УДК 517. 9

М. Б. Верейкина, А. Н. Шарковский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОТСЛЕЖИВАНИЕ ПСЕВДОТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЛОНГАЦИЙ ОРБИТ

We investigate properties of dynamical systems associated with the approximation of pseudo-trajectories of a dynamical system by its trajectories. According to the modern terminology, the property of this sort is called a "pseudo-trajectory tracing property" or "shadowing property". We prove that dynamical systems given by maps of a compact set into itself and possessing this property are systems with stable prolongation of orbits. The examples of maps of an interval into itself are constructed, which prove that the inverse statement is not true, i.e., that dynamical systems with stable prolongation of orbits may not possess the pseudo-trajectory tracing property.

Досліджуються властивості динамічних систем, пов'язані з апроксимацією псевдотраєкторій динамічної системи її траєкторіями, які ми, дотримуючись існуючої термінології, називаємо властивістю „відстеження псевдотраєкторій" (в англомовній літературі використовується термін "shadowing property"). Доведено, що динамічні системи, які задані відображеннями компакта в себе та мають цю властивість, є системами зі стійкою пролонгацією орбіт. Побудовано приклади відображень інтервалу в себе, які показують, що обернене твердження невірне: динамічні системи зі стійкою пролонгацією орбіт можуть не мати властивості відстеження псевдотраєкторій.

1. Введение. Основной вопрос, который рассматривается в настоящей работе, заключается в следующем: каким образом взаимосвязаны между собой свойство динамических систем отслеживать псевдотраектории „настоящими" траекториями (см., например, [1], [2], гл. 1, §3, гл. 2, приложение, [3]), и свойство динамических систем иметь устойчивую пролонгацию орбит (см., например, [4–6], [7], гл. 3, §4) ? То, что динамическая система является системой с отслеживанием псевдотраекторий (для краткости будем говорить „система с отслеживанием псевдотраекторий" вместо „система, имеющая свойство отслеживания псевдотраекторий ее „настоящими" траекториями"), означает возможность аппроксимации произвольной псевдотраектории динамической системы некоторой ее траекторией, т. е. что движение вдоль произвольной псевдотраектории происходит как угодно близко к движению вдоль некоторых „настоящих" траекторий. То, что система является системой с устойчивой пролонгацией орбит, означает, что какова бы ни была начальная точка, любая точка фазового пространства, достижимая какой-нибудь псевдотраекторией, выходящей из этой начальной точки, достижима и какой-либо „настоящей" траекторией, выходящей из достаточно малой окрестности начальной точки.

Таким образом, и определения систем с отслеживанием псевдотраекторий, и определения систем с устойчивой пролонгацией орбит основываются на понятии псевдотраектории (ε-траектории) и ее близости к „настоящей" траектории. Однако в определении пролонгации орбиты „траектория" фигурирует как неупорядоченное множество, на котором не указан порядок перехода от точки к точке (т. е. не задано „движение" по траектории с течением времени), а в определении отслеживания псевдотраекторий „траектория" рассматривается как упорядоченное множество, на котором задан линейный порядок (задающий „движение" вдоль траектории [8]). Поэтому свойство отслеживания псевдотраекторий требует более сильных ограничений на систему, чем свойство устойчивости пролонгаций орбит, и множество систем с отслеживанием псевдотраекторий оказывается более узким, чем множество систем с устойчивой пролонгацией орбит. Более детально об этом и идет речь ниже.

Другой вопрос, заслуживающий внимания: насколько типичны динамические системы с отслеживанием псевдотраекторий ? Как известно [6], отображения с устойчивой пролонгацией орбит являются типичными, а именно, множество таких отображений образует множество второй категории во множестве всех C^r-гладких отображений многообразия в себя при любом $r \geq 0$. Выясне-

© М. Б. ВЕРЕЙКИНА, А. Н. ШАРКОВСКИЙ, 1997

ние взаимосвязей множеств систем с устойчивой пролонгацией орбит и систем с отслеживанием псевдотраекторий могло бы дать ответ и на второй вопрос.

