УДК 534.111

Б. І. Сокіл (ун-т „Львівська політехніка")

ПРО АСИМПТОТИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО НЕАВТОНОМНОГО РІВНЯННЯ

On the basis of periodic Ateb-functions, in the resonance and nonresonance cases, we construct an asymptotic approximation of one-frequency solutions of boundary-value problem for nonlinear nonautonomous equation.

На основі періодичних Ateb-функцій будується для резонансного і нерезонансного випадків асимптотичне наближення одночастотних розв'язків крайової задачі для нелінійного неавтономного рівняння.

Розглянемо крайову задачу

$$u_{tt}-\alpha^2\left(u_x^{\nu_1+1}u_{xt}^{\nu_2(\nu_2+1)^{-1}}\right)_x = \varepsilon f(x, u, u_x, u_t, \mu t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0\le x\le l, \quad t\in R, \tag{2}$$

де α, l, μ, ν_i, $i=1,2,$— сталі, $\nu_i+1=(2n_i+1)(2m_i+1)^{-1}$, $n_i, m_i=0, 1, 2, \ldots$, $f(x, u, u_x, u_t, \mu t)$— аналітична 2π-періодична відносно μt функція, ε — малий параметр.

Асимптотичні розв'язки крайових задач для рівняння (1) при $\nu_1=\nu_2=0$ отримано в [1], у роботах [2, 3] побудовано одночастотні розклади розв'язків для (1) при $\nu_2=0$. У даній роботі на основі періодичних Ateb-функцій [4] будується наближення одночастотних розв'язків вказаної крайової задачі у резонансному і нерезонансному випадках.

Покажемо, що незбурена $(\varepsilon=0)$ крайова задача (1), (2) має періодичні розв'язки відносно незалежних змінних x і t. Для цього відокремленням змінних згідно з $u(x,t)=X(x)T(t)$ для знаходження функцій $X(x)$ і $T(t)$ одержуємо звичайні нелійні диференціальні рівняння

$$X_x^{\nu_1+\nu_2(\nu_2+1)^{-1}}X_{xx}+\lambda X = 0, \tag{3}$$

$$T_{tt}+\lambda\alpha_1^2T_t^{\nu_2(\nu_2+1)^{-1}}T^{\nu_1+1} = 0, \tag{4}$$

де $\alpha_1^2=\alpha^2\nu$; $\nu=\nu_1+1+\nu_2(\nu_2+1)^{-1}$, λ — параметр, який визначається з крайових умов (2).

Відмінні від тривіальних розв'язки рівнянь (3) і (4) виражаються через Ateb-функції і з урахуванням (2) набувають вигляду

$$X(x) = X_0\,\mathrm{sa}\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{k\Pi_x}{l}x\right), \quad \lambda_k = 2X_0^{\nu}(\nu+2)^{-1}\frac{k\Pi_x}{l}, \tag{5}$$

$$T(t) = T_0\,\mathrm{ca}\,(\nu_1+1, \nu_2+1, \omega_k(a)t+\theta), \quad k=1,2,3,\ldots, a=X_0T_0, \tag{6}$$

$$\omega_k(a) =$$

$$= \left[\alpha_1^2\frac{\nu_2+2}{(\nu_2+1)(\nu_1+2)+\nu_2}\left(\frac{\nu_1+2}{2}\right)^{\frac{1}{\nu_2+1}}a^{\frac{\nu_2(\nu_1+1)+\nu_1}{\nu_2+1}}\left(\frac{k\Pi_x}{l}\right)^{\frac{\nu_2(\nu_1+3)+\nu_1+2}{\nu_2+1}}\right]^{\frac{\nu_2+1}{\nu_2+2}}, \tag{7}$$

де X_0, T_0, θ — сталі, $2\Pi_x=2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)$ — період по w функції $\mathrm{sa}\,(1, 1/(\nu+1), w)$. З урахуванням (5), (6) періодичні одночастотні розв'язки незбуреної крайової задачі (1), (2) мають вигляд

$$u(x, t) = a\,\mathrm{sa}\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{k\Pi_x}{l}x\right)\mathrm{ca}\,(\nu_1+1, \nu_2+1, \psi), \qquad \psi = \omega_k(a)t + \theta. \tag{8}$$

Як випливає з (7), (9), цікавим випадком розглядуваної крайової задачі є випадок $\nu_2 = -\nu_1(\nu_1 + +1)^{-1}$, при якому період розв'язку по змінній t не залежить від параметра a (початкових умов), тобто у нелінійних системах, які описуються диференціальним рівнянням

$$u_{tt} - \alpha^2\left(u_x^{\nu_1+1}u_{xt}^{-\nu_1}\right)_x = 0, \tag{9}$$

при однорідних крайових умовах (2) існує ізохронний коливний процес з періодом

$$\tau = \frac{4}{\nu_1+2}\Gamma\left(\frac{1}{\nu_1+2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_1+1}{\nu_1+2}\right)\left(\alpha\frac{s\pi}{l}\right)^{-\frac{2}{\nu_1+2}}. \tag{10}$$

