УДК 517.5

В. Л. Мельник (Чернігів. пед. ін-т)

ПРО ЛІНІЙНО ОПУКЛІ ОБЛАСТІ З ГЛАДКИМИ МЕЖАМИ

We establish that an arbitrary locally linearly convex domain with a smooth boundary is strongly linearly convex.

Встановлено, що довільна локально лінійно опукла область з гладкою межею буде сильно лінійно опуклою.

1. В роботі А. П. Южакова та В. П. Кривоколеско [1] досліджуються обмежені лінійно опуклі області з гладкою межею. Показано, що обмежені лінійно опуклі області гомеоморфні кулі і їх перерізи прямими зв'язні і однозв'язні. Відомо, що для необмеженого випадку аналогічний результат не вірний. Повна топологічна класифікація лінійно опуклих областей з гладкою межею отримана Ю. Б. Зелінським [2]. Ним встановлено, що в загальному випадку, який включає необмежені області, але при умові глобальної лінійної опуклості, має місце альтернатива: або область D гомеоморфна кулі (якщо межа зв'язна), або область D є циліндром вигляду $Q \times \mathbb{C}^{n-1}$, де Q — плоска область з гладкою межею.

2. Метою даної роботи є дослідження довільних областей без будь-яких обмежень щодо вкладення таких областей в $\mathbb{C}^n$. Дослідження будемо проводити в просторі $\mathbb{C}P^n$— проективному просторі над полем комплексних чисел. Проективний простір будемо розглядати як простір $\mathbb{C}^n$, доповнений нескінченно віддаленою гіперплощиною. В дослідженнях будемо використовувати перетворення простору $\mathbb{C}P^n$, які залишають інваріантними лінійно опуклі області.

Основним результатом статті є те, що довільна локально лінійно опукла область з гладкою межею має зв'язний та однозв'язний переріз з довільною проективною прямою, тобто область є сильно лінійно опуклою.

3. Означення 1. *Область $D \subset \mathbb{C}^n$ називається лінійно опуклою (локально лінійно опуклою), якщо для кожної точки z_0 межі ∂D області D існує гіперплощина L, яка проходить через точку z_0 і не перетинає область D: $L \cap D = \varnothing$ (в деякому околі $U(z_0)$ точки z_0: $L \cap D \cap U(z_0) = \varnothing$).*

Означення 2. *Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ називається сильно лінійно опуклою, якщо для будь-якої прямої γ множини $\gamma \cap E$ і $\mathring{\gamma} \setminus \gamma \cap E$ зв'язні, де через $\mathring{\gamma}$ позначено пряму γ, доповнену нескінченно віддаленою точкою: $\mathring{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$.*

Очевидно, що наведені означення поширюються на проективний простір.

Лема 1. *Нехай $D \subset \mathbb{C}P^n$— локально лінійна опукла область з гладкою межею. Тоді переріз області D довільною проективною прямою зв'язний.*

Доведення. Припустимо обернене. Нехай існує проективна пряма S^1 така, що $D \cap S^1$ — незв'язний переріз. Виберемо дві довільні точки z^0 і z^1, які належать різним компонентам A^0 і A^1 перерізу $D \cap S^1$, $z^0 \in A^0$, $z^1 \in A^1$.

В області D дві довільні точки можемо з'єднати неперервною лінією. Позначимо через $z(\tau)$ лінію, що з'єднує точки z^0 і z^1. Розглянемо множину прямих $\{S^1_\tau\}$, визначених точками z^0 і $z^\tau = z(\tau)$. Для досить малих τ z^0 і z^τ належать одній компоненті A^0_τ. Позначимо через τ_0 найменше з τ таке, що z^0 і z^τ належать різним компонентам A^0_τ і A^1_τ, тобто $\tau_0 = \inf\{\tau : z^0$ і z^τ належать різним компонентам перерізу $D \cap S^1\}$.

Можливі два випадки: 1) $\rho\left(A^0_{\tau_0}, A^1_{\tau_0}\right) > 0$; 2) $\rho\left(A^0_{\tau_0}, A^1_{\tau_0}\right) = 0$, де $\rho(A, B)$ — евклідова відстань між множинами A і B.

1. Дослідимо випадок, коли компоненти $A^0_{\tau_0}$ і $A^1_{\tau_0}$ знаходяться одна від другої на деякій додатній відстані.