2. Определения и обозначения. Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^m, \mathfrak{M} = C^r(X, X)$ — пространство C^r-гладких отображений $f\colon X \to X,\ r \geq 0$. Мы будем использовать обозначения: d — метрика в X (например, евклидова метрика); ρ — C^r-метрика в пространстве отображений $\mathfrak{M}$; $U_\varepsilon(x) = \{\tilde{x} \in X \mid d(x, \tilde{x}) < \varepsilon\}$ — ε-окрестность точки $x \in X$; $\mathfrak{U}_\varepsilon(f) = \{\tilde{f} \in \mathfrak{M} \mid \rho(f, \tilde{f}) < \varepsilon\}$ — ε-окрестность отображения $f \in \mathfrak{M}$;

$$O(x,f) = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(x)$$

— f-орбита точки $x \in X$, f^i — i-я итерация отображения f;

$$\mathcal{T}(x,f) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^i(x), \ldots,\} = \{f^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$$

— f-траектория точки $x \in X$, т. е. линейно упорядоченное множество $O(x,f)$.

***Замечание* 1.** Как подчеркивалось выше, будем различать понятия „орбита" и „траектория" точки: под „орбитой" будем понимать неупорядоченное множество, а под „траекторией" — упорядоченное множество. Пространственно-временное изменение — движение точки вдоль траектории с течением времени — является существенным в дальнейших исследованиях.

Следуя [2] (гл. 1, §3; гл. 2, приложение), [7] (гл. 3, §2), [9–11], дадим определение (ε, f)-траектории.

Определение 1. *Последовательность точек* $\{x_i\}_{i=0}^n$, $n < \infty$, *назовем* (ε, f)*-траекторией, если* $d(x_{i+1}, f(x_i)) < \varepsilon$ *при* $0 \leq i \leq n-1$.

***Замечание* 2.** До сих пор мы использовали термин „псевдотраектория", вкладывая в него тот же смысл, что и в термин „(ε, f)-траектория". Далее будем чаще использовать второй, более информативный.

Определение 2. *Будем говорить, что* (ε, f)*-траектория* $\{x_i\}_{i=0}^n$, $n < \infty$, δ*-отслеживается* f*-траекторией точки* $x \in X$ *(либо* f*-траектория точки* $x \in X$ δ*-отслеживает* (ε, f)*-траекторию* $\{x_i\}_{i=0}^n$, $n < \infty$*), если* $d(x_i, f^i(x)) < \delta$ *при* $0 \leq i \leq n$.

Определение 3. *Отображение* f *называется отображением с отслеживанием псевдотраекторий, если для любого* $\delta > 0$ *найдется* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, f) > 0$ *такое, что для каждой* (ε, f)*-траектории найдется* f*-траектория, которая* δ*-отслеживает эту* (ε, f)*-траекторию.*

Целесообразно рассмотреть и динамические системы с более слабыми условиями на „отслеживание псевдотраекторий".

Определение 4. *Отображение* f *называется отображением с неравномерным отслеживанием псевдотраекторий, если для каждой точки* $x_0 \in X$ *и любого* $\delta > 0$ *найдется* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, f, x_0) > 0$ *такое, что для каждой* (ε, f)*-траектории, начинающейся в точке* x_0*, найдется* f*-траектория, которая* δ*-отслеживает эту* (ε, f)*-траекторию.*

Следуя [4–6], [7] (гл. 3, §4), приведем определения пролонгаций орбит.

Определение 5. *Пролонгацией* f*-орбиты точки* $x \in X$ *по начальной точке называется множество*

$$D(x,f) = \bigcap_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon(x, f),$$

где

$$D_\varepsilon(x,f) = \overline{\bigcup_{\tilde{x}\in U_\varepsilon(x)} \bigcup_{i\geq 0} f^i(\tilde{x})} = \overline{\bigcup_{\tilde{x}\in U_\varepsilon(x)} O(\tilde{x}, f)}.$$

