УДК 531.383

Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Н. Калинович, С. М. Онищенко, А. Н. Полищук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О РАБОТАХ В. Н. КОШЛЯКОВА В ОБЛАСТИ МЕХАНИКИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ

We present a review of principal results obtained by V. N. Koshlyakov in analytical mechanics, dynamics of a solid body, and in applied theory of gyroscopes.

Наведено огляд основних результатів, одержаних В. М. Кошляковим в галузі аналітичної механіки, динаміки твердого тіла та прикладної теорії гіроскопів.

Владимир Николаевич Кошляков — выдающийся ученый в области прикладной теории гироскопов, динамики твердого тела и аналитической механики. Его научные труды внесли существенный вклад в развитие прикладных методов математики, в теорию динамических систем и аналитическую механику. В его исследованиях весьма удачно сочетаются строгий аналитический подход к рассматриваемым проблемам и четкое понимание практических аспектов приложения теоретических результатов к конкретным разработкам.

Еще студентом Ленинградского института точной механики и оптики В. Н. Кошляков избрал теорию гироскопов своей будущей научной специальностью. Его первым учителем в этой области механики был профессор Д. Р. Меркин, под руководством которого он написал и успешно защитил в 1951 г. кандидатскую диссертацию о девиациях гировертикалей при переменной скорости собственного вращения ротора гироскопа. В этой работе, основные положения которой опубликованы в [1], автор свел исходные дифференциальные уравнения движения гироскопической вертикали к эквивалентной форме двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно углов, определяющих положение оси ротора гировертикали в пространстве. Эти уравнения оказались весьма удобными для последующей оценки точности гировертикали при различных законах изменения угловой скорости собственного вращения гироскопа.

В ленинградский период жизни В. Н. Кошляков написал вышедшую в 1953 г. работу [2], на которую специалисты ссылаются до сих пор. Она посвящена интегрированию динамических уравнений Эйлера, описывающих движение уравновешенного несимметричного тела в сопротивляющейся среде, и является обобщением результатов, полученных в 30-х годах Ю. А. Крутковым при исследовании броуновского движения частиц с осевой симметрией.

Применяя метод малого параметра, автор получил в явном виде условие, при выполнении которого влияние несимметричности тела на его движение оказывается незначительным.

В случае симметричного тела для анализа уравнений его движения был удачно использован аппарат функций Бесселя и Уиттекера.

При больших значениях угловой скорости собственного вращения тела сопротивление среды можно считать пропорциональным квадрату этой скорости, что при определенных условиях приводит исходную задачу к уравнению

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{s}{x} + \frac{1/4 - m^2}{x^2}\right)W = 0.$$

Здесь s и m — некоторые постоянные. Его решение имеет вид

$$W = C_1 M_{s,m}(x) + C_2 M_{s,-m}(x),$$

где

$$M_{s,m}(x) = x^{1/2+m} e^{-x/2} {}_1F_1(1/2+m-s, 2m+1, x)$$

— функция Уиттекера, которая содержит вырожденный гипергеометрический ряд ${}_1F_1(\alpha, \gamma, x)$.

Показано, что для других законов сопротивления среды решение уравнений Эйлера может выражаться через функции Бесселя различных порядков.

В 1952 г. В. Н. Кошляков переезжает в Москву, где поступает на работу в один из ведущих научно-исследовательских институтов Минсудпрома СССР на должность старшего научного сотрудника лаборатории гироскопических компасов. Научным консультантом этого института в то время был А. Ю. Ишлинский. Он руководил научным семинаром, в работе которого Владимир Николаевич стал принимать деятельное участие. Долголетнее научное общение с А. Ю. Ишлинским положительно повлияло на научную квалификацию В. Н. Кошлякова. В этот период Владимир Николаевич задумал и осуществил основные научные исследования в области теории гироскопических компасов, обобщенные впоследствии в монографии [3], в которой ярко проявилось присущее ему умение просто писать о сложных вещах. Эта монография и в настоящее время является настольной книгой для специалистов в области гироскопических компасов.

Помимо интенсивной научной деятельности В. Н. Кошляков в те годы активно участвовал в корабельных испытаниях различных систем гироскопических компасов в Черном, Балтийском, Баренцевом и Карском морях, был участником высокоширотной экспедиции, проводившей работу в районах Новой Земли и архипелага Франца – Иосифа.

