УДК 517.946

М. М. Притула (Львів. ун-т)

ЛІ-АЛГЕБРАЇЧНА СТРУКТУРА ІНТЕГРОВНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА РОЗШИРЕНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ МНОГОВИДАХ

We consider the general Lie-algebraic scheme of constructing integrable nonlinear dynamical systems on extended functional manifolds. We find the explicit expression for the consistent Poisson structures and write explicitly nonlinear equations which are generated by the spectrum of periodic problem for the operator of linear Lax-type representation.

Розглядається загальна Лі-алгебраїчна схема побудови інтегровних нелінійних динамічних систем на розширених функціональних многовидах. Знайдено явний вираз для узгоджених структур Пуассона та виписано явно нелінійні рівняння, породжені спектром періодичної задачі для оператора зображення типу Лакса.

1. Вступ. Нехай на деякому симплектичному функціональному 2π-періодичному многовиді $M \subset C^\infty\ (\mathbf{R}/2\pi Z; \mathbf{R}^m)$ задано нелінійну динамічну систему вигляду

$$\frac{du}{dt} = K[u], \tag{1}$$

де $K\colon M \to T(M)$ — гладке (за Фреше) векторне поле, $u \in M$, $m \in \mathbf{Z}_+$, $t \in \mathbf{R}$ — еволюційний параметр.

Для дослідження динамічних систем вигляду (1) в монографіях [1, 2] розвинуто градієнтно-голономний метод, який ефективно застосовано для вивчення різноманітних нелінійних систем та рівнянь з частинними похідними, що знаходять застосування в математичній та теоретичній фізиці. Алгебраїчна структура градієнтно-голономного методу вивчалась в [3, 4]. Дана праця є продовженням досліджень, викладених в [3], і присвячена розгляду загальної Лі-алгебраїчної схеми побудови інтегровних нелінійних динамічних систем на розширених функціональних многовидах власних функцій оператора асоційованого зображення типу Лакса.

Означення. *Динамічну систему* (1) *будемо називати Лі-алгебраїчно інтегровною, якщо існує таке пуассонове відображення моменту* $l\colon M \to \hat{\mathcal{G}}^*$, *де* $\hat{\mathcal{G}}$ *— деяка центрально-розширена 2-коциклом Маурера – Картана метризована* [3] *афінна матрична алгебра Лі* $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}\,(\lambda, \lambda^{-1})$, *еволюція якого у відповідності до* (1) *задається рівнянням вигляду* [5]

$$\frac{dl}{dt} = \left[l - \frac{d}{dx}, \mathcal{P}(l) \right], \tag{2}$$

де $l \in \hat{\mathcal{G}}^*$, $\mathcal{P}(l) := \mathcal{R}\nabla\gamma(l) \in \tilde{\mathcal{G}}$, $\gamma \in I(\hat{\mathcal{G}}^*)$, *— деякий функціонал Казіміра,* ∇ *означає градієнт функціоналу, його варіаційну похідну Ейлера,* $\mathcal{R}\colon \tilde{\mathcal{G}} \to \tilde{\mathcal{G}}_+ \ominus \ominus \tilde{\mathcal{G}}_-$ *— стандартна* $\mathcal{R}$*-структура на* $\tilde{\mathcal{G}}$, *породжена стандартним афінним розбиттям* $\tilde{\mathcal{G}}$ *на дві підалгебри:* $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-$.