Пролонгацией f-орбиты точки $x \in X$ по динамической системе называется множество

$$P(x,f) = \bigcap_{\varepsilon>0} P_\varepsilon(x, f),$$

где

$$P_\varepsilon(x,f) = \overline{\bigcup_{\tilde{f}\in \mathfrak{U}_\varepsilon(f)} \bigcup_{i\geq 0} \tilde{f}^i(x)} = \overline{\bigcup_{\tilde{f}\in \mathfrak{U}_\varepsilon(x)} O(x, \tilde{f})}.$$

Определение 6. *Будем говорить, что f-орбита точки $x \in X$ имеет устойчивую пролонгацию, если $D(x,f) = P(x,f)$.*

***Замечание* 3.** То, что f-орбита точки $x \in X$ имеет устойчивую пролонгацию, означает, что f-орбита является устойчивой при постоянно действующих возмущениях (см., например, [5]).

Определение 7. *Отображение f называется отображением с устойчивой пролонгацией орбит, если каждая f-орбита имеет устойчивую пролонгацию.*

3. Основные результаты. Пусть $\mathfrak{N}$ — подмножество $\mathfrak{M}$, состоящее из всех отображений с устойчивой пролонгацией орбит, $\mathfrak{N}_{\text{trac}}$ — подмножество $\mathfrak{M}$, состоящее из всех отображений с отслеживанием псевдотраекторий, $\mathfrak{N}^*_{\text{trac}}$ — подмножество $\mathfrak{M}$, состоящее из всех отображений с неравномерным отслеживанием псевдотраекторий.

Рассмотрим вопрос, как соотносятся между собой множества $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_{\text{trac}}$ и $\mathfrak{N}^*_{\text{trac}}$.

Теорема 1. *Имеет место цепочка строгих включений*

$$\mathfrak{N}_{\text{trac}} \subset \mathfrak{N}^*_{\text{trac}} \subset \mathfrak{N}. \tag{1}$$

Доказательство теоремы 1 мы проведем в несколько этапов.

Теорема 1А. *Имеет место строгое включение*

$$\mathfrak{N}_{\text{trac}} \subset \mathfrak{N}^*_{\text{trac}}. \tag{2}$$

Доказательство. Включение $\mathfrak{N}_{\text{trac}} \subseteq \mathfrak{N}^*_{\text{trac}}$ следует непосредственно из определений. То, что включение (2) строгое, показывает следующий пример.

***Пример* 1.** *Отображение замкнутого интервала действительной прямой в себя с устойчивой пролонгацией орбит, не являющееся отображением с отслеживанием псевдотраекторий, но являющееся отображением с неравномерным отслеживанием псевдотраекторий.*

Пусть $f(x) = x + g(x)$, $x \in I = [-1, 1]$ и

$$g(x) = \begin{cases} x^{r+2}(1-x) & \text{при } x \in [0,1]; \\ \dfrac{1}{2C}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{при } x \in [-1, 0), \end{cases}$$

где

$$C = \sup_{x\in[-1,0)} \left\{ \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \right\}.$$

Отображение f $(r+1)$-дифференцируемое, поскольку в точке $x = 0$, где „склеиваются" два аналитических куска, $f'(\pm 0) = 1$ и $f^{(i)}(\pm 0) = 0$ при $1 < i \leq$ $\leq r + 1$.

На интервале $[0, 1]$ отображение f имеет одну притягивающую точку $x = 1$, так как $x < f(x) < 1$ при $x \in (0, 1)$ и, следовательно, $f^n(x) \to 1$ при $n \to \infty$.

На интервале $[-1, 0)$ отображение f монотонно возрастающее, поскольку

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2Cx^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) > 0,$$

и имеет неподвижные точки $x_k = -1/k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$.

В точках $a_k = -1/(2k\pi)$, $k = 1, 2, \ldots$, $f'(a_k) > 1$ и в точках $b_k = -1/((2k + 1)\pi)$, $k = 0, 1, \ldots$, $f'(b_k) < 1$. Следовательно, f имеет чередующиеся отталкивающие a_k и притягивающие b_k неподвижные точки, которые сгущаются к точке 0; $f(x) > x$ при $x \in (a_k, b_k)$ и $f(x) < x$ при $x \in (b_k, a_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$.