Для збуренного рівняння (1) співвідношення (8) вважатимемо заміною змінних, тільки для вказаного випадку параметри a і θ будуть вже деякими функціями часу. Враховуючи останнє, для визначення вказаних величин з (1) отримуємо систему диференціальних рівнянь першого наближення

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon\frac{\mathrm{sa}\,(\nu_2+1, \nu_1+1, \psi)}{\omega_k(a)P}\int_0^l \mathrm{sa}\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{k\Pi_x}{l}x\right)F(a, x, \psi, \gamma)\,dx, \qquad \gamma = \mu t, \\ \dot{\psi} &= \omega_k(a) - \frac{\varepsilon(\nu_1+2)\,\mathrm{ca}\,(\nu_1+1, \nu_2+1, \psi)}{2a\omega_k(a)P\,\mathrm{sa}^{\nu_2}(\nu_2+1, \nu_1+1, \psi)}\times \\ &\times\int_0^l \mathrm{sa}\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{k\Pi_x}{l}x\right)F(a, x, \psi, \gamma)\,dx, \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$F(a, x, \psi, \gamma) = f\left(x, a\,\mathrm{sa}\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{k\Pi_x}{l}x\right)\mathrm{ca}\,(\nu_1+1, \nu_2+1, \psi), \ldots, \mu t\right);$$

$$P = X_0^{-2}\int_0^l X^2(x)\,dx = l\frac{\nu+2}{3\nu+4}.$$

З урахуванням (11) для крайової задачі (1), (2) можливі два випадки: а) резонансний

$$n\omega_k(a) = m\frac{\Pi_T}{\pi}\mu; \qquad 2\Pi_T = 2\Gamma\left(\frac{1}{\nu_1+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\nu_2+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\nu_1+2}+\frac{1}{\nu_2+2}\right)$$

— період по ψ-функції $\mathrm{ca}\,(\nu_1 + 1, \nu_2 + 1, \psi)$; б) нерезонансний $n\omega_k(a) \neq$ $\neq m\dfrac{\Pi_T}{\pi}\mu$.

Нерезонансний випадок. Усереднюючи (11) по швидких змінних ψ і γ, отримуємо рівняння першого наближення у стандартному вигляді

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\varepsilon}{4\pi\Pi_T\omega_k(a)P}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\Pi_T}\mathrm{sa}\,(\nu_2+1, \nu_1+1, \psi)\times \\ &\times\int_0^l \mathrm{sa}\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{k\Pi_x}{l}x\right)F(a, x, \psi, \gamma)\,dx\,d\psi\,d\gamma, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\dot{\psi} = \omega_k(a) - \frac{(\nu_1+2)\varepsilon}{8a\pi\Pi_T\omega_k(a)P}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\Pi_T}\frac{\mathrm{ca}\,(\nu_1+1,\nu_2+1,\psi)}{\mathrm{sa}^{\nu_2}(\nu_2+1,\nu_1+1,\psi)}\times$$

$$\times\int_0^l \mathrm{sa}\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{k\Pi_x}{l}x\right)F(a,x,\psi,\gamma)\,dx\,d\psi\,d\gamma.$$

Таким чином, перше наближення асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2) у нерезонансному випадку визначається залежністю (8), в якій a і ψ зв'язані рівняннями (12).

Резонансний випадок. Заміною змінних $\varphi = \psi - \Pi_T\mu/\pi$ систему рівнянь (11) для випадку головного резонансу приводимо до вигляду

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon\,\mathrm{sa}\left(\nu_2+1,\nu_1+1,\varphi+\gamma\frac{\Pi_T}{\pi}\right)}{\omega_k(a)P}\int_0^l \mathrm{sa}\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{k\Pi_x}{l}x\right)F\left(a,x,\varphi+\gamma\frac{\Pi_T}{\pi},\gamma\right)dx,$$

$$\dot{\varphi} = \omega_k(a) - \frac{\Pi_T}{\pi}\mu - \frac{\varepsilon(\nu_1+2)\,\mathrm{ca}\left(\nu_1+1,\nu_2+1,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma\right)}{2a\omega_k(a)P\,\mathrm{sa}^{\nu_2}\left(\nu_2+1,\nu_1+1,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma\right)}\times \tag{13}$$

$$\times\int_0^l \mathrm{sa}\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{k\Pi_x}{l}x\right)F\left(a,x,\varphi+\gamma\frac{\Pi_T}{\pi},\gamma\right)dx.$$

Як і в [5], вважатимемо областю резонансу для рівнянь (13) таке співвідношення параметрів, при якому $h(a)$ є величиною порядку ε, тобто

$$\omega_k(a) - \frac{\Pi_T}{\pi}\mu = h(a). \tag{14}$$

Нехай a^* — додатний корінь рівняння (14) при $h(a)=0$ $(\omega_k(a^*) = \Pi_T\mu/\pi)$. Обмежившись розглядом зміни параметра a в малому околі a^*, систему рівнянь (13) після усереднення по швидкій змінній γ запишемо у вигляді

