УДК 519.41/47

О. Ю. Дашкова (Днепропетр. ун-т)

ГРУППЫ КОНЕЧНОГО НЕАБЕЛЕВА СЕКЦИОННОГО РАНГА

We study the non-Abelian locally finite groups and the non-Abelian locally solvable groups of finite non-Abelian sectional rank and prove that their (special) rank is finite.

Вивчаються неабелеві локально скінченні і неабелеві локально розв'язні групи скінченного неабелевого секційного рангу і доводиться, що їх (спеціальний) ранг скінченний.

В [1] было введено понятие *неабелева секционного ранга группы.* Под секцией группы G всюду будем понимать фактор-группу A/B, где A и B — неединичные подгруппы группы G и подгруппа B нормальна в A. Напомним, что неабелев секционный ранг неабелевой группы G — это такое наименьшее число r, для которого любая неабелева конечнопорожденная секция группы G может быть порождена не более чем r элементами. Если все секции неабелевой группы G абелевы, неабелев секционный ранг группы G полагают равным 0. В случае, когда G имеет хотя бы одну неабелеву секцию и числа r с указанными свойствами не существует, неабелев секционный ранг группы G считается бесконечным. Для неабелева секционного ранга группы G использовалось обозначение $\overline{r}_c(G)$. Символами $r(G)$ и $r_0(G)$ обозначаются, как это общепринято, специальный ранг и 0-ранг группы G соответственно.

Конечность неабелева секционного ранга группы влечет конечность ее (специального) ранга в классах неабелевых локально нильпотентных групп [1] и неабелевых разрешимых групп [2]. Цель настоящей статьи — доказать подобное утверждение для неабелевой локально конечной группы и неабелевой локально разрешимой группы.

Теорема 1. *Неабелева локально конечная группа конечного неабелева секционного ранга имеет конечный* (*специальный*) *ранг.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай неабелевой периодической локально разрешимой группы G конечного неабелева секционного ранга $\overline{r}_c(G)$. Предположим, что ранг группы G бесконечен. Согласно [3, 4], в G для произвольной конечной неабелевой подгруппы $L \leq G$ найдется подгруппа вида AL, где A — абелева подгруппа бесконечного ранга, нормализуемая подгруппой L. Согласно теореме [2], примененной к разрешимой группе AL, с учетом конечности $\overline{r}_c(G)$ получаем, что ранг подгруппы A конечен. Противоречие. Следовательно, ранг группы G конечен.

Перейдем теперь к рассмотрению неабелевой локально конечной группы G конечного неабелева секционного ранга $\overline{r}_c(G)$. Покажем, что силовские p-подгруппы группы G по любому простому числу p черниковские. Предположим, что группа G имеет нечерниковскую силовскую p-подгруппу по некоторому простому числу p. Тогда в группе G можно найти счетную неабелеву подгруппу K, имеющую нечерниковскую силовскую p-подгруппу. Представим K в виде объединения возрастающей последовательности конечных групп: $K_1 < K_2 < \ldots < K_i < \ldots < \ldots$, $\bigcup_i K_i = K$, и построим в K проекционную силовскую p-подгруппу P [5]. Подгруппа P является объединением конечных подгрупп $P_i = P \bigcap K_i$. Так как K имеет нечерниковскую силовскую p-подгруппу, то ее проекционная силовская p-подгруппа P также должна быть нечерниковской. Заметим, что в силу рассуждений, проведенных в случае локально разрешимой периодической группы, подгруппа P абелева. Ранг $r(P)$ подгруппы P бесконечен, поэтому ранги конечных подгрупп P_i неограниченно возрастают.

Найдется такой номер i, что подгруппа K_i неабелева и $r(P_i) > \bar{r}_c(G) + 4$. Отсюда вытекает, что для любого номера j, $j \geq i$, справедливо неравенство

$$r(P_j) > \bar{r}_c(G) + 4. \tag{1}$$

Предположим сначала, что найдется номер j, $j \geq i$, такой, что подгруппа P_j не содержится в центре нормализатора $N_{K_j}(P_j)$. Тогда можно указать элемент $h \in N_{K_j}(P_j)$, для которого подгруппа $P_j\langle h\rangle$ неабелева.