Отображение f имеет следующие свойства:

1. Отображение f является отображением с устойчивой пролонгацией орбит. В частности, $D(x,f) = P(x,f) = O(x,f) \cup \{b_{k-1}\}$ при $x \in (a_{k-1}, a_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, $D(a_k,f) = P(a_k,f) = [b_{k-1}, b_k]$ при $k = 1, 2, \ldots$, $D(0,f) = P(0,f) = [0, 1]$, $D(x,f) = P(x,f) = O(x,f) \cup \{1\}$ при $x \in (0, 1]$.

2. Отображение f не является отображением с отслеживанием псевдотраекторий: найдется $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было ε, существует (ε, f)-траектория, начинающаяся в некоторой точке $x_0 \in X$, такая, что f-траектория, никакой точки $x \in U_\delta(x_0)$ не будет δ-отслеживать эту (ε, f)-траекторию.

Действительно, зафиксируем произвольно малое $\delta > 0$. Найдется k_0 такое, что $|a_{k+1} - a_k| < \delta$ при $k \geq k_0$. Положим $\varepsilon = a_{k_0+1} - a_{k_0}$.

Выберем произвольную точку x_0 из интервала $(-\gamma, 0)$, где $\gamma = \min\{\delta, \varepsilon\}/2$. f-Траектория $\mathcal{T}(x,f)$ любой точки $x \in U_\delta(x_0)$ будет лежать в интервале $(-\delta, 0)$. В то же время последовательность точек $y_0 = x_0$, $y_1 = \gamma/2$, $y_i = f^{i-1}(y_1)$ при $i > 1$ является (ε, f)-траекторией, так как $d(y_1, f(y_0)) < 2\gamma = \min\{\delta, \varepsilon\} \leq \varepsilon$, но она не может δ-отслеживаться f-траекторией никакой точки $x \in U_\delta(y_0)$, поскольку $\mathcal{T}(x,f) \subset (-\delta, 0)$, а $y_i \in (0, 1)$ при $i \geq 1$.

3. Отображение f является отображением с неравномерным отслеживанием псевдотраекторий. Чтобы показать это, достаточно для произвольных фиксированных x_0 и $\delta > 0$ выбрать $\varepsilon = \varepsilon(\delta, f, x_0) > 0$ таким образом, чтобы $\varepsilon < \min\{x_0 - a_k, a_{k+1} - x_0\}/2$ для $x_0 \in (a_k, a_{k+1})$. Тогда (ε, f)-траектория будет лежать в интервале $[a_k + \varepsilon, a_{k+1} - \varepsilon]$ и будет δ-отслеживаться некоторой f-траекторией.

Рассмотрим теперь отображения с неравномерным отслеживанием псевдотраекторий.

Теорема 1В. *Если* $f \in \mathfrak{N}^*_{\text{trac}}$, *то* $f \in \mathfrak{N}$.

Доказательство. Покажем, что $D(x_0,f) = P(x_0,f)$ для произвольной точки $x_0 \in X$.

Доказательство теоремы 1В проведем в несколько шагов.

Лемма 1. *Для произвольных* $f \in \mathfrak{M}$ *и* $x \in X$ *имеет место включение* $D(x, f) \subseteq P(x,f)$.

Покажем, что для каждой точки $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что $P_\varepsilon(x,f) \supseteq D_\eta(x,f)$.

1. Поскольку отображение f непрерывно (более того, C^r-гладкое) на ком-

пакте X, то оно и равномерно непрерывно, т. е. для любого $\gamma > 0$ найдется $\beta = \beta(\gamma) > 0$ такое, что если $d(x', x'') < \beta$, то $d(f(x'), f(x'')) < \gamma$, каковы бы ни были точки $x', x'' \in X$.

2. Пусть x_0 — произвольная точка X. Построим семейство специальных отображений, близких к f и отличных от f только в достаточно малой окрестности точки x_0.