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_k(a)P}\int_0^{2\pi}\mathrm{sa}\left(\nu_2+1,\nu_1+1,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma\right)\times$$

$$\times\int_0^l \mathrm{sa}\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{k\Pi_x}{l}x\right)F\left(a,x,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma,\gamma\right)dx\,d\gamma,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\omega_k(a^*)}{da}(a-a^*) - \frac{\varepsilon(\nu_1+2)}{4\pi\omega_k(a)P}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{ca}\left(\nu_1+1,\nu_2+1,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma\right)}{\mathrm{sa}^{\nu_2}\left(\nu_2+1,\nu_1+1,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma\right)}\times \tag{15}$$

$$\times\int_0^l \mathrm{sa}\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{k\Pi_x}{l}x\right)F\left(a,x,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma,\gamma\right)dx\,d\gamma.$$

Формально система рівнянь (15) аналогічна системі (12). Проте вони суттєво відрізняються: якщо для (12) із зміною часу $\omega(a) - \Pi_T\mu/\pi$ може набувати і великих значень, то система (15) для цього випадку втрачає зміст. Крім цього, той факт, що всі дослідження для (15) проводяться в малому околі a^*, перше її наближення можна спростити: усередненням системи (15) по γ ми не змінимо точності наближення, якщо у величинах порядку $O(\varepsilon)$ допустити відхилення такого ж порядку. Тобто точність системи диференціальних рівнянь (15) не зміниться при заміні у коефіцієнтах при ε її правих частин параметра a на a^*. На основі викладеного вище рівняння першого наближення у резонансному випадку набувають вигляду

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \varepsilon\frac{1}{2\pi\omega_k(a^*)P}\int_0^{2\pi}\mathrm{sa}\left(\nu_2+1,\nu_1+1,\varphi+\gamma\frac{\Pi_T}{\pi}\right)\times\\ &\quad\times\int_0^l\mathrm{sa}\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{k\Pi_x}{l}x\right)F\left(a^*,x,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma,\gamma\right)dx\,d\gamma,\\ \dot{\varphi} &= \frac{d\omega_k(a^*)}{da}(a-a^*)-\frac{\varepsilon(\nu_1+2)}{4a^*\omega_k(a^*)P}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{ca}\left(\nu_1+1,\nu_2+1,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma\right)}{\mathrm{sa}^{\nu_2}\left(\nu_2+1,\nu_1+1,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma\right)}\times\\ &\quad\times\int_0^l\mathrm{sa}\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{k\Pi_x}{l}x\right)F\left(a^*,x,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma,\gamma\right)dx\,d\gamma.\end{aligned}\tag{16}$$

Для випадку $\nu_2=-\dfrac{\nu_1}{\nu_1+1}$ рівняння (13) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \varepsilon\frac{1}{\pi\omega_0 l}\int_0^{2\pi}\mathrm{sa}\left(\frac{1}{\nu_1+1},\nu_1+1,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma\right)\times\\ &\quad\times\int_0^l\sin\frac{k\pi}{l}x\,F\left(a,x,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma,\gamma\right)dx\,d\gamma,\\ \dot{\varphi} &= \omega_0-\frac{\mu}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu_1+2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_1+1}{\nu_1+2}\right)-\frac{\varepsilon(\nu_1+2)}{a\omega_0\pi l}\int_0^{2\pi}\mathrm{ca}\left(\nu_1+1,\frac{1}{\nu_1+1},\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma\right)\times\\ &\quad\times\mathrm{sa}^{\frac{\nu_1}{\nu_1+1}}\left(\frac{1}{\nu_1+1},\nu_1+1,\varphi+\frac{\Pi_T}{\pi}\gamma\right)\int_0^l\sin\frac{k\pi}{l}xF(\ldots)\,dx\,d\gamma,\end{aligned}\tag{17}$$

де

$$\omega_0=\frac{\nu_1+2}{2}\left(\alpha\frac{k\pi}{l}\right)^{\frac{2}{\nu_1+2}}.$$

Зокрема, при $\nu_1=\nu_2=0$ із викладеного отримаємо розв'язок задачі для квазілінійного рівняння, розглянутого в [1].

1. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Выща шк., 1976. – 592 с.
2. *Сокіл Б. І.* Про один спосіб побудови одночастотних розв'язків для нелінійного хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 782–785.
3. *Сокіл Б. І.* Побудова одночастотних розв'язків деяких крайових задач для неавтономного хвильового рівняння // Там же. – № 9. – С. 1275–1279.
4. *Сеник П. М.* Обернення неповної Beta-функції // Там же. – 1969. – **21**, № 3. – С. 325–333.
5. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 380 с.

Одержано 07.12.95