УДК 517.544

Ю. А. Григорьев (Одес. мор. ун-т)

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ГРАДИЕНТОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ*

For a function $u(x, y)$ harmonic in the upper half-plane $y > 0$ and represented by the Poisson integral of a function $v(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, we prove that the inequality

$$|\operatorname{grad} u(x, y)|^2 \leq \frac{1}{4\pi y^3} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\, dt$$

is true. A similar inequality is obtained for a function harmonic in a disk.

Доведено, що для функції $u(x, y)$, гармонічної у верхній півплощині $y > 0$ і зображуваної інтегралом Пуассона від функції $v(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, справедлива нерівність

$$|\operatorname{grad} u(x, y)|^2 \leq \frac{1}{4\pi y^3} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\, dt .$$

Подібна нерівність одержана також для функції, яка гармонічна в крузі.

Теорема 1. *Пусть гармоническая в верхней полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $y > 0$ функция $u(x, y)$ представима интегралом Пуассона*

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)\, dt}{(x-t)^2 + y^2}, \tag{1}$$

где $v(t) \in L_2(-\infty, \infty)$. Тогда в любой точке (x, y) этой полуплоскости справедливо неравенство

$$|\operatorname{grad} u(x, y)|^2 \leq \frac{1}{4\pi y^3} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\, dt .$$

Теорема 2. *Пусть гармоническая в круге $|z| < 1$ функция $u(z)$, $z = x + iy$, представима интегралом Пуассона*

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\theta, \qquad \zeta = e^{i\theta}, \tag{2}$$

где $v(\theta) \in L_2(0, 2\pi)$. Тогда в любой внутренней точке z этого круга справедливо неравенство

$$|\operatorname{grad} u(z)|^2 \leq \frac{2}{\pi} \frac{1 + |z|^2}{(1 - |z|^2)^3} \int_0^{2\pi} v^2(\theta)\, d\theta . \tag{3}$$

***Доказательство теоремы* 1.** Найдем частные производные функции (1) в фиксированной точке (x, y) верхней полуплоскости и представим их в виде скалярного произведения соответствующих элементов вещественного гильбертова пространства $H = L_2(-\infty, \infty)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (a, v), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = (b, v),$$

где

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Международной Соросовской *программы* поддержки образования в Украине (грант № APU 051038).

$$a(t) = \frac{2(t-x)\,y}{\pi((x-t)^2+y^2)^2} \in L_2(-\infty,\infty),$$

$$b(t) = \frac{(x-t)^2-y^2}{\pi((x-t)^2+y^2)^2} \in L_2(-\infty,\infty).$$

Тогда $\operatorname{grad} u(x,y) = \big((a,v);(b,v)\big)$. Отметим некоторые свойства элементов a и b из H [1]:

1) $(a,b) = 0$;

2) $\|a\|^2 = \|b\|^2 = \dfrac{1}{4\pi y^3}$.

Запишем неравенство Бесселя [2, с. 177] для элемента $v \in H$ и ортогональных элементов a, b:

$$\|v\|^2 \geq \frac{1}{\|a\|^2}(a,v)^2 + \frac{1}{\|b\|^2}(b,v)^2 = \frac{1}{\|a\|^2}|\operatorname{grad} u(x,y)|^2.$$

Отсюда

$$|\operatorname{grad} u(x,y)|^2 \leq \|a\|^2\|v\|^2 = \frac{1}{4\pi y^3}\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\,dt.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Найдем частные производные функции (2) в точке $z = x+iy$ и представим их через скалярные произведения соответствующих элементов комплексного гильбертова пространства $H = L_2(0,2\pi)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re}(a,v), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{Re} i(a,v) = -\operatorname{Im}(a,v),$$

где

$$a(\theta) = \frac{\zeta}{\pi(\zeta-z)^2} \in L_2(0,2\pi), \qquad \zeta = e^{i\theta}.$$

Следовательно,

$$(a,v) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad |(a,v)| = |\operatorname{grad} u(z)|$$

и можно воспользоваться неравенством Коши – Буняковского $|(a,v)| \leq \|a\| \cdot \cdot \|v\|$. В данном случае

$$\|v\|^2 = \int_0^{2\pi} v^2(\theta)\,d\theta,$$

$$\|a\|^2 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|\zeta-z|^4} = \frac{-i}{\pi^2}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta|\zeta-z|^4} = \frac{2}{\pi}\frac{1+|z|^2}{(1-|z|^2)^3}.$$

Подставляя это в неравенство Коши – Буняковского, получаем (3). Теорема 2 доказана.

1. *Григорьев Ю. А.* Определение гармонической функции с минимальным отклонением градиента // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1990. – Вып. 32. – С. 55 – 57.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

Получено 15.01.96