Среди научных результатов, полученных ученым в то время, отметим достаточно общую форму дифференциальных уравнений движения двухроторного гирокомпаса, заключающую в себе, как частный случай, уравнения, предложенные в 1933–1934 гг. немецким ученым И. Геккелером. Теория Геккелера основывается на ряде допущений, требующих надлежащего обоснования. Основное из них состоит в априорном разделении системы уравнений возмущенного движения гирокомпаса на две независимые группы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В. Н. Кошляков получил следующую систему уравнений движения двухроторного непространственного гирокомпаса:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \frac{1}{2}\left[p^2 + \nu^2 - (p^2 - \nu^2)\cos 2\theta\right]\xi_1 - \frac{1}{2}(p^2 - \nu^2)\sin 2\theta\,\xi_2 &= 0, \\ \ddot{\xi}_2 + \frac{1}{2}\left[p^2 + \nu^2 + (p^2 - \nu^2)\cos 2\theta\right]\xi_2 - \frac{1}{2}(p^2 - \nu^2)\sin 2\theta\,\xi_1 &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

свободную от указанных допущений. Здесь ν и p — частоты главных колебаний прибора при отсутствии параметрического возмущения, а функция $\theta = \theta(t)$ в общем случае зависит от обстоятельств движения точки подвеса чувствительного элемента компаса по поверхности Земли. Уравнения Геккелера получаются из системы (1), если положить в ней $\theta = 0$.

Из уравнений (1) извлекаются результаты, которые принципиально нельзя получить, исходя из приближенных уравнений Геккелера. Примером может служить проведенный В. Н. Кошляковым анализ поведения гирокомпаса в случае специального маневрирования корабля, когда θ в уравнениях (1) изменяется по периодическому закону. Используя разложения Фурье – Неймана, а также преобразование вращения, он получает уравнения вида

$$\ddot{u}_1 + k_1^2 u_1 = 0, \qquad \ddot{u}_2 + k_2^2 u_2 = 0, \qquad (2)$$

где

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{1}{2}\left[p^2 + \nu^2 - (p^2 - \nu^2)J_0(2\mu)\right], \\ k_2^2 &= \frac{1}{2}\left[p^2 + \nu^2 + (p^2 - \nu^2)J_0(2\mu)\right]. \end{aligned} \qquad (3)$$

В (3) через $J_0(2\mu)$ обозначена функция Бесселя с нулевым индексом, μ — безразмерный малый параметр, определяемый условиями маневра корабля.

Сопоставление решений уравнений (2) с данными интегрирования на ЭВМ системы (1) свидетельствует о высокой точности результатов, доставляемых уравнениями (2) по сравнению с уравнениями Геккелера. В частности, из (2) следует, что при неблагоприятной комбинации начальных отклонений чувствительного элемента гирокомпаса перед маневром может иметь место нежелательная раскачка гирокомпаса на конечном промежутке времени.

Отметим также важные для приложений исследования В. Н. Кошлякова невозмущаемых по Шулеру гиромаятниковых систем. С помощью инварианта Пуанкаре он построил явные подстановки, приводящие их уравнения к системам с постоянными коэффициентами, а при более общих условиях — к системам, имеющим стандартную форму. Эта форма, как известно, допускает строгую процедуру усреднения по явно входящему времени, что, естественно, упрощает дальнейший анализ и, в частности, исследование устойчивости движения.

Представив уравнения пространственного компаса, полученные в 1956 г. А. Ю. Ишлинским, в форме уравнений Пуанкаре

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2}x_2 + \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_4}x_4, & \dot{x}_3 &= -\frac{\partial^2 H}{\partial x_4^2}x_4 - \frac{\partial^2 H}{\partial x_4 \partial x_2}x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2}x_1 - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_3}x_3, & \dot{x}_4 &= \frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2}x_3 + \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial x_1}x_1, \end{aligned} \tag{4}$$

В. Н. Кошляков получил явную форму инварианта Пуанкаре, составленного из частных решений $x_s, x_s', s=\overline{1,4}$, системы (4):

$$I = x_1x_2' - x_2x_1' + x_4x_3' - x_3x_4' = \text{const}. \tag{5}$$

Вытекающее из структуры инварианта (5) ортогональное преобразование Ляпунова $y = Lx$ приводит уравнения (4) к весьма простому виду

$$\dot{y}_1 = \nu y_2, \quad \dot{y}_2 = -\nu y_1, \quad \dot{y}_3 = -\nu y_4, \quad \dot{y}_4 = \nu y_3, \tag{6}$$

где ν — круговая частота незатухающих колебаний, соответствующая периоду М. Шулера $T_\nu = 2\pi\sqrt{R/g}$ (здесь R — радиус земной сферы, g — ускорение силы тяжести).