Выберем номер l, $l > j$, для которого

$$r(P_l) > (\bar{r}_c(G) + 1)n + 1, \tag{2}$$

где n — порядок элемента h. Если $P_l \neq P_l^h$, то подгруппа $\langle P_l, P_l^h\rangle$, порожденная двумя силовскими p-подгруппами группы K_l, неабелева. Поскольку подгруппы P_l, P_l^h абелевы и подгруппа $P_j = P_j^h$ содержится в их пересечении, то P_j центральна в $\langle P_l, P_l^h\rangle$, и поэтому согласно лемме 1 [2] $r(P_j) \leq \bar{r}_c(G) + 4$. Противоречие с (1). Следовательно, $P_l = P_l^h$ и элемент h принадлежит нормализатору $N_{K_l}(P_l)$. С учетом неравенства (2) и леммы 1 [2] получаем, что нижний слой B подгруппы P_l нецентрален в группе $P_l\langle h\rangle$. Для произвольного неединичного элемента $b \in B$ обозначим через B_0 нормальное замыкание $\langle b\rangle^{\langle h\rangle}$ и рассмотрим фактор-группу $B\langle h\rangle / B_0$. Если она неабелева, то согласно лемме 4 [6] $r(B/B_0) \leq \bar{r}_c(G)n + 1$, и поэтому с учетом равенства $r(B) = r(P_l)$ получаем соотношение $r(P_l) \leq (\bar{r}_c(G) + 1)n + 1$. Противоречие с (2). Следовательно, фактор-группа $B\langle h\rangle / B_0$ абелева. Из неравенства (2) вытекает, что $|B| > 3np$, откуда с учетом соотношения $|B_0| \leq np$ получаем $|B/B_0| > np$. Следовательно, в подгруппе B найдутся такие элементы b_1 и b_2, что b_1, b_2 и $b_1b_2^{-1}$ не содержатся в подгруппе B_0 и выполняются равенства $b_1^h = b_1b_0$, $b_2^h = b_2b_0$, где b_0 — некоторый элемент подгруппы B_0, откуда вытекает, что элемент $b_1b_2^{-1}$ централен в группе $B\langle h\rangle$. Из выбора $b_1b_2^{-1}$ следует, что фактор-группа $B\langle h\rangle / \langle b_1b_2^{-1}\rangle$ неабелева, и поэтому с учетом леммы 4 [6] $r(B) \leq \bar{r}_c(G)n + 2$. С учетом равенства $r(B) = r(P_l)$ получаем соотношение $r(P_l) \leq \bar{r}_c(G)n + 2 < \bar{r}_c(G)(n+1) + 1$. Противоречие с (2). Следовательно, подгруппа P_j содержится в центре нормализатора $N_{K_j}(P_j)$ для любого $j \geq i$.

Согласно теореме Бернсайда [7, с. 227] в K_j существует нормальная подгруппа M_j, для которой справедливо равенство $K_j = M_j \leftthreetimes P_j$. Так как фактор-группа K_{j+1}/M_{j+1} является p-группой, то и ее неединичная подгруппа K_jM_{j+1}/M_{j+1} является p-группой. С учетом изоморфизма $K_jM_{j+1}/M_{j+1} \simeq K_j/K_j \cap M_{j+1}$ и того, что M_j — наименьшая нормальная подгруппа, определяющая в группе K_j p-фактор-группу, получаем включение $M_j \leq K_j \cap M_{j+1}$. Отсюда следует, что $M_j \leq M_{j+1}$. Обозначим через M объединение $\bigcup_i M_i$. Подгруппа M нормальна в K, причем $MP = K$ и $M \cap P = 1$, следовательно, справедливо равенство $K = M \leftthreetimes P$. Отсюда вытекает, что фактор-группа K/M — абелева p-группа, а подгруппа M не содержит элементов порядка p, и поэтому $K' \leq M$ и $p \notin \pi(K')$.

