tz^2 = z_t^2 + \frac{h}{x}z_x^2 - z_{xx}^2 = \rho^3(t)z^2 + \rho^4(t)z^1. \tag{16}$$

Залишилося помітити, що при перетворенні $z^1 = \psi^{1i}(t)\hat{z}^i$, $z^2 = \psi^{2i}(t)\hat{z}^i$, де $\det\{\psi^{ij}\}_{i,j=1,2} \neq 0$, вигляд заміни (9) не змінюється. В той же час, якщо функції $(\psi^{i1}, \psi^{i2})_{i=1,2}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків звичайних диференціальних рівнянь $\psi_t^1 = \rho^2\psi^1 - \rho^1\psi^2$, $\psi_t^2 = \rho^4\psi^1 - \rho^3\psi^2$, то з рівнянь (14), (16) для функцій $\hat{z}^1$, $\hat{z}^2$ маємо два незачеплених рівняння вигляду (2): $\hat{z}_t^i + (h/x)\hat{z}_x^i - \hat{z}_{xx}^i = 0$, $i = 1, 2$.

І навпаки, можна довести (див. формули (13), (15)), що $\tilde{B}g^1 + 2g_1^2 = Bg^2 = 0$ при умові $z_t^i + (h/x)z_x^i - z_{xx}^i = 0$, $i = 1, 2$, де функції g^1, g^2 визначаються формулами (9). Теорема 5 доведена.

Теорема 6. *Рівняння* (3) *нелокальною заміною*

$$\Theta = -\Phi_x/\Phi_u, \quad \Phi = \Phi(t, x, u) \tag{17}$$

та перетворенням годографа

$$\Psi = u, \quad y_0 = t, \quad y_1 = x, \quad y_2 = \Phi \tag{18}$$

зводиться до рівняння

$$\Psi_{y_0} + \frac{h}{y_1}\Psi_{y_1} - \Psi_{y_1y_1} = 0 \tag{19}$$

відносно функції $\Psi = \Psi(y_0, y_1, y_2)$.

Доведення. Введемо позначення: $G = \Theta_x + \Theta\Theta_u - h\Theta/x$. Рівняння (3) можна переписати у вигляді

$$\Theta_t + \Theta_u G = G_x + \Theta G_u. \tag{20}$$

Після заміни $\Theta = -\Lambda_x/\Lambda_u$, де $\Lambda = \Lambda(t, x, u)$, розв'яжемо рівняння (20) відносно G: $G = (F(t, \Phi) - \Lambda_t)/\Lambda_u$. Нехай $\Lambda = H(t, \Phi)$, де $\Phi = \Phi(t, x, u)$, а функція H задовольняє рівняння $H_t = F(t, H)$. Тоді $\Theta = -\Lambda_x/\Lambda_u = -\Phi_x/\Phi_u$, $G = -\Phi_t/\Phi_u$, тобто

$$-\frac{\Phi_t}{\Phi_u} = -\left(\frac{\Phi_x}{\Phi_u}\right)_x + \frac{\Phi_x}{\Phi_u}\left(\frac{\Phi_x}{\Phi_u}\right)_u + \frac{h}{x}\frac{\Phi_x}{\Phi_u}. \tag{21}$$

В рівнянні (21) зробимо перетворення годографа (18), після якого для функції $\Psi = \Psi(y_0, y_1, y_2)$ одержимо рівняння (19).

В рівняння (19) змінна y_2 входить як параметр.

1. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 335 с.
2. *Fushchych W. I., Popowych R. O.* Symmetry reduction of the Navier-Stokes equations to linear two-dimensional systems of equations // Dopov. Acad. Nauk Ukrainy. – 1992. – № 8. – P. 29 – 37.
3. *Пухначев В. В.* Групповые свойства уравнений Навье – Стокса в плоском случае // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 1. – С. 83 – 90.
4. *Fushchych W. I., Shtelen V. M., Serov M. I., Popowych R. O.* *Q*-conditional symmetry of the linear heat equation // Dopov. Acad. Nauk Ukrainy. – 1992. – № 8. – P. 29 – 37.

Одержано 01.02.93