Згідно з визначенням [5, 6] $\gamma \in I(\hat{\mathcal{G}}^*)$, якщо виконано співвідношення: для всіх $l \in \hat{\mathcal{G}}^*$

$$\frac{d}{dx}\nabla\gamma(l) = [l, \nabla\gamma(l)]. \tag{3}$$

З рівнянням (3) можна асоціювати спеціальний породжуючий функціонал $\Delta(\xi) \in I(\hat{\mathcal{G}}^*)$, $\xi \in \mathbb{C}/\{0\}$, якщо розглянути наступну лінійну задачу:

$$\frac{df}{dx} = lf \tag{4a}$$

в деякому функціональному векторному просторі $W(\mathbb{R}; \mathbb{C}^r) \ni f$, в якому діє r-вимірне матричне зображення алгебри Лі $\mathcal{G}$, введеної вище. Згідно з (2) елемент $f \in W$ задовольняє еволюційне лінійне рівняння

$$\frac{df}{dt} = -\mathcal{R}\nabla\gamma(l)f, \tag{5a}$$

узгоджене з еволюцією вихідної динамічної системи (1). На підставі (4a) і (5a) встановлюється наступне твердження [3].

Твердження 1. *Нехай* $S(x;\xi)\colon W \to W$, $\xi \in \mathbb{C}$, *— матриця монодромії лінійного рівняння* (4a). *Тоді слід* $\Delta(\xi) := \operatorname{Sp} S(x;\xi) \in I(\hat{\mathcal{G}}^*)$ *— породжуюча функція функціоналів Казіміра на афінній коалгебрі Лі* $\mathcal{G}^*$, *тобто* $\operatorname{grad}\Delta(\xi)(l) = S(x;\lambda)/(\lambda-\xi) \in \tilde{\mathcal{G}}$ *задовольняє тотожно для всіх* $\lambda \neq \xi \in \mathbb{C}/\{0\}$ *рівняння* (3).

Таким чином, можемо записати наступне рівняння Новікова – Марченка [7, 8]:

$$\frac{dS}{dx} = [l, S], \tag{6}$$

де $S := S(x;\lambda)$, $l := l(x;\lambda)$ для всіх $\lambda \in \mathbb{C}/\{0\}$. Як було вказано вище, спряжений простір $\hat{\mathcal{G}}^*$ розшаровується симплектичними інваріантними многовидами, причому для всіх $\gamma, \mu \in D(\hat{\mathcal{G}}^*)$ дужка Лі – Пуассона має вигляд

$$\{\gamma, \mu\}_p = \left(l, [\nabla\gamma, \nabla\mu]_{\mathcal{R}}\right) + \left(\nabla\gamma, \frac{d}{dx}(\mathcal{R}\nabla\mu)\right)_p + \left(\mathcal{R}\nabla\gamma, \frac{d}{dx}\nabla\mu\right)_p. \tag{7}$$

Тут для всіх $a, b \in \tilde{\mathcal{G}}$ комутатор $[a,b]_{\mathcal{R}} := [\mathcal{R}a, b] + [a, \mathcal{R}b]$, де $\mathcal{R}$: $\tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\mathcal{R}} \tilde{\mathcal{G}}$ — стандартна $\mathcal{R}$-структура на $\tilde{\mathcal{G}}$ [5, 3], а скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_p$ задається для всіх $p \in Z$ виразом

$$(a, b)_p := (a, \lambda^p b) := \int_0^{2\pi} dx \operatorname{res}_{\lambda=0} \lambda^p \operatorname{Sp}(a(x;\lambda)b(x;\lambda)).$$

Всі побудовані вище дужки Пуассона (7) є узгодженими за Магрі [9], що легко встановити на основі наступного твердження [10].

Твердження 2. *Нехай* $\dfrac{dl}{d\tau} = A(l)$, $l \in \hat{\mathcal{G}}^*$, *— деяке векторне поле на* $\hat{\mathcal{G}}^*$. *Якщо кососиметрична дужка*

$$\{\gamma,\mu\}_A := \{L_A\gamma, \mu\}_0 + \{\gamma, L_A\mu\}_0 - L_A\{\gamma,\mu\}_0,$$

де L_A *— похідна Лі вздовж векторного поля* $A\colon \hat{\mathcal{G}}^* \to T(\hat{\mathcal{G}}^*)$, *задовольняє на* $\hat{\mathcal{G}}^*$ *тотожність Якобі, то відповідні дужки Пуассона* $\{\cdot,\cdot\}_0$ *та* $\{\cdot,\cdot\}_A$ *узгоджені за Магрі.*