Покажем, что для любого простого числа $q \in \pi(K')$ силовские q-подгруппы группы K' черниковские. Предположим, что найдется такое простое число

$q_0 \in \pi(K')$, что K' имеет нечерниковскую силовскую q_0-подгруппу. Тогда и группа K имеет нечерниковскую силовскую q_0-подгруппу, и поэтому справедливы те же рассуждения, что и в случае нечерниковской силовской p-подгруппы. В результате этих рассуждений получим равенство $K = D \leftthreetimes Q$, где Q — абелева силовская q_0-подгруппа группы K, а подгруппа D не содержит элементов порядка q_0. Отсюда вытекает, что $K' \le D$ и $q_0 \notin \pi(K')$. Противоречие с выбором простого числа q_0. Поэтому для любого простого числа $q \in \in \pi(K')$ силовские q-подгруппы группы K' черниковские. Следовательно, K' — группа с черниковскими силовскими q-подгруппами для всех простых чисел q, и в силу [8, 9] группа K' почти локально разрешима. Обозначим через S локально разрешимый радикал группы K'. Подгруппа S характеристична в K' и имеет в K' конечный индекс. Следовательно, фактор-группа K/S является группой с конечным коммутантом, и согласно лемме 6 из [10] K/S является почти метабелевой или почти абелевой группой. Отсюда получаем, что группа K почти локально разрешима, т. е. содержит нормальную локально разрешимую подгруппу H конечного индекса. Если подгруппа H неабелева, то согласно рассуждениям, проведенным в случае локально разрешимой периодической группы конечного неабелева секционного ранга, ранг $r(H)$ конечен, и поэтому конечен ранг группы K. Если подгруппа H абелева и центральна в группе K, то с учетом леммы 1 [2] получаем конечность ранга $r(K)$. В случае нецентральной абелевой подгруппы H найдется такой элемент $g \in K$, для которого подгруппа $H\langle g \rangle$ неабелева. Согласно теореме [2] ранг разрешимой группы $H\langle g \rangle$ конечен. Следовательно, конечен ранг группы K. Из конечности ранга группы K вытекает конечность ранга силовской p- подгруппы P. Противоречие.

Таким образом, доказано, что в группе G все силовские p-подгруппы по любому простому числу p черниковские. Из [8, 9] следует, что группа G почти локально разрешима. Согласно рассуждениям, проведенным ранее, ранг группы G конечен. Теорема доказана.

Доказательству теоремы 2 предпошлем следующую лемму.

Лемма. *Если неабелева группа G конечного неабелева секционного ранга содержит нормальную нильпотентную подгруппу A без кручения, для которой фактор-группа G/A абелева, то выполняется неравенство $r(G/A) \le \le \bar{r}_c(G) + 1$.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай абелевой подгруппы A. Действительно, в случае неабелевой подгруппы A в нильпотентной группе A без кручения можно указать такие две характеристические подгруппы A_1 и A_2, что $A_2 < A_1$, фактор-группа G/A_2 неабелева, а фактор-группа G/A_1 абелева, причем подгруппа $A_1/A_2 < G/A_2$ абелева и не имеет кручения. Задача сводится к установлению неравенства $r(G/A_1) \le \le \bar{r}_c(G) + 1$, из которого непосредственно следует справедливость леммы. Поэтому в дальнейшем будем считать, что подгруппа A абелева.

Предположим, что $r(G/A) > \bar{r}_c(G) + 1$. Рассмотрим сначала случай, когда подгруппа A содержится в центре $Z(G)$ группы G. В G можно выбрать конечнопорожденную неабелеву подгруппу B, для которой справедливо неравенство

$$r(BA/A) > \bar{r}_c(G) + 1. \tag{3}$$

Поскольку подгруппа A не имеет кручения и $A \le Z(G)$, то найдется неединичный элемент $a \in A$, для которого конечнопорожденная фактор-группа

$B\langle a\rangle/\langle a\rangle$ неабелева, и поэтому может быть порождена не более чем $\bar{r}_c(G)$ элементами. Следовательно, подгруппа B имеет систему порождающих, состоящую не более чем из $\bar{r}_c(G)+1$ элементов, и поэтому справедливо неравенство $r(BA/A) \leq \bar{r}_c(G)+1$. Противоречие с (3). Следовательно, $r(G/A) \leq \leq \bar{r}_c(G)+1$.