В 50–60-х годах Владимир Николаевич исследовал новые источники погрешностей гирокомпасов маятникового типа, порождаемые различного рода возмущающими факторами, и указал пути их устранения или минимизации. Эти исследования были внедрены в практику проектирования и эксплуатации гирокомпасов типа „Курс", „Маяк" и их модификаций.

Большой цикл работ В. Н. Кошлякова посвящен анализу устойчивости движения гироскопических компасов [4 – 13]. Он указал на необходимость реализации в схемных решениях систем курсоуказания определенного запаса устойчивости, обеспечивающего стабильность и надежность показаний прибора в случае маневрирования корабля; решил задачу устойчивости движения гирокомпаса при периодическом маневрировании; показал, что при определенных условиях имеет место параметрическая раскачка маятникового гирокомпаса на конечном интервале времени, а иногда и неустойчивость движения по Ляпунову; указал пути устранения в схемных решениях параметрической раскачки колебаний. Расчетные алгоритмы, полученные ученым для анализа устойчивости движения гирокомпасов, учитывались при проектировании современных средств курсоуказания. В связи с этим отметим полученные В. Н. Кошляковым с помощью прямого метода Ляпунова условия устойчивости движения пространственного гирогоризонткомпаса.

Предполагая установку этого прибора на маневрирующем объекте и учитывая малые силы диссипации, всегда присутствующие в реальной системе, Владимир Николаевич удачно строит функции Ляпунова и Четаева применительно к уравнениям возмущенного движения гирогоризонткомпаса и получает весьма простые критерии устойчивости (неустойчивости). Так, при условии

$$\Omega^2(t) > \nu^2, \quad \Omega^2(t) \neq 0 \quad \forall\, t \geq 0,$$

где $\Omega = \Omega(t)$ — проекция абсолютной угловой скорости гирогоризонткомпаса на геоцентрическую вертикаль, имеет место неустойчивость исследуемого прибора.

В начале 70-х годов в промышленности была начата разработка гироскопических курсоуказателей — приборов следующего поколения по сравнению с двухроторными гирокомпасами маятникового типа. Эти курсоуказатели, называемые корректируемыми, отличаются общим свойством: с помощью специальных устройств управления и коррекции, использующих информацию от специальных высокочувствительных индикаторов горизонта, они моделируют географический трехгранник. При отключении коррекции прибор приобретает свойства гироазимута, что представляет определенное удобство при его эксплуатации в высоких широтах.

Анализируя различные схемы корректируемых гирокомпасных устройств, построенных на управляемом и корректируемом астатическом гироскопе, и сопоставляя их с традиционными автономными маятниковыми гироскопами, В. Н. Кошляков пришел к выводу о безусловной перспективности направления корректируемых и управляемых систем курсоуказания.

Владимир Николаевич с самого начала занял активную позицию в отношении быстрейшего освоения промышленностью корректируемых курсоуказателей и их внедрения на корабли различных типов.

В этот период отдел механики и процессов управления Института математики АН Украины, руководимый В. Н. Кошляковым, систематически участвует в хоздоговорных работах по тематике корректируемых гирокомпасов. Отметим работу [14], написанную ученым в соавторстве со своими сотрудниками В. П. Василенко и А. Н. Кострицей. В ней построена уточненная математическая модель двухрежимного корректируемого курсоуказателя с жидкостноторсионным подвесом чувствительного элемента, нашедшая применение в промышленных разработках, и получены эффективные алгоритмы оценки погрешностей корректируемого гирокомпаса применительно к различным условиям его эксплуатации. Существенными оказались также результаты, свидетельствующие о весьма значительном запасе устойчивости прибора, установленного на маневрирующем объекте. Этот вывод был впоследствии подтвержден данными натурных испытаний отечественных навигационных систем и результатами работ ряда зарубежных фирм.

Своими исследованиями В. Н. Кошляков внес фундаментальный вклад в развитие теории двухроторных гироскопических компасов маятникового типа и корректируемых однороторных астатических курсоуказателей с жидкостноторсионным подвесом чувствительного элемента. Полученные им результаты, внедренные в теорию и практику отечественного навигационного гироскопического приборостроения, способствовали повышению точности и надежности ряда серийно выпускаемых прецизионных навигационных систем и по праву сделали его ведущим специалистом страны в области теории гироскопических компасов. За этот цикл исследований Владимир Николаевич был удостоен в 1976 г. Государственной премии СССР.