Грунтуючись тепер на твердженні 2, легко бачити, що у випадку $A(l) := \lambda^p l$, де $p \in Z$, відповідна дужка $\{\cdot,\cdot\}_A$ буде дужкою Пуассона, тобто $\{\cdot,\cdot\}_{\lambda^p l} :=$ $:= \{\cdot,\cdot\}_p$. Звідси випливає, що всі дужки Пуассона (7) є узгодженими за Магрі. Остання властивість забезпечує те, що відповідна динамічна система (1) на многовиді M буде узгоджено бі-гамільтоновою.

Вище було показано, що динамічна система (1) на M має матричне зображення типу Лакса (2) у випадку, коли еволюція елемента $l \in \hat{\mathcal{G}}^*$ породжується функціоналом Казіміра $\gamma \in I(\hat{\mathcal{G}}^*)$. Далі розглянемо задачу побудови аналога зображення (2) у випадку, коли функціонал $\gamma := \bar{\lambda} \in D(\hat{\mathcal{G}}^*)$, де $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ — деякий фіксований „спектральний" параметр лінійної задачі (4a), при якому $\sup_{x \in \mathbb{R}} \| f \| < \infty$, де $\| \cdot \|$ — відповідна норма на просторі $W(\mathbb{R}; \mathbb{C}^r)$. Подібна задача розглядалася в [11]. Узагальнимо рівняння (2) на випадок, коли $\gamma \in$ $\in D(\hat{\mathcal{G}}^*)$. Тоді з (7) при $p = 0$ легко знаходимо

$$\frac{dl}{dt} = \left[l - \frac{d}{dx}, \mathcal{R} \nabla\gamma(l) \right] + \mathcal{R}^* \left[l - \frac{d}{dx}, \nabla\gamma(l) \right]. \tag{8}$$

Якщо $\gamma \in D(\hat{\mathcal{G}}^*) \cap I(\hat{\mathcal{G}}^*)$, то очевидно, що з (8) випливає рівняння Лакса (2).

Викликає значний інтерес така задача: якому еволюційному рівнянню, що узагальнює (5a), задовольняє відповідний розв'язок рівняння (4a) ? Щоб з'ясувати загальні властивості рівнянь (2), (4a), (5a) і (8), скористаємося методом розширення фазового простору динамічної системи (1), що був запропонований у працях [3, 4, 12, 13].

2. Метод розширення фазового простору. Пов'яжемо з рівняннями (4a) та (5a) наступну систему спряжених рівнянь:

$$\frac{df^*}{dx} = -l^* f^*, \tag{4b}$$

$$\frac{df^*}{dt} = (\mathcal{R} \nabla\gamma(l))^* f^*, \tag{5b}$$

де $f^* \in W(\mathbb{R}; \mathbb{C}^r)$ і спряження матриць здійснюється відносно звичайного (неермітового) скалярного добутку в $W(\mathbb{R}; \mathbb{C}^r)$. Таким чином, ми отримали динамічну систему на розширеному фазовому просторі $W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W$, симплектичні властивості якого проаналізуємо, виходячи зі структури потоку (2) на $\hat{\mathcal{G}}^*$. А саме: задамо на компонентах простору $W \oplus W$ канонічну пуассонову структуру за правилом

$$\begin{pmatrix} \delta\gamma / \delta f \\ \delta\gamma / \delta f^* \end{pmatrix} :\to \begin{pmatrix} \delta\gamma / \delta f^* \\ -\delta\gamma / \delta f \end{pmatrix} \tag{9}$$