Если подгруппа A нецентральна в G, то в G можно выбрать такую конечнопорожденную неабелеву подгруппу D, для которой

$$r(DA/A) > \bar{r}_c(G), \tag{4}$$

и полициклическая группа автоморфизмов $D/C_D(D \cap A)$ действует в $D \cap A$ нетождественно. Из доказательства леммы 5 [6] следует, что в $D \cap A$ существует периодический $D/C_D(D \cap A)$-фактор $(D \cap A)/F$, в котором $D/C_D(D \cap \cap A)$ действует нетождественно. Секция D/F неабелева и конечно порождена, откуда ввиду конечности $\bar{r}_c(G)$ вытекает, что D/F имеет систему порождающих, состоящую не более чем из $\bar{r}_c(G)$ элементов. Следовательно, для абелевой секции DA/A, которая изоморфна $(D/F)/((D \cap A)/F)$, справедливо неравенство $r(DA/A) \leq \bar{r}_c(G)$. Противоречие с (4). Тем самым установлено, что $r(G/A) \leq \bar{r}_c(G)+1$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Неабелева локально разрешимая группа конечного неабелева секционного ранга имеет конечный (специальный) ранг.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда периодический радикал T локально разрешимой группы G конечного неабелева секционного ранга отличен от единицы. Если подгруппа T неабелева, то согласно теореме 1 ее ранг конечен. В случае центральной подгруппы T согласно лемме 1 [2] $r(T) \leq \leq \bar{r}_c(G)+4$. Если подгруппа T абелева и $T \not\leq Z(G)$, найдется элемент $g \in G$, для которого подгруппа $T\langle g\rangle$ неабелева, и согласно теореме [2] ранг $r(T)$ конечен.

Докажем теперь конечность ранга фактор-группы G/T. Если она неабелева, то согласно теореме 4 [11] с учетом конечности ранга $r(T)$ получаем конечность ранга группы G. Если фактор-группа G/T абелева, то в случае абелевой подгруппы T группа G разрешима, и согласно [2] ранг $r(G)$ конечен. Остается рассмотреть случай, когда подгруппа T неабелева, а фактор-группа G/T абелева. Как известно, периодическая локально разрешимая группа конечного ранга имеет возрастающий характеристический ряд с конечными факторами [3]. Следовательно, в G существует конечная неединичная характеристическая подгруппа T_1. В случае абелевой фактор-группы G/T_1 группа G разрешима, и согласно теореме [2] ранг $r(G)$ конечен. Если фактор-группа G/T_1 неабелева, с учетом теоремы 4 [11] имеем, что ранг группы G конечен.

Перейдем к рассмотрению случая, когда периодический радикал T равен единице. Если G_1 и G_2 — некоторые конечнопорожденные неабелевы подгруппы группы G, $G_1 \leq G_2$, то согласно [2] ранги $r(G_1)$ и $r(G_2)$ конечны, откуда с учетом [12, 13] получаем, что G_1 и G_2 минимаксны. Согласно [14], в G_1 и G_2 имеются нормальные делимые абелевы черниковские подгруппы D_1 и D_2 такие, что фактор-группы G_1/D_1 и G_2/D_2 содержат подгруппы конечного индекса, имеющие конечные рациональные ряды. Отсюда следует, что $D_1 \leq D_2$, и поэтому объединение делимых частей всех конечнопорожденных подгрупп группы G является ее периодической абелевой нормальной подгруппой. Поскольку периодический радикал T тривиален, то подгруппы D_1 и D_2 единичны.