Розглянемо множину проективних прямих $\left\{S^1_\tau\right\}$, які визначаються точками z^0 і z^τ $(\tau < \tau_0)$. В кожній площині дві відповідні точки можемо з'єднати неперервною лінією c_τ $(\tau \leftrightarrow \{c_\tau\})$. Оскільки $\mathbb{C}P^n$ — компакт, то можемо виділити збіжну підпослідовність $\{\tau_n\} \to \tau_0$, для якої послідовність $\left\{c_{\tau_n}\right\}$ збігається до деякого зв'язного континуума.

Враховуючи, що $\rho\left(A^0_{\tau_0}, A^1_{\tau_0}\right) > 0$, і виходячи з умови теореми, можемо стверджувати, що частина лінії K, яка не належить ні $A^0_{\tau_0}$, ні $A^1_{\tau_0}$, належить ∂D. Зв'язний континуум c_{τ_0} з'єднує точки z^0 і z^τ, які належать різним компонентам перерізу $S^1_{\tau_0} \cap D$.

Розглянемо точку $w \in \ \bar{c}_{\tau_0} \cap \ \overline{A}^0_{\tau_0} \cap \ \overline{\left(c_{\tau_0} \setminus \overline{A}^0_{\tau_0}\right)}$, яка існує в силу зв'язності c_{τ_0}. В точці w проективна пряма $S^1_{\tau_0}$ лежить в дійсній гіперплощині, дотичній до ∂D; у противному разі вона перетинала б ∂D по гладкій кривій, згідно з лемою Морса [3, с. 14]. (Тут і далі під дійсною гіперплощиною в проективному просторі $\mathbb{C}P^n$ розуміємо підмноговид $\mathbb{C}P^n$, обмеження якого на будь-який канонічно вкладений в $\mathbb{C}P^n$ простір $\mathbb{C}^n$ буде дійсною гіперплощиною в $\mathbb{C}^n$.)

Внаслідок гладкості межі ∂D така дійсна дотична гіперплощина єдина і містить єдину комплексну дотичну гіперплощину L, яка проходить через точку w, причому $L \supset S^1_{\tau_0}$.

З іншого боку, оскільки область D локально лінійно опукла, то для точки $w \in \partial D_1$ існує такий окіл U, що

$$U \cap S^1_{\tau_0} \cap S \subset U \cap L \cap D = \varnothing.$$

Одержана суперечність доводить справедливість леми у першому випадку, коли $\rho\left(A^0_{\tau_0}, A^1_{\tau_0}\right) > 0$.

2. Перейдемо до вивчення другого випадку, коли відстань між компонентами $A^0_{\tau_0}$ і $A^1_{\tau_0}$ дорівнює нулеві.

В околі точки $z^{\tau_0} \subset \partial A^1_{\tau_0} \subset \partial D \cap \ S^1_{\tau_0}$ лежать точки перерізу $\overline{D} \cap \ S^1_{\tau_0}$. Згідно з лемою Морса, $S^1_{\tau_0}$ лежить в дійсній гіперплощині, дотичній до ∂D в точці z^{τ_0}. Оскільки D — локально лінійно опукла, то існує гіперплощина S^{n-1}_τ, яка проходить через точку z^{τ_0}, і така, що $S^{n-1}_\tau \cap D \cap \ U = \varnothing$, де U — окіл точки z^{τ_0}. З гладкості межі області D випливає, що в точці z^{τ_0} існують єдині дійсна і комплексна дотичні гіперплощини. Тому S^{n-1}_τ і $S^1_{\tau_0}$ належать одній проективній гіперплощині і, оскільки мають одну спільну точку z^{τ_0}, мають і спільну проективну пряму, тобто $S^1_{\tau_0} \subset \ S^{n-1}_\tau$. Отже, $\varnothing \neq A^0_{\tau_0} \cap$ $\cap\, U \subset D \cap \ S^1_{\tau_0} \cap U \subset D \cap \ S^{n-1}_\tau \cap U$.

Одержана суперечність доводить неможливість другого випадку.