для будь-якого функціоналу $\gamma \in D(W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W)$. Відносно (9) динамічна система (5a), (5b) буде, очевидно, гамільтоновою з гамільтоніаном $\bar{H} \in D(W \oplus$ $\oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W)$, де

$$\bar{H}_f = -\int_0^{2\pi} dx \ \langle f^*, \mathcal{R} \nabla \gamma(l) f \rangle := -(\langle f^*, \mathcal{R} \nabla \gamma(l) f \rangle). \tag{10}$$

На жаль, функціонал (10), як легко переконатися, не породжує динамічну систему (2) відносно дужки Пуассона (7) при $p = 0$. Окрім того, очевидно, що функціонал $\overline{H}_f \notin I(\hat{\mathcal{G}}^*)$. Таким чином, нам необхідно побудувати такий правильний функціонал $H_f \in D(W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W)$, який породжував би як рівняння Лакса (2), так і відповідні рівняння еволюції (5a), (5b) відносно канонічної дужки Пуассона на $W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W$. З цією метою, використовуючи метод, розвинутий у праці [13], знайдемо явний вигляд варіації δH_f при фіксованих значеннях точок многовиду $\hat{\mathcal{G}}^*$. Із (5a), (5b) та (9) при $H_f := \gamma = \operatorname{res} \operatorname{Sp} S(x;\xi) \in I(\hat{\mathcal{G}}^*)$ знаходимо $\nabla H_f(l) = S(x;\xi)$, і при $l = (\tilde{l}; f, f^*) \in \hat{\mathcal{G}}^*$, $\delta\tilde{l} = 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \delta H_f &:= (\langle \delta H_f/\delta f, \delta f\rangle) + (\langle \delta H_f/\delta f^*, \delta f^*\rangle) = \\ &= -(\langle(\mathcal{R}S)^* f^*, \delta f\rangle) - (\langle(\mathcal{R}S) f, \delta f^*\rangle) = \\ &= -(S \cdot (\delta f \otimes f^*)/(\xi-\lambda)) - (S\cdot(f\otimes \delta f^*)/(\xi-\lambda)) = \\ &= -(S\cdot \delta(f\otimes f^*)/(\xi-\lambda)), \end{aligned}$$

де $\tilde{l} \in \hat{\mathcal{G}}^*$ — деяка деформація елементами простору $W \oplus W$ вихідного елемента $l \in \hat{\mathcal{G}}^*$, $f(x;\lambda) \otimes f^*(x;\lambda): W \to W$ — звичайний кронекерів тензорний добуток двох векторів з лінійного простору $W(\mathbb{R}; \mathbb{C}^r)$. З другого боку, враховуючи загальний вигляд лінійних задач (4a), (4b), легко встановити, що $\delta H_f := (S\cdot\delta l)|_{\delta\tilde{l}=0}$, припустивши наступну залежність елемента $l \in \hat{\mathcal{G}}^*$ від точок простору $W \oplus W$:

$$l(x;\xi) = \tilde{l}(x;\xi) - (f(x;\lambda)\otimes f^*(x;\lambda))/(\xi-\lambda). \tag{11}$$

Результат (11) дає можливість сформулювати наступну теорему.

Теорема 1. *Динамічна система*

$$\begin{gathered} \frac{d\tilde{l}}{dt} = \left[\tilde{l} - \frac{d}{dx}, \left(\mathcal{R}\nabla h(\tilde{l})\right)\right] + \mathcal{R}^*\left[\tilde{l} - \frac{d}{dx}, \nabla h(\tilde{l})\right], \\ \frac{df}{dt} = -\frac{\delta\gamma}{\delta f^*}, \quad \frac{df^*}{dt} = -\frac{\delta\gamma}{\delta f} \end{gathered} \tag{12}$$

на функціональному многовиді $W \oplus \hat{\mathcal{G}} \oplus W$, *де*

$$h(l) \in I\left(\hat{\mathcal{G}}^*\right), \quad \frac{df}{dx} = lf, \quad \frac{df^*}{dx} = -l^* f^*, \quad l = \tilde{l} - f\otimes f^*/(\xi-\lambda),$$