Покажем, что 0-ранги конечнопорожденных подгрупп группы G ограничены в совокупности. Достаточно доказать, что 0-ранги конечнопорожденных подгрупп некоторой локальной системы группы G ограничены в совокупности. Рассмотрим сначала случай, когда G имеет локальную систему $\mathfrak{M}$, состоящую из неабелевых конечнопорожденных почти абелевых подгрупп.

Пусть M — некоторая подгруппа из $\mathfrak{M}$. Для произвольной подгруппы H из $\mathfrak{M}$ через H_1 обозначим подгруппу, порожденную H и M. Предположим, что в $\mathfrak{M}$ найдется подгруппа H, для которой выполняется неравенство

$$r_0(H) > \bar{r}_c(G) + 4. \tag{5}$$

Если такой подгруппы не существует, то 0-ранг любой подгруппы из $\mathfrak{M}$ ограничен величиной $\bar{r}_c(G) + 4$.

Пусть A — абелева нормальная подгруппа из H, имеющая в H конечный индекс. Ввиду рассуждений, проведенных выше, можно считать, что A не имеет кручения. Из соотношения (5) и леммы 1 [2] следует, что A нецентральна в H, поэтому найдется такой элемент $h \in H$, что подгруппа $A\langle h\rangle$ неабелева, причем $h^n \in A$ для некоторого $n > 1$. Подгруппа H_1 является конечным расширением некоторой своей абелевой подгруппы A_1 без кручения. Покажем, что подгруппа $A_1\langle h^n\rangle$ абелева. Действительно, так как $h^n \in A$, то $A \cap A_1 \leq$ $\leq Z(A_1\langle h^n\rangle)$, поэтому, ввиду леммы 1 [2], неабелевость подгруппы $A_1\langle h^n\rangle$ приводит к соотношению $r_0(A \cap A_1) \leq \bar{r}_c(G) + 4$. Отсюда с учетом конечности индексов $|H : A|$, $|A : A \cap A_1|$ получаем неравенство $r_0(H) \leq \bar{r}_c(G) + 4$, противоречащее (5). Следовательно, подгруппа $A_1\langle h^n\rangle$ абелева. Вместе с этим подгруппа $A_1\langle h\rangle$ неабелева, так как в противном случае $A \cap A_1 \leq Z(A\langle h\rangle)$, причем по построению подгруппа $A\langle h\rangle$ неабелева. Отсюда в силу леммы 1 [2] следует, что $r_0(A \cap A_1) \leq \bar{r}_c(G) + 4$, а это, как уже говорилось выше, невозможно.

Рассмотрим теперь неабелеву подгруппу $A_1\langle h\rangle$. Для произвольного неединичного элемента $a \in A_1$ обозначим через A_0 нормальное замыкание $\langle a\rangle^{\langle h\rangle}$. Поскольку подгруппа $A_1\langle h^n\rangle$ абелева, выполняется соотношение $r(A_0) \leq n$. Если фактор-группа $A_1\langle h\rangle / A_0$ неабелева, то с учетом лемм 5 [11] и 4 [6] получаем $r(A_1 / A_0) \leq \bar{r}_c(G)n + 1$, откуда следует неравенство

$$r(A_1) \leq (\bar{r}_c(G) + 1)n + 1. \tag{6}$$

В случае абелевой фактор-группы $A_1\langle h\rangle / A_0$ согласно лемме $r(A_1\langle h\rangle / A_0) \leq$ $\leq \bar{r}_c(G) + 1$ и поэтому

$$r(A_1) \leq \bar{r}_c(G) + n + 1. \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) вытекает соотношение

$$r_0(M) \leq r_0(H_1) = r_0(A_1) \leq r(A_1) \leq (\bar{r}_c(G) + 1)n + 1.$$

Тем самым установлено, что в рассматриваемом случае 0-ранги конечнопорожденных подгрупп ограничены в совокупности.