Выберем и зафиксируем произвольное $\gamma > 0$. Из условия равномерной непрерывности f выберем соответствующее $\beta = \beta(\gamma) > 0$ и построим для каждой точки $\tilde{x} \in U_\beta(x_0)$ специальное отображение

$$f_{\tilde{x},\beta}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \notin U_\beta(x_0); \\ f(\tilde{x}) & \text{при } x = x_0; \\ f_\mu(x) & \text{при } x \in U_\beta(x_0) \setminus \{x_0\}, \end{cases}$$

где $f_\mu(x) = f_\mu(x, x_0, \beta)$ — функция, осуществляющая склейку соответствующей C^r-гладкости. Схема построения функции $f_\mu(x)$ имеется, например, в [6].

Приведем основные моменты построения такой функции. Пусть $(U_\beta(x_0), F)$ — карта такая, что $F(x_0) = 0$ и $U_\beta(x_0) \to \mathbb{R}^m$ (это возможно, так как $X \subset \subset \mathbb{R}^m$). Пусть $\eta > 0$ такое, что $U_{3\eta}(0) \subset F(U_\beta(x_0))$. Построим C^r-ретракцию множества $F(U_\beta(x_0))$, заданную формулой $q_h(y) = y + h\mu_\eta(\|y\|)$, где $h \in \mathbb{R}^m$, $\|y\| = \left(\sum_{i=1}^m y_i^2\right)^{1/2}$ — обычная евклидова норма в $\mathbb{R}^m$, $\mu_\eta(\tau)$ — C^∞-гладкая функция Урысона такая, что

$$\mu_\eta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \le \eta; \\ 0 < \mu_\eta(\tau) < 1 & \text{при } \eta < \tau < 2\eta; \\ 0 & \text{при } \tau \ge 2\eta. \end{cases}$$

Отображение q_h линейно зависит от h и является C^r-гомеоморфизмом, близким к тождественному. Зададим C^r-гомеоморфизм

$$Q_h = \begin{cases} id & \text{при } x \in X \setminus U_\beta(x_0); \\ F^{-1} \circ q_h \circ F & \text{при } x \in U_\beta(x_0), \end{cases}$$

порядок близости которого к тождественному определяется порядком малости $\|h\|$. И, наконец, отображение $f_\mu \big|_{x \in U_\beta(x_0) \setminus \{x_0\}} = Q_h \circ f \circ Q_h^{-1}$ требуемое, осуществляющее C^r-гладкую склейку.

3. Используя построенные специальные отображения, покажем, что пролонгация f-орбиты точки x_0 по начальной точке содержится в пролонгации f-орбиты точки x_0 по динамической системе.

Отображения $f_{\tilde{x},\beta}$, во-первых, принадлежат $\mathfrak{U}_\gamma(f)$, а во-вторых, имеют свойство

$$O(\tilde{x}, f) \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{J}_{\tilde{x},\beta}} O(x_0, f_{\tilde{x}_i,\beta}),$$

где $\mathcal{J}_{\tilde{x},\beta}$ — множество номеров итераций отображения $f_{\tilde{x},\beta}$ таких, что $f^i_{\tilde{x},\beta}(\tilde{x}) = \tilde{x}_i \in U_\beta(x_0)$ при $i \geq 0$ и при этом $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$. (Заметим также, что если $f^i_{\tilde{x},\beta}(\tilde{x}) \notin U_\beta(x_0)$ при любом $i > 0$, то $\mathcal{T}(\tilde{x}, f) = \mathcal{T}(x_0, f_{\tilde{x}_i,\beta})$, что следует из построения отображения $f_{\tilde{x},\beta}$.)

Используя определение множества $D_\beta(x_0, f)$ и приведенное выше включение, получаем

$$\overline{\bigcup_{\tilde{x}\in U_\beta(x_0)} O(\tilde{x}, f)} \subseteq \overline{\bigcup_{\tilde{x}\in U_\beta(x_0)} \left(\bigcup_{k\in \mathcal{J}_{\tilde{x},\beta}} O(x_0, f_{\tilde{x}_k,\beta}) \right)} = \overline{\bigcup_{\tilde{x}\in U_\beta(x_0)} O(x_0, f_{\tilde{x}_k,\beta})}.$$