$f, f^* \in W$ *є канонічно гамільтоновою системою, еквівалентною системі рівнянь* (2), (5a), (5b), *структура Пуассона* $\tilde{\theta}$ *якої задається лінійним відображенням*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta\gamma}{\delta f} \\ \dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{l}} \\ \dfrac{\delta\gamma}{\delta f^*} \end{pmatrix} : \xrightarrow{\tilde{\theta}} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta\gamma}{\delta f^*} \\ \left[\tilde{l} - \dfrac{d}{dx}, \mathcal{R}\left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{l}}\right)\right] + \mathcal{R}^*\left[\tilde{l} - \dfrac{d}{dx}, \dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{l}}\right] \\ -\dfrac{\delta\gamma}{\delta f} \end{pmatrix} \tag{13}$$

для будь-якого функціоналу $\gamma \in D(W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W)$.

Система (12) легко випливає з умови, що функціонал $h \in I(\hat{\mathcal{G}}^*)$ є функціоналом Казіміра, тобто $\left[l - \frac{d}{dx}, \nabla h(l) \right] = 0$ для всіх $\tilde{l} \in \hat{\mathcal{G}}^*$, визначених згідно з (11). Вираз (13) є узагальненням (8) і (9) на розширений многовид $W \oplus \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W$.

Щоб знайти тепер структуру Пуассона для вихідних рівнянь (2) та (5a), (5b) з елементом $I \in \hat{\mathcal{G}}^*$, не залежним від точок многовиду $W \oplus W$, скористаємося методом перетворення Беклунда симплектичної структури (13) на многовиді $W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W$. А саме: задамо вказане перетворення наступним чином:

$$W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W \ni \begin{pmatrix} f \\ \tilde{l} \\ f^* \end{pmatrix} : \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} f \\ l = \tilde{l} - (f \otimes f^*)/(\xi - \lambda) \\ f^* \end{pmatrix} \in W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W. \quad (14)$$

Це приводить до наступної структури Пуассона θ на образі оборотного відображення $BW = W \ni (f, l, f^*)^{\mathrm{T}}$, що визначається формулою $\theta = B' \tilde{\theta} B'^*$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta\gamma}{\delta f} \\ \frac{\delta\gamma}{\delta l} \\ \frac{\delta\gamma}{\delta f^*} \end{pmatrix} : \xrightarrow{\theta}$$

$$: \xrightarrow{\theta} \begin{pmatrix} -\mathcal{R}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta \tilde{l}}\right) f + \frac{\delta\gamma}{\delta f^*} \\ \left[l - \frac{d}{dx}, \mathcal{R}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta l}\right) \right] - \mathcal{R}^* \left[l - \frac{d}{dx}, \frac{\delta\gamma}{\delta l} \right] - \frac{\delta\gamma}{\delta f^*} \otimes f^* \cdot \frac{1}{(\xi - \lambda)} + f \otimes \frac{\delta\gamma}{\delta f} \cdot \frac{1}{(\xi - \lambda)} \\ \left(\mathcal{R}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta l}\right) \right)^* f^* - \frac{\delta\gamma}{\delta f^*} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Таким чином, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 2. *Динамічна система*

$$\frac{dl}{dt} = \left[l - \frac{d}{dx}, \mathcal{R}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta l}\right) \right],$$
$$\frac{df}{dt} = -\mathcal{R}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta l}\right) f, \qquad \frac{df^*}{dt} = \mathcal{R}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta l}\right)^* f^* \quad (16)$$

на многовиді $W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W$, *де* $\gamma \in I(\hat{\mathcal{G}}^*)$, *є гамільтоновим потоком відносно структури Пуассона* (15).