В 1978 г. В. Н. Кошляков переезжает на постоянное место жительства в Киев. Благоприятные условия для научной работы в Институте математики АН Украины дали ему возможность не только обобщить полученные к тому времени результаты исследований в монографии [15], но и заняться давно интересующей его проблемой — применением аппарата кватернионов (в частности, параметров Родрига – Гамильтона) в теории гироскопов и в аналитической механике.

Первая публикация В. Н. Кошлякова по этому направлению относится к 1964 г. В статье [16] доказывается эквивалентность основной задачи инерциальной навигации (состоящей в определении координат местонахождения объекта) классической задаче Дарбу определения положения тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, по его угловой скорости.

Один из вариантов автономного решения основной задачи инерциальной навигации может быть реализован с помощью гиростабилизированной платформы, управляемой специально формируемыми моментами, прикладываемыми к гироскопам. Соответствующие этой задаче кинематические уравнения были получены в 1959 г. А. Ю. Ишлинским в виде

$$(u+\dot\lambda)\cos\varphi\sin\vartheta-\dot\varphi\cos\vartheta = p(t), \qquad (u+\dot\lambda)\cos\varphi\cos\vartheta+\dot\varphi\sin\vartheta = q(t),$$
$$(u+\dot\lambda)\sin\varphi+\dot\vartheta = r(t), \tag{7}$$

где u — угловая скорость вращения Земли, φ и λ — соответственно географическая широта и долгота места, ϑ — угол, определяющий ориентацию гиростабилизированной платформы в плоскости, касательной к земной сфере. Проекции p, q, r угловой скорости платформы на ее собственные оси следует считать известными функциями времени t. В работе [16] указана подстановка

$$\lambda+ut = \psi, \qquad 1/2\pi-\varphi = \theta, \qquad \vartheta = \varphi', \tag{8}$$

приводящая уравнения (7) к виду

$$\dot\psi\sin\theta\sin\varphi'+\dot\theta\cos\varphi' = p, \qquad \dot\psi\sin\theta\cos\varphi'-\dot\theta\sin\varphi' = q, \qquad \dot\psi\cos\theta+\dot\varphi' = r. \tag{9}$$

Система (9) по своей структуре совпадает с известными кинематическими уравнениями Эйлера, описывающими вращение твердого тела вокруг неподвижной точки. При этом переменные (8) аналогичны углам Эйлера, однозначно определяющим положение тела в пространстве. Таким образом, при известных p, q и r задача интегрирования уравнений (7) эквивалентна задаче определения положения тела по его угловой скорости — задаче Дарбу.

Однако решение системы (7) связано с определенными неудобствами: ее нелинейностью и наличием особенностей в точках $\varphi = \pm\pi/2$, соответствующих Северному и Южному полюсам Земли. Указанные неудобства устраняются переходом к параметрам Родрига – Гамильтона λ_s, $s = \overline{0,3}$. Полагая в (9)

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi'}{2}, \qquad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi'}{2},$$
$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi'}{2}, \qquad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi'}{2} \tag{10}$$

и добавляя к полученным уравнениям продифференцированное по t условие нормировки

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 = 1 \tag{11}$$

параметров Родрига – Гамильтона, получаем в отличие от (9) линейную дифференциальную систему вида

$$2\dot\lambda = P\lambda, \tag{12}$$

где $\lambda = \mathrm{colon}\,(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, P — кососимметричная матрица вида

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Линейная структура системы (12), не содержащая особенностей и тригонометрических функций, значительно упрощает ее аналитическое исследование и численное интегрирование по сравнению с системой (9) и соответствующей ей системой (7). Об этом свидетельствует имеющееся к настоящему времени большое число публикаций, в которых аппарат параметров Родрига – Гамильтона применяется в кинематических задачах, в частности, в алгоритмах бесплатформенных систем инерциальной навигации и в задачах ориентации космических объектов.

В связи с этим естественна постановка вопроса: не имеют ли указанных выше положительных свойств уравнения, описывающие динамику материальных систем в параметрах Родрига – Гамильтона ? Этой проблеме посвящен последующий цикл фундаментальных исследований В. Н. Кошлякова.

Интересна в этом плане работа [17], написанная в 1965 г. В ней помимо обобщения матричного уравнения (12) на случай неинерциальности опорного трехгранника показано, что выписанным в конечных углах уравнениям прецессионного движения гиромаятника на неподвижном основании эквивалентна линейная система дифференциальных уравнений в параметрах Родрига – Гамильтона. Эта система интегрируется в конечном виде.