Однако поскольку $f_{\tilde{x},\beta} \in \mathfrak{U}_\gamma(f)$ для любого $\tilde{x} \in U_\beta(x_0)$, то

$$\overline{\bigcup_{\tilde{x}\in U_\beta(x_0)} O(\tilde{x}, f_{\tilde{x}_k,\beta})} \subseteq \overline{\bigcup_{\tilde{f}\in \mathfrak{U}_\gamma(f)} O(x_0, \tilde{f})} = P_\gamma(x_0, f).$$

Тогда

$$P(x_0, f) = \bigcap_{\gamma>0} P_\gamma(x_0, f) \supseteq \bigcap_{\beta=\beta(\gamma)} D_\beta(x_0, f) \supseteq \bigcap_{\eta>0} D_\eta(x_0, f) = D(x_0, f).$$

Таким образом, мы показали, что $D(x_0, f) \subseteq P(x_0, f)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $f \in \mathfrak{N}^*_{\mathrm{trac}}$, *то* $D(x, f) \supseteq P(x, f)$ *для каждой точки* $x \in X$.

Пусть x_0 — произвольная точка X.

1. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Для пары — точки $x_0 \in X$ и выбранного $\delta > 0$ — существует, согласно определению неравномерного отслеживания псевдотраекторий, число $\varepsilon = \varepsilon(\delta, f, x_0) > 0$ такое, что для каждой (ε, f)-траектории, начинающейся в точке x_0, найдется f-траектория, которая δ-отслеживает эту (ε, f)-траекторию.

2. Покажем, что произвольная (ε, f)-траектория, начинающаяся в точке x_0, содержится в δ-окрестности f-орбит точек из δ-окрестности точки x_0.

Пусть $\{x_i\}_{i=0}^n$, $n < \infty$, — произвольная (ε, f)-траектория, начинающаяся в точке x_0. Поскольку f — отображение с неравномерным отслеживанием псевдотраекторий, найдется некоторая точка $x \in X$ такая, что $x_i \in U_\delta(f^i(x))$ при всех $i \geq 0$. При этом $x_0 \in U_\delta(x)$, так что и $x \in U_\delta(x_0)$. Тогда

$$\bigcup_{i=0}^n \{x_i\} \subsetneq \bigcup_{i=0}^n U_\delta(f^i(x)) \subseteq U_\delta(O(x, f)),$$

т. е.

$$\bigcup_{i=0}^n \{x_i\} \subseteq U_\delta(O(x, f))$$

для некоторой точки $x \in U_\delta(x_0)$. Тогда тем более имеем

$$\bigcup_{i=0}^n \{x_i\} \subseteq U_\delta\left(\bigcup_{\tilde{x}\in U_\delta(x_0)} O(\tilde{x}, f) \right).$$

3. Построим семейство отображений, ε-близких к f и отличных от f только в достаточно малой окрестности (ε, f)-траектории.

Обозначим через $\mathcal{A}_\varepsilon(x_0)$ множество всех (ε, f)-траекторий, начинающихся в точке x_0. Пусть $\alpha = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ — произвольный элемент множества $\mathcal{A}_\varepsilon(x_0)$. Построим отображение $g_{\alpha,\varepsilon}$, следующим образом:

$$g_{\alpha,\varepsilon}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in X \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n} U_\varepsilon(f(x_i)); \\ x_{i+1} & \text{при } x = x_i,\ 0 \le i \le n-1; \\ f_\mu(x) & \text{при } x \in \left\{ \bigcup\limits_{i=0}^{n} U_\varepsilon(f(x_i)) \right\} \setminus \left\{ x_i \right\}_{i=0}^{n}, \end{cases}$$

где $f_\mu(x)$ — функция, осуществляющая склейку соответствующей C^r-гладкости, построенная как и в аналогичном случае при доказательстве леммы 1.

4. Используя построенные специальные отображения $g_{\alpha,\varepsilon}$, покажем, что пролонгация f-орбиты точки x_0 по динамической системе содержится в пролонгации f-орбиты точки x_0 по начальной точке.

По построению $g_{\alpha,\varepsilon} \in \mathfrak{U}_\varepsilon(f)$, поскольку наибольшее отклонение от f отображение $g_{\alpha,\varepsilon}$ имеет в точках (ε, f)-траектории, а для этих точек $x_{i+1} \in \in U_\varepsilon(f(x_i))$ (по определению (ε, f)-траектории).