З обох розглянутих випадків випливає зв'язність перерізу $D \cap S^1$. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $D \cap S^1 \neq \varnothing$, *де* $D \subset \mathbb{C}P^n$ — *локально лінійно опукла область з гладкою межею,* S^1 — *проективна пряма. Тоді* $\overline{D \cap S^1} = \overline{D} \cap S^1$.

Доведення. Спочатку покажемо справджуваність прямого і оберненого включень, що приведе до шуканої рівності:

1) $\overline{D \cap S^1} \subset \overline{D} \cap S^1$;

2) $\overline{D \cap S^1} \supset \overline{D} \cap S^1$.

1. Пряме включення очевидне, оскільки $\overline{D}$ і S^1 — замкнені множини, кожна з яких містить $D \cap S^1$.

2. Залишилось довести обернене включення $\overline{D \cap S^1} \supset \overline{D} \cap S^1$.
Розглянемо два випадки:

а) $\overline{D} \cap S^1 \setminus \overline{D \cap S^1}$ — замкнена множина;

б) $\overline{D} \cap S^1 \setminus \overline{D \cap S^1}$ — незамкнена множина.

Доведемо неможливість випадку б). Якщо доповнення $\overline{D} \cap S^1 \setminus \overline{D \cap S^1}$ — незамкнене, то $\overline{D} \cap S^1$ — зв'язне. Отже, в деякому околі точки $\xi \in \partial(D \cap S^1)$ містяться точки, які належать $D \cap S^1$, але відмінні від точок $\overline{D \cap S^1}$, або точки $\partial D \cap S^1$, які не є межовими для $\overline{D \cap S^1}$.

Відомо [3, с. 14], що тоді S^1 лежить в гіперплощині, дотичній до ∂D в точці ξ. Згідно з умовою локальної лінійної опуклості D, існує гіперплощина L така, що проходить через точку ξ і задовольняє умову $L \cap D \cap U_\xi = \varnothing$, де U_ξ — деякий окіл точки ξ.

S^1 і L належать одній дійсній гіперплощині, дотичній до ∂D, і мають спільну точку ξ. Отже, вони перетинаються по дійсній прямій.

Але, оскільки $\xi \in \overline{\partial D \cap S^1}$, то $\overline{D \cap S^1} \cap U_\xi \subset D \cap L \cap U_\xi \neq \varnothing$, що суперечить умові. Тим самим доведено неможливість незамкненого доповнення $\overline{D} \cap \cap S^1 \setminus \overline{D \cap S^1}$.

а). Нехай доповнення $\overline{D} \cap S^1 \setminus \overline{D \cap S^1}$ — замкнене, тобто $\overline{D} \cap S^1$ — незв'язний переріз. За умовою D — локально лінійно опукла область з гладкою межею. Отже, переріз $D \cap S^1$ — зв'язний.

Покажемо тепер зв'язність $\overline{D} \cap S^1$. Оскільки переріз $D \cap S^1$ зв'язний для довільної прямої S^1, то можемо побудувати сім'ю прямих S_n^1 таких, що перетинають D і для яких переріз $D \cap S_n^1$ буде зв'язний. На кожній з них виберемо послідовність точок $\{a_n\} \subset D$ і $\{b_n\} \subset D$. Оскільки область D — зв'язна, то $\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to b$, де $a, b \in \overline{D}$. З'єднаємо a_i з b_i неперервною кривою $\sigma_i \subset S_n^1 \cap D$, враховуючи зв'язність перерізу $S_n^1 \cap D$. Виділимо з послідовності кривих $\{\sigma_n\}$ збіжну підпослідовність $\{\sigma_n\} \to \sigma_i \in \overline{D} \cap S^1$, що підтверджує зв'язність $\overline{D} \cap S^1$.

Таким чином, одержані включення доводять шукану рівність

$$\overline{D \cap S^1} = \overline{D} \cap S^1.$$

Лема 3. *Нехай* $D \subset \mathbb{C}P^n$ — *локально лінійна опукла область з гладкою межею. Тоді* D — *лінійно опукла.*

Доведення. Застосовуючи спосіб доведення від супротивного, припустимо, що область D, яка задовольняє умови леми, не є лінійно опуклою. Тоді існують точка $\xi \in \partial D$ і така гіперплощина S^{n-1}, що не перетинає D в деякому околі $U(\xi)$ точки ξ і задовольняє умову $D \cap S^{n-1} \neq \varnothing$.