Следует отметить также публикацию [18], в которой уравнения прецессионного движения пространственного гирокомпаса в параметрах Родрига – Гамильтона приводятся для случая произвольного движения точки подвеса к форме

$$\lambda_0\Lambda_1+\lambda_3\Lambda_2-\lambda_1\Lambda_0-\lambda_2\Lambda_3 = 0, \quad \lambda_0\Lambda_2-\lambda_3\Lambda_1-\lambda_2\Lambda_0+\lambda_1\Lambda_3 = 0, \tag{14}$$

где через λ_s, $s = \overline{0, 3}$, обозначены некоторые линейные комбинации величин λ_s, $\dot\lambda_s$ и $\ddot\lambda_s$. Исследуется класс точных решений системы (14) в конечных углах, определяющих пространственное положение чувствительного элемента в случае $\Lambda_s = 0$, $s = \overline{0, 3}$. В результате задача приводится к линейным дифференциальным уравнениям относительно параметров Родрига – Гамильтона, интегрирующимся в замкнутом виде.

Аппарат параметров Родрига – Гамильтона оказывается полезным аналитическим средством для выявления слабо выраженных эффектов неустойчивости в динамических системах, в частности эффекта Магнуса применительно к гироскопу в кардановом подвесе [19 – 21].

Эффект Магнуса обусловлен влиянием вибрационных колебаний, порождаемых нутацией главной оси ротора гироскопа, подвешенного в кардановом подвесе. Такие колебания возникают при воздействии ударного импульса на любое из двух колец подвеса. Рассматриваемый эффект в конечном счете приводит к систематическому уходу внешнего кольца.

Основополагающее исследование Магнуса базируется на применении метода последовательных приближений к системе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение гироскопа в традиционных угловых переменных. Формула ухода внешнего кольца подвеса была получена Магнусом в результате построения второго приближения без анализа сходимости итерационного процесса и оценки точности приближенного результата. Исследования ряда авторов подтвердили, тем не менее, правильность результата Магнуса.

В работах [19 – 21] В. Н. Кошляков впервые рассматривает задачу Магнуса с привлечением аппарата параметров Родрига – Гамильтона. Этот аппарат позволяет обойтись решениями линейной дифференциальной системы уравнений, выписанных в возмущенных значениях параметров Родрига – Гамильтона, без формального рассмотрения второго приближения. Кроме того, он дает возможность провести строгую оценку точности полученного таким способом результата, а также рассмотреть случай совмещения оси ротора с осью внешнего кольца, что не удается сделать в традиционных угловых переменных в формуле Магнуса.

Оперируя двумя динамическими и двумя кинематическими уравнениями возмущенного движения гироскопа в кардановом подвесе, записанными в параметрах Родрига – Гамильтона, автор получает формулу [21]

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}(0)\cos\nu t\left[1-\frac{I(0)\dot{\psi}(0)\cos\vartheta(0)(1-\cos\nu t)}{H\sin^2\vartheta(0)+I(0)\dot{\psi}(0)\cos\vartheta(0)}\right]^{-1}, \tag{15}$$

где $\dot{\psi}(0)$ — начальное значение собственной угловой скорости внешнего кольца; ν — круговая частота нутационных колебаний оси ротора гироскопа; $I(0)$ — суммарный момент инерции системы относительно оси вращения внешнего кольца; H — собственный кинетический момент ротора гироскопа; $\vartheta(0)$ — начальное значение угла, определяющего ориентацию оси ротора гироскопа относительно оси внешнего кольца его карданова подвеса.

Выражение (15) можно рассматривать в качестве обобщения формулы Магнуса.

При совмещении оси ротора с осью внешнего кольца происходит потеря гироскопической стабилизации. Действительно, если в формуле (15) положить $\vartheta(0)=0$, то после интегрирования будем иметь $\psi(t)=\dot{\psi}(0)t$.

Большой цикл работ В. Н. Кошлякова посвящен применению параметров Родрига – Гамильтона и Кэйли – Клейна в динамике твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки [22 – 38].