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_\varepsilon(x_0)} O(x_0, g_{\alpha,\varepsilon}) \subseteq U_\delta\left(\bigcup_{\tilde{x} \in U_\delta(x_0)} O(\tilde{x}, f) \right) \subseteq$$

$$\subseteq U_\delta\left(\overline{\bigcup_{\tilde{x} \in U_\delta(x_0)} O(\tilde{x}, f)} \right) = U_\delta(D_\delta(x_0, f)).$$

Для любой (ε, f)-траектории можно построить соответствующее отображение $g_{\alpha,\varepsilon} \in \mathfrak{U}_\varepsilon(f)$ и для каждого $\tilde{f} \in \mathfrak{U}_\varepsilon(f)$ можно выбрать (ε, f)-траекторию, которая является траекторией отображения $\tilde{f}$.

Таким образом, перебрав все (ε, f)-траектории, начинающиеся в точке x_0, получим все отображения $\tilde{f} \in \mathfrak{U}_\varepsilon(f)$.

Тогда получим

$$\bigcup_{\tilde{f} \in \mathfrak{U}_\varepsilon(f)} O(x_0, \tilde{f}) \subseteq U_\delta(D_\delta(x_0, f)).$$

Далее

$$P_\varepsilon(x_0, f) = \overline{\bigcup_{\tilde{f} \in \mathfrak{U}_\varepsilon(f)} O(x_0, \tilde{f})} \subseteq \overline{U_\delta(D_\delta(x_0, f))}.$$

Значит,

$$\bigcap_{\delta > 0} \overline{U_\delta(D_\delta(x_0, f))} \supseteq \bigcap_{\varepsilon = \varepsilon(\delta, f, x_0)} P_\varepsilon(x_0, f) \supseteq$$

$$\supseteq \bigcap_{\eta > 0} P_\eta(x_0, f) = P(x_0, f).$$

Поскольку последовательность $\overline{U_\delta(D_\delta(x_0, f))}$ такова, что если $\delta' < \delta''$, то $\overline{U_{\delta'}(D_{\delta'}(x_0, f))} \subset \overline{U_{\delta''}(D_{\delta''}(x_0, f))}$ (т. е. это последовательность вложенных множеств), то устремляя $\delta \to 0$ получаем

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{U_\delta(D_\delta(x_0, f))} = \bigcap_{\delta>0} D_\delta(x_0, f) = D(x_0, f).$$

Следовательно, имеем включение $D(x_0, f) \supseteq P(x_0, f)$. Лемма 2 доказана.

Из включений $P(x_0, f) \supseteq D(x_0, f)$ и $D(x_0, f) \supseteq P(x_0, f)$ следует равенство $D(x_0, f) = P(x_0, f)$ для произвольной точки $x_0 \in X$.

Таким образом, получаем, что отображение f является отображением с устойчивой пролонгацией орбит. Теорема 1В доказана.

Теорема 1С. *Имеет место строгое включение*

$$\mathfrak{N}^*_{\text{trac}} \subset \mathfrak{N}. \tag{3}$$

Это утверждение доказывает следующий пример.

Пример 2. *Отображение замкнутого интервала действительной прямой в себя с устойчивой пролонгацией орбит, не являющееся отображением с неравномерным отслеживанием псевдотраекторий.*

Пусть $I = [-1, 1]$ и $f(x) = -\sin 2\pi x$.

Отображение $f\colon I \to I$ имеет следующие свойства:

1. Отображение f является отображением с устойчивой пролонгацией орбит, поскольку $D(x, f) = P(x, f) = [-1, 1]$ для всех $x \in [-1, 1]$.