3. Еволюційні рівняння, асоційовані з узагальненим спектром періодичної задачі. Зауважимо, що, використовуючи структуру Пуассона (15), легко отримати гамільтонову динамічну систему на елемент $(f, l, f^*) \in W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus \oplus W$ у випадку, коли функціонал $\gamma \in D(W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W)$ має спеціальну форму

$$\gamma := \operatorname{res}_{|\lambda| \to \infty} \operatorname{Sp}\left(S(x;\lambda)\lambda^p\right) + \sum_{j=1}^{N} a_j \bar{\lambda}_j, \tag{17}$$

де $p \in Z$ і $\bar{\lambda}_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, N}$, — узагальнені сумісні власні значення задач (4a), (4b) при умові, що

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\| f \| + \| f^* \| \right) < \infty,$$

$a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, N}$, — довільні сталі. З рівностей (4a), (4b) та (5a), (5b) легко випливає, що величина $\langle f^*, f \rangle = \text{const}$ у відношенні як до векторного поля $\frac{d}{dx}$, так і до векторного поля $\frac{d}{dt}$ на многовиді $W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W$. Отже, враховуючи тотожність

$$\left(\frac{d}{dx} \bar{f}^*, \bar{f} \right) + \left(\bar{f}^*, l\bar{f} \right) = 0$$

для періодичних „власних" функцій $\bar{f}^*, \bar{f} \in W$, можемо записати наступне варіаційне співвідношення:

$$\left(\left\langle \bar{f}^*, \frac{\partial l}{\partial \lambda} \bar{f} \right\rangle \right) d\bar{\lambda} + \left(\langle \bar{f}^*, \delta l \bar{f} \rangle \right) + \left(\frac{d}{dx} \delta \bar{f}^*, \bar{f} \right) +$$

$$+ \left(\frac{d}{dx} \bar{f}^*, \delta \bar{f} \right) + \left(\langle \delta \bar{f}^*, l\bar{f} \rangle \right) + \left(\langle \bar{f}^*, l\delta \bar{f} \rangle \right) = 0, \tag{18}$$

де варіація $\delta l \in \hat{\mathcal{G}}^*$ враховує лише зміну коефіцієнтів елемента $l \in \hat{\mathcal{G}}^*$, що належать у своїй сукупності згідно з визначенням функціональному многовиду M. З (18) маємо, що при $l \in \hat{\mathcal{G}}^*_- \simeq \hat{\mathcal{G}}^*_+$

$$\frac{\delta \bar{\lambda}}{\delta l} = \frac{\bar{c}\bar{f} \otimes \bar{f}^*}{\xi - \bar{\lambda}}, \qquad \bar{c}^{-1} := -\left(\left\langle \bar{f}^*, \left(\frac{\partial l}{\partial \lambda} \right) \bar{f} \right\rangle \right). \tag{19}$$

Оскільки, очевидно, власне значення $\bar{\lambda} \notin I(\hat{\mathcal{G}}^*)$ для періодичної „спектральної" задачі (4a), (4b), то елемент

$$\bar{\varphi} := \frac{\bar{c}^{-1}(\xi - \bar{\lambda})\delta\bar{\lambda}}{\delta l} \in \hat{\mathcal{G}}$$

задовольняє рівняння Новікова – Марченка (6)

$$\bar{\varphi} = \bar{f} \otimes \bar{f}^*, \qquad \frac{d\bar{\varphi}}{dx} = [l, \bar{\varphi}]$$

при $\lambda := \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$. З другого боку, бачимо, що елемент $\varphi := f \otimes f^* \in \hat{\mathcal{G}}$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ є тим основним елементом, який задає перетворення Беклунда (14) і пов'язує структури Пуассона (13) і (15). На підставі того, що елемент $\varphi = f \otimes f^* \in \tilde{\mathcal{G}}$ теж задовольняє при $\lambda \in \mathbb{C}$ рівняння Новікова – Марченка

$$\frac{d\varphi}{dx} = [l, \varphi], \tag{20}$$

з останнього співвідношення випливає, що існує така постійна матрична функція $\left\| c_{jk}(\lambda) \right\|_{j,k=\overline{1,r}}$, що матриця монодромії рівняння (4a), (4b) зображується у вигляді