К динамическим уравнениям Эйлера для этого случая движения тела, выраженным в функциях параметров Родрига – Гамильтона, добавляется уравнение, получаемое двухкратным дифференцированием условия (11) нормировки параметров λ_s. В результате В. Н. Кошляков получает матричное уравнение вида [22]

$$2ABC\ddot{\lambda}+Q(\lambda,\dot{\lambda})\lambda = 0, \tag{16}$$

в котором A, B, C — моменты инерции тела относительно связанных с ним главных осей инерции x, y, z с началом в неподвижной точке, а матрица Q, имеющая существенно нелинейную структуру, представляется в виде

$$Q = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= 2ABC\left(\dot{\lambda}_0^2+\dot{\lambda}_1^2+\dot{\lambda}_2^2+\dot{\lambda}_3^2\right), \qquad a_3 = CA\left[M_y-(A-C)rp\right], \\ a_2 &= BC\left[M_x-(C-B)qr\right], \qquad a_4 = AB\left[M_z-(B-A)pq\right], \end{aligned} \tag{18}$$

причем M_x, M_y, M_z — проекции на соответствующие оси главного момента сил, действующих на тело; p, q, r — проекции на те же оси вектора его абсолютной угловой скорости.

Как нетрудно заметить, из матрицы (17), если записать ее в виде

$$Q = a_1 E_4 - Q_*,$$

всегда можно выделить кососимметричную матрицу Q_*, аналогичную матрице (13) в кинематических уравнениях (12) (здесь E_4 — единичная матрица четвертого порядка). Существенно, что такие структуры имеют место и в уравнениях возмущенного движения, соответствующих (16). При определенных условиях кососимметричные структуры могут способствовать возникновению неустойчивых состояний. Указанное обстоятельство в сочетании с высоким порядком матрицы Q в отношении величин λ_s и $\dot{\lambda}_s$ в некоторых случаях дает возможность выявить эффекты неустойчивости уже в первом, линейном приближении уравнений возмущенного движения, соответствующих (16). Использование же других методов, основывающихся, в частности, на уравнениях Эйлера – Пуассона, в задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки (при игнорировании сопротивлений) требует соответствующего учета членов второго и высшего порядков.

Отметим цикл работ В. Н. Кошлякова, посвященных применению аппарата параметров Родрига – Гамильтона к исследованию вращения тяжелого тела около вертикали [30, 33, 34, 36, 38].

В этом плане наибольший интерес представляет рассмотренный автором общий случай произвольного распределения массы тела в предположении, что его центр тяжести не лежит на оси собственного вращения, а имеет координаты x_c, y_c и z_c в осях связанного трехгранника xyz.

Применительно к этому случаю В. Н. Кошляков строит некоторое точное частное решение уравнения (16), соответствующее невозмущенному движению тела, и показывает, что если $A \neq B$ и центр масс не лежит в одной из главных плоскостей инерции zx или yz, то имеет место эффект неустойчивости, выражающийся в медленном возрастании угла нутации ϑ и соответствующем отклонении оси собственного вращения тела от вертикали. Можно заметить, что этот эффект имеет известную общность с эффектом диффузии Арнольда в теории гамильтоновых систем, состоящим при определенных условиях в медленной эволюции переменных действия.

Полученным Владимиром Николаевичем новым формам уравнений классической задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки свойственны единая структура, равноправно охватывающая все неизвестные, а также отсутствие в этих уравнениях особенностей. Весьма существенно, что они позволяют в силу нелинейной и неканонической связи параметров Родрига – Гамильтона с углами Эйлера учитывать уже в первом линейном приближении обстоятельства, которые при использовании переменных Эйлера – Пуассона в ряде случаев требуют учета членов второго и высшего измерений.

Эти результаты были обобщены в монографии [39], отмеченной в 1987 г. премией им. Н. М. Крылова Академии наук Украины.

Среди исследований, выполненных ученым в последние годы, весьма интересен общий результат, относящийся к структурным преобразованиям динамических систем, содержащим гироскопические члены [40].

Наличие гироскопических структур в уравнениях движения механических систем в ряде случаев существенно затрудняет их аналитическое исследование, часто препятствуя, например, непосредственному использованию в них метода усреднения.

В. Н. Кошляков предложил общую методику, позволяющую, не изменяя условий устойчивости и стабилизирующих свойств, присущих гироскопическим структурам, видоизменять их уравнения так, чтобы после преобразования они не содержали гироскопических членов.

В основу положено уравнение вида

$$a_0\ddot{x} + D\dot{x} + H\dot{x} + \Pi x + Px = X(t, x, \dot{x}), \tag{19}$$

где x — n-мерный вектор, a_0 — некоторый положительный постоянный скалярный параметр, D и Π — симметричные матрицы размера $n \times n$, H и P — кососимметричные матрицы того же размера, $X(t, x, \dot{x})$ — вектор-функция, содержащая x и $\dot{x}$ в степенях выше первой. Уравнением (19) описывается движение многих материальных систем, находящихся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и неконсервативных позиционных сил.