Рассмотрим теперь случай, когда G имеет локальную систему $\mathfrak{L} = \{G_\alpha\}$, состоящую из неабелевых конечнопорожденных подгрупп, не являющихся почти абелевыми. Все подгруппы системы $\mathfrak{L}$ разобьем на 2 класса: к первому классу отнесем те G_α, каждая из которых содержит нормальную подгруппу H_α без кручения конечного индекса, являющуюся метабелевой; ко второму — подгруппы G_α, каждая из которых содержит нормальную подгруппу H_α без кручения конечного индекса, ступень разрешимости которой больше 2, и не содержит метабелевых подгрупп без кручения конечного индекса. Один из этих классов составит локальную систему $\mathfrak{L}'$ группы G.

Предположим сначала, что локальная система $\mathfrak{L}'$ такова, что каждая подгруппа G_α содержит нормальную подгруппу H_α без кручения конечного индекса, ступень разрешимости которой больше 2, и не содержит метабелевых подгрупп без кручения конечного индекса. Согласно теореме 5 [15] любая подгруппа H_α имеет инвариантный ряд $1 < R_\alpha < F_\alpha < H_\alpha$, где R_α— локально нильпотентный радикал группы H_α, фактор-группа F_α / R_α — свободная абелева конечного ранга, а H_α / F_α — конечна. Поскольку группа G_α не содержит метабелевых подгрупп конечного индекса, ступень разрешимости подгруппы F_α больше 2, откуда вытекает, что подгруппа R_α неабелева. Так как подгруппа R_α является локально нильпотентной группой без кручения конечного ранга, то согласно теореме 2 [16] она нильпотентна, и согласно лемме справедливо неравенство

$$r(F_\alpha / R_\alpha) \leq \bar{r}_c(G) + 1. \tag{8}$$

Если подгруппа R_α двуступенно нильпотентна и ранг ее центра Z_α равен 1, то согласно лемме справедливо неравенство $r(R_\alpha / Z_\alpha) \leq \bar{r}_c(G) + 1$, откуда с учетом (8) вытекает соотношение

$$r(F_\alpha) \leq 2\bar{r}_c(G) + 3. \tag{9}$$

В случае, когда подгруппа R_α не удовлетворяет указанным условиям, в ней можно указать неединичную нормальную подгруппу S_α ранга 1, для которой фактор-группа R_α / S_α неабелева и не имеет кручения. Из теоремы 1.1 [17] вытекает, что $r(R_\alpha / S_\alpha) \leq \bar{r}_c(G)$, и поэтому справедливо соотношение $r(R_\alpha) \leq$ $\leq \bar{r}_c(G) + 1$, откуда с учетом (8) следует неравенство

$$r(F_\alpha) \leq 2\bar{r}_c(G) + 2. \tag{10}$$

Из (9) и (10) с учетом конечности индексов $|G_\alpha : H_\alpha|$, $|H_\alpha : F_\alpha|$ получаем $r_0(G_\alpha) \leq 2\bar{r}_c(G) + 3$. Тем самым установлено, что 0-ранги подгрупп G_α из $\mathfrak{L}'$ ограничены в совокупности.

Осталось рассмотреть случай, когда локальная система $\mathfrak{L}'$ состоит из подгрупп G_α, каждая из которых содержит нормальную подгруппу H_α без кручения конечного индекса, являющуюся метабелевой. Согласно лемме $r(H_\alpha / K_\alpha) \leq \bar{r}_c(G) + 1$, где K_α — коммутант подгруппы H_α. Чтобы доказать ограниченность в совокупности 0-рангов подгрупп G_α, достаточно установить, что ранги подгрупп K_α ограничены в совокупности. Предположим противное. Выберем в локальной системе $\mathfrak{L}'$ подгруппу G_{α_1}, для которой

$$r(K_{\alpha_1}) > 2\bar{r}_c(G) + 5. \tag{11}$$

Рассмотрим все подгруппы системы $\mathfrak{L}'$, содержащие подгруппу G_{α_1}. Эти подгруппы составят некоторую локальную систему $\mathfrak{L}'_1$ группы G. Если ранги