$$S(x;\lambda) = \sum_{j,k=1}^{r} c_{jk} f_j \otimes f_k^*,$$

де $f_j, f_k^* \in W$, $j, k = \overline{1, r}$, — деякі лінійно незалежні розв'язки рівнянь (4a), (4b). Нормуючи власні функції $\bar{f}, \bar{f}^* \in W$ в (19) так, щоб число $\bar{c} \equiv 1$, можемо тепер, використовуючи структуру Пуассона (15), записати еволюцію точки $(\bar{f}, l, \bar{f}^*) \in W \oplus \hat{\mathcal{G}}^* \oplus W$, заданої гамільтоніаном (17) (при $N = 1$, $a_1 := a \in \mathbb{C}$):

$$\frac{dl}{dt} = \left[l - \frac{d}{dx}, \mathcal{R}(\lambda^p S) + a\mathcal{R}\frac{(\bar{f}\otimes\bar{f}^*)}{(\lambda - \bar{\lambda})}\right] + \left[l - \frac{d}{dx}, (f\otimes f^*)\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}\right],$$

$$\frac{df}{dt} = -\mathcal{R}(\lambda^p S)f + a\mathcal{R}(\bar{f}\otimes\bar{f}^*)f - a(l\bar{f} - \bar{f}_x)\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}, \tag{21}$$

$$\frac{df^*}{dt} = \left(\mathcal{R}(\lambda^p S)^* f^* + a\mathcal{R}(\bar{f}\otimes\bar{f}^*)\right)^* f^* + a\left(l^*\bar{f}^* + \bar{f}_x^*\right)\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}},$$

де за визначенням $lf = f_x$, $l^*f = f_x^*$. Динамічна система (21) згідно з побудовою є гамільтоновою, має нескінченну ієрархію локальних та нелокальних законів збереження, заданих на многовиді $W \times M \times W$, і допускає спеціальні скінченновимірні редукції за Новіковим – Лаксом [2, 3, 7], які є цілком інтегровні за Ліувіллем.

1. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
2. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1991. – 260 с.
3. *Prykarpatsky A. K., Samoilenko V. Hr., Andrushkiw R. I., Mitropolsky Yu. O., Prytula M. M.* Algebraic structure of the gradient-holonomic algorithm for Lax integrable nonlinear systems. I // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, № 4. – P. 1763–1777.
4. *Prykarpatsky A. K., Samoilenko V. Hr., Andrushkiw R. I.* Algebraic structure of the gradient-holonomic algorithm for Lax integrable nonlinear systems. II. The reduction via Dirac and canonical quantization procedure // Ibid. – № 8. – P. 4088–4116.
5. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
6. *Abraham R., Marsden J.* Foundations of mechanics. – MA: Addison-Wesley, 1978. – 678 p.
7. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский А. П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
8. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
9. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equations // J. Math. Phys. – 1978. – **19**, № 3. – P. 1156–1162.
10. *Magri F.* On the geometry of Soliton equations // Acta Appl. Math. – 1995. – **41**, № 2. – P. 247–270.
11. *Blaszak M.* Bi-Hamiltonian formulation for the Korteweg – de Vries hierarchy with sources // J. Math. Phys. – 1995. – **36**, № 9. – P. 4826–4831.
12. *Oevel W., Strampp W.* Constrained KP-hierarchy and bi-Hamiltonian structures // Communs Math. Phys. – 1993. – **157**, № 1. – P. 51–81.
13. *Prykarpatsky A. K., Samuliak R. W., Blackmore D. et al.* Some remarks on Lagrangion and Hamiltonian formalism, related to infinite-dimensional dynamical systems with symmetries // Condensed Matter. Physics. Proc. IFCS. – Lviv, 1995. – 5. – P. 27–40.

Одержано 13.01.97