Уравнение (19) подвергается линейному неособому преобразованию к некоторой новой переменной

$$\xi = Lx \tag{20}$$

с матрицей $L = L(t)$, подлежащей определению. В результате получается уравнение относительно вектора ξ, приводящееся к виду

$$a_0\ddot{\xi} + LDL^{-1}\dot{\xi} + (L\Pi - a_0\ddot{L})L^{-1}\xi + (LH - 2a_0\dot{L})L^{-1}(\dot{\xi} - \dot{L}L^{-1}\xi) + \\ + L(P - DL^{-1}\dot{L})L^{-1}\xi = \Xi(t, \xi, \dot{\xi}), \tag{21}$$

в котором вектор-функция Ξ содержит $\dot{\xi}$ и ξ в степенях выше первой.

Четвертое слагаемое в уравнении (21) обращается в нуль при выполнении условия

$$\dot{L} = (2a_0)^{-1} LH, \tag{22}$$

которое при заданной матрице H можно рассматривать как уравнение относительно L. Учитывая кососимметричность матрицы H, при единичных начальных условиях получаем L в виде ортогональной матрицы. При этом L будет матрицей Ляпунова и, следовательно, преобразование (20) не меняет свойств устойчивости исходного уравнения (19). В результате оно преобразуется к виду

$$a_0\ddot{\xi} + LDL^T\dot{\xi} + \left\{L\left[\Pi + P - DH(2a_0)^{-1}\right] - a_0\ddot{L}\right\}L^T\xi = \Xi, \tag{23}$$

не содержащему гироскопических структур.

Использование уравнения (23) оказалось удобным в некоторых прикладных задачах и, в частности, как показано в работах [40, 41], в решении задачи упрочнения устойчивости гироскопа Лагранжа, установленного на основании, подверженном вертикальной вибрации.

Владимиру Николаевичу удалось получить [41] явное выражение оценки снизу величины частоты вибрации для данного случая, обобщающее известное условие Боголюбова – Капицы для случая стабилизации с помощью вертикальной вибрации верхнего положения равновесия физического маятника.

В течение многих лет В. Н. Кошляков успешно вел преподавательскую работу в высших учебных заведениях Ленинграда, Москвы и Киева, читая общий курс теоретической механики и специальный курс прикладной теории гироскопов. Лекции В. Н. Кошлякова, отличающиеся ясностью и мастерством изложения, неизменно пользовались успехом у слушателей. Итогом преподавательской деятельности Владимира Николаевича является учебник [42], основывающийся на лекциях, которые автор в течение ряда лет читал в Киевском политехническом институте.

Настоящий обзор не отражает в полной мере всех результатов, полученных ученым за его более чем 50-летнюю научную деятельность.

1. *Кошляков В. Н.* О девиациях гировертикали при переменной скорости собственного вращения ротора гироскопа // Инж. сб. АН СССР. – 1950. – 6. – С. 185–196.
2. *Кошляков В. Н.* О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде // Прикл. математика и механика. – 1953. – 17, вып. 2. – С. 137–148.
3. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. – М.: Наука, 1972. – 344 с.
4. *Кошляков В. Н.* К теории гирокомпасов // Прикл. математика и механика. – 1959. – 23, вып. 5. – С. 810–817.
5. *Кошляков В. Н.* Об асимптотическом решении уравнений движения гироскопического компаса // Там же. – 1960. – 24, вып. 5. – С. 790–795.
6. *Кошляков В. Н.* О приводимости уравнений движения гирогоризонткомпаса // Там же. – 1961. – 25, вып. 5. – С. 801–805.
7. *Кошляков В. Н.* Об устойчивости гирогоризонткомпаса при наличии диссипативных сил // Там же. – 1962. – 26, вып. 3. – С. 412–417.
8. *Кошляков В. Н., Ляшенко В. Ф.* Об одном интеграле в теории гирогоризонткомпаса // Там же. – 1963. – 27, вып. 1. – С. 10–15.
9. *Кошляков В. Н., Ляшенко В. Ф.* Об устойчивости гирокомпасов // Там же. – 28, вып. 5. – С. 885–887.
10. *Кошляков В. Н., Сосницкий С. П.* Об устойчивости гирокомпаса // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1969. – № 3. – С. 32–35.
11. *Кошляков В. Н.* Об устойчивости двухроторных гироскопических компасов маятникового типа // Навигация и управление движением механических систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 3–8.
12. *Кошляков В. Н.* К теории гироскопических компасов в свете аналогии с устойчивостью упругих систем // Механика гироскопических систем. – Киев: Киев. политехн. ин-т, 1981. – № 1. – С. 3–11.