2. Возьмем произвольное $\delta < 1/2$. На интервале $[0, \delta]$ выберем произвольную точку x_1. Пусть точка $x_0 \in [-1, -1 + \delta]$ является прообразом точки x_1. Положим $\varepsilon = \delta/2$. Пусть $y_1 \in [x_1 - \varepsilon, 0]$. Построим (ε, f)-траекторию $\{y_i\}_{i=0}^n$, $n < \infty$, следующим образом: $y_0 = x_0$, $y_i = f^{i-1}(y_1)$ для $i > 1$. Тогда для $i > 2$ и всех $x \in U_\delta(x_0)$ точки $f^i(x)$ и y_i будут лежать соответственно в интервалах $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ при четном i, и соответственно в интервалах $(0, 1)$ и $(-1, 0)$ при нечетном i, и, следовательно, (ε, f)-траектория $\{y_i\}_{i=0}^n$ не будет δ-отслеживаться f-траекторией никакой точки $x \in U_\delta(y_0)$.

***Замечание* 4.** Следует отметить, что отображение $g = f^2$ не является отображением с устойчивой пролонгацией орбит, поскольку $D(x, g) = [-1, 0]$ для всех $x \in [-1, 0)$, $D(x, g) = [0, 1]$ для всех $x \in (0, 1]$, а $P(x, g) = [-1, 1]$ для всех $x \in [-1, 1]$.

Объединение теорем 1А –1С дает доказательство теоремы 1.

4. Заключение. Сформулируем несколько вопросов, ответы на которые в настоящий момент нам неизвестны.

Построенное в примере 2 отображение не является отображением с отслеживанием псевдотраекторий, но является отображением с устойчивой пролонгацией орбит, а отображение, задаваемое его второй итерацией, не является отображением с устойчивой пролонгацией орбит. Возможно, что „потеря устойчивости пролонгации орбит при переходе к итерациям отображений" — свойство, не характерное для большинства систем. Это соображение приводит к формулировке следующих вопросов.

Обозначим $\mathfrak{N}^\infty = \{ f \in \mathfrak{N} \mid g = f^k \in \mathfrak{N}$ при любых $k \in \mathbb{Z}^+ \}$.

Вопрос. 1 *Верно ли, что множество* $\mathfrak{N}^\infty$ *является множеством второй категории в пространстве отображений* $\mathfrak{M}$?

Вопрос 2. *Верно ли, что* $\mathfrak{N}^\infty = \mathfrak{N}^*_{\text{trac}}$?

Если бы ответы на вопросы 1, 2 оказались утвердительными, мы получили бы положительный ответ на вопрос о типичности отображений, имеющих свойство отслеживания псевдотраекторий, сформулированный в начале настоящей работы.

Вопрос 3. *Является ли множество* $\mathfrak{N}_{\mathrm{trac}}$ *или, по крайней мере, множество* $\mathfrak{N}^*_{\mathrm{trac}}$ *множеством второй категории в пространстве отображений* $\mathfrak{M}$?

1. *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям (25 августа – 4 сентября 1969 г.). – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. – Т. 2. – С. 39–45.
2. *Аносов Д. В., Арансон С. Х., Гринес В. З. и др.* Динамические системы с гиперболическим поведением // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1991. – **66**. – С. 5–247.
3. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems // Encycl. Math. and its Appl. – Cambridge Univ. press, 1995. – **54**. – 802 p.
4. *Шарковский А. Н.* Устойчивость траекторий и динамических систем в целом // IX летняя мат. школа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 349–360.
5. *Добрынский В. А., Шарковский А. Н.* Типичность динамических систем, почти все траектории которых устойчивы при постоянно действующих возмущениях // Докл. АН СССР. – 1973. – **211**, № 2. – С. 273–276.
6. *Добрынский В. А.* Типичность динамических систем с устойчивой пролонгацией // Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 43–53.
7. *Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З.* Гладкие динамические системы. II. // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1985. – **1**. – С. 151–241.
8. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1949. – 448 с.
9. *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index // Conf. Board Math. Sci., Reg. Conf. Ser. Math. – Providence: Amer. Math. Soc., 1978. – **38**. – 89 p.
10. *Бронштейн И. У., Бурдаев В. П.* Цепная рекуррентность и расширения динамических систем // Алгебраические инварианты динамических систем (Мат. исслед., Вып. 55). – Кишинев: Штиинца, 1980. – С. 3–11.
11. *Верейкина М. Б., Шарковский А. Н.* Множество почти возвращающихся точек динамической системы // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 1. – С. 6–9.

Получено 28.05.97