Через довільну точку $\xi_0 \in D \cap S^{n-1}$ і точку ξ проведемо проективну пряму S^1, яка належить гіперплощині S^{n-1},

$$S^1 \subset S^{n-1}, \quad \xi_0 \in S^1 \cap D, \quad \xi \in \overline{D} \cap S^1.$$

Одночасно з включення $U(\xi) \cap D \cap S^1 \subset U(\xi) \cap D \cap S^{n-1} = \varnothing$ випливає, що $\xi \notin \overline{D \cap S^1}$. Але це суперечить попередній лемі, згідно з якою $\overline{D \cap S^1} = \overline{D} \cap \cap S^1$.

Суперечність, яку ми одержали, завершує доведення леми.

Застосуємо одержані леми до доведення основного твердження.

Теорема. *Нехай $D \subset \mathbb{C}P^n$ — локально лінійно опукла область з гладкою межею. Тоді D — сильно лінійно опукла область.*

Доведення. З означення 2 бачимо, що досить показати зв'язність і однозв'язність перерізу D з кожною проективною прямою. Зв'язність перерізів показана в лемі 1. Залишилось встановити їх однозв'язність.

Застосуємо знову спосіб доведення від супротивного. Нехай переріз $D \cap S^1$ не буде однозв'язний, тобто межа $\partial(D \cap S^1)$ — незв'язна. І нехай точки ξ^0 і ξ^1 належать різним компонентам $\partial(D \cap S^1)$. Існує замкнена жорданова крива $\Gamma \subset D \cap S^1$, яка розділяє в S^1 точки ξ^0 і ξ^1 кривої Γ_1. Відмітимо, що побудова Γ_1 можлива по причині зв'язності межі ∂D; $\Gamma_1 = \{\xi : \xi(\tau),\ 0 \le \tau \le 1\} \subset \subset \partial D$, $\xi(0) = \xi^0$, $\xi(1) = \xi^1$. В кожній точці $\xi(\tau)$ проведемо дотичну S_τ^{n-1}.

В силу лінійної опуклості області D маємо $D \cap S_\tau^{n-1} = \varnothing$. Звідси і з умови непорожності перерізу $D \cap S_\tau^{n-1} \neq \varnothing$ випливає, що $S^1 \subset S_\tau^{n-1}$. А це означає, що S^1 і S_τ^{n-1} мають непорожній переріз $z(\tau)$. Оскільки S_τ^{n-1} неперервно залежить від τ, то і $z(\tau)$ — неперервна крива в точках τ.

Отже, маємо криві: Γ — така, що розділяє точки ξ^0 і ξ^1, і $\Gamma_2 = z(\tau)$ — неперервна крива, що з'єднує $z(0) = \xi^0$ і $z(1) = \xi^1$. Причому $\Gamma \cap \Gamma_2 \neq \varnothing$. Звідси для деякого значення $\tau = \tau_1$ $S_{\tau_1}^{n-1} \cap \Gamma \subset S_{\tau_1}^{n-1} \cap D = \varnothing$. Одержана суперечність доводить однозв'язність перерізу $S^1 \cap D$, що завершує доведення теореми.

***Наслідок* 1.** *Локально лінійно опукла область $D \subset \mathbb{C}P^n$ з гладкою межею гомеоморфна кулі.*

Справедливість цього твердження випливає з теореми та результату Южакова – Кривоколеско [1].

***Наслідок* 2.** *Нехай $D \subset \mathbb{C}P^n$ — локально лінійно опукла область з гладкою межею. Тоді D можна лінійно опукло вкласти в $\mathbb{C}^n$.*

Згідно з лемою 3, область D — лінійно опукла в $\mathbb{C}P^n$. Нехай $z \in \mathbb{C}P^n \setminus D$. Тоді існує проективна гіперплощина $L \ni z$, $L \cap D = \varnothing$. Оскільки $\mathbb{C}P^n \setminus L \approx \mathbb{C}^n$, то одержали один з можливих розв'язків.

1. *Южаков А. П., Кривоколеско В. П.* Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. мат. журн. — 1971. – **12**, № 2. – С. 452–458.
2. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 263 с.
3. *Милнор Д.* Теория Морса. – М.: Мир, 1964. – 184 с.

Одержано 11.01.96