13. *Кошляков В. Н.* К теории устойчивости неконсервативных систем // Навигация и управление. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 3–10.
14. *Василенко В. П., Кострица А. Н., Кошляков В. Н.* К теории однороторных корректируемых гирокомпасов // Механика твердого тела. – 1967. – № 2. – С. 38–46.
15. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела в прикладной теории гироскопов. – М.: Наука, 1985. – 286 с.
16. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях местоположения движущегося объекта // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, вып. 6. – С. 1135–1137.
17. *Кошляков В. Н.* О применении параметров Родрига – Гамильтона и Кэйли – Клейна в прикладной теории гироскопов // Там же. – 1965. – 29, вып. 4. – С. 729–733.
18. *Кошляков В. Н.* К вопросу построения некоторого класса решений гиромаятниковой системы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – № 2. – С. 32–38.
19. *Кошляков В. Н.* Задача Магнуса в параметрах Родрига – Гамильтона // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 4. – С. 40–44.
20. *Кошляков В. Н.* Применение параметров Родрига – Гамильтона в задаче Магнуса // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – № 2. – С. 43–48.
21. *Кошляков В. Н.* Обобщенная формула Магнуса // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 8. – С. 6–9.
22. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Укр. мат. журн. – 1973. – 25, № 5. – С. 677–681.
23. *Кошляков В. Н.* О применении параметров Родрига – Гамильтона и Кэйли – Клейна к задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Там же. – 1974. – 26, № 2. – С. 179–187.
24. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях гиростата в параметрах Родрига – Гамильтона // Там же. – № 5. – С. 657–663.
25. *Кошляков В. Н.* Уравнения тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в унитарных и эрмитовых матрицах // Там же. – 1981. – 33, № 1. – С. 9–16.
26. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, в параметрах Родрига – Гамильтона // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 16–25.
27. *Кошляков В. Н.* Об одной из модификаций волчка Лагранжа // Системы навигации и управления. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 3–9.
28. *Кошляков В. Н.* О применении аппарата параметров Родрига – Гамильтона к задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Приложение методов теории нелинейных колебаний в механике, физике, электротехнике, биологии. – Киев: Наук. думка, 1984. – Т. 3. – С. 145–150.
29. *Кошляков В. Н., Богуславская Е. С.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела в параметрах Родрига – Гамильтона // Системы курсоуказания и инерциальной навигации. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 3–9.
30. *Кошляков В. Н.* Об одном случае неустойчивости быстрого вращения тела около вертикали // Корректируемые навигационные системы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 37–44.
31. *Кошляков В. Н.* Параметры Родрига – Гамильтона в задачах динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. – М.: Наука, 1987. – С. 117–127.
32. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела в параметрах Родрига – Гамильтона // Укр. мат. журн. – 1988. – 40, № 2. – С. 182–192.
33. *Кошляков В. Н.* Об одном случае неустойчивости быстровращающегося тяжелого тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 4. – С. 45–50.
34. *Кошляков В. Н.* О неустойчивости вертикального вращения тяжелого тела // Укр. мат. журн. – 1989. – 41, № 9. – С. 1214–1221.
35. *Кошляков В. Н.* Обобщенные уравнения Эйлера в параметрах Родрига – Гамильтона // Устойчивость и управление в механических системах. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 21–26.
36. *Кошляков В. Н.* Об одном эффекте неустойчивости в движении быстровращающегося тела вблизи вертикали // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1993. – № 1. – С. 10–19.
37. *Кошляков В. Н.* Обобщенные уравнения Эйлера в кватернионных составляющих // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 10. – С. 1414–1417.
38. *Кошляков В. Н.* О понижении порядка уравнений движения тяжелого тела вблизи вертикали // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 4. – С. 3–7.
39. *Кошляков В. Н.* Параметры Родрига – Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – 176 с.
40. *Кошляков В. Н.* О структурных преобразованиях уравнений возмущенного движения некоторого класса динамических систем // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, № 4. – С. 535–539.
41. *Кошляков В. Н.* Об устойчивости движения симметричного тела, установленного на вибрирующем основании // Там же. – 1995. – 47, № 12. – С. 1661–1666.
42. *Кошляков В. Н.* Краткий курс теоретической механики: Учебник. – Киев: Выща шк., 1993. – 312 с.

Получено *10.06.97*