$r(K_\alpha)$ подгрупп K_α из G_α, где $G_\alpha \in \mathfrak{L}'_1$, не ограничены в совокупности, то выберем подгруппу G_{α_2} такую, что $r(K_{\alpha_2}) > r(K_{\alpha_1})$, и локальную систему $\mathfrak{L}'_2$, все подгруппы которой содержат подгруппу G_{α_2}. Продолжая аналогичные рассуждения, мы либо найдем локальную систему $\mathfrak{L}'_n$ подгрупп группы G такую, что ранги $r(K_\alpha)$ ограничены в совокупности, либо построим ряд вложенных подгрупп $G_{\alpha_1} < G_{\alpha_2} < \ldots < G_{\alpha_t} < \ldots$, имеющий следующие свойства: подгруппы K_{α_t} нормальны в G_{α_t}, ранги $r(K_{\alpha_t})$ неограниченно возрастают, и ввиду выбора системы $\mathfrak{L}'_t$ подгруппы K_{α_r}, $r \le t$, содержатся в нормализаторе $N_{G_{\alpha_t}}(K_{\alpha_t})$. Следовательно, произведение $K = K_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot K_{\alpha_t} \cdot \ldots$ является подгруппой группы G и ранг $r(K)$ бесконечен. В случае абелевой подгруппы K рассмотрим неабелеву подгруппу KG_{α_1}. Подгруппа KG_{α_1} разрешима, и согласно теореме [2] ее ранг конечен, откуда следует конечность ранга подгруппы K. Противоречие. Следовательно, подгруппа K неабелева, и можно указать такие две подгруппы K_{α_i} и K_{α_j}, $i<j$, что подгруппа $K_{\alpha_i} \cdot K_{\alpha_j}$ является неабелевой. Согласно лемме, примененной к группе $K_{\alpha_i} \cdot K_{\alpha_j}$, с учетом изоморфизма

$$K_{\alpha_i} K_{\alpha_j} / K_{\alpha_j} = K_{\alpha_i} / (K_{\alpha_i} \cap K_{\alpha_j}),$$

получаем неравенство

$$r(K_{\alpha_i} / (K_{\alpha_i} \cap K_{\alpha_j})) \le \bar{r}_c(G) + 1. \tag{12}$$

Подгруппа $K_{\alpha_i} \cap K_{\alpha_j}$ центральна в $K_{\alpha_i} \cdot K_{\alpha_j}$, поэтому ввиду леммы 1 [2] $r(K_{\alpha_i} \cap K_{\alpha_j}) \le \bar{r}_c(G) + 4$. Из этого соотношения и неравенства (12) следует $r(K_{\alpha_i}) \le 2\bar{r}_c(G) + 5$. По построению $r(K_{\alpha_1}) \le r(K_{\alpha_i})$, поэтому $r(K_{\alpha_1}) \le$ $\le 2\bar{r}_c(G) + 5$. Противоречие с (11). Следовательно, в группе G найдется некоторая локальная система конечнопорожденных подгрупп G_α, у которых ранги $r(K_\alpha)$ ограничены в совокупности, а следовательно, ограничены в совокупности 0-ранги подгрупп G_α.

Итак, установлено, что группа G имеет локальную систему конечнопорожденных подгрупп, 0-ранги которых ограничены некоторым числом l. Согласно лемме 5 [14] произвольная конечнопорожденная подгруппа L группы G содержит такую периодическую нормальную подгруппу F, что $r(L/F)$ не превышает некоторого числа $f(l)$, зависящего только от l. Заметим, что так как L почти не имеет кручения, то подгруппа F конечна, причем множество конечных нормальных подгрупп из L конечно. В результате применения хорошо известного метода проекций [18, с. 351] в группе G можно указать такую периодическую нормальную подгруппу P, что $r(G/P) \le f(l)$. По предположению о периодическом радикале группы G имеем $P=1$ и поэтому $r(G) \le$ $\le f(l)$. Следовательно, конечность ранга группы G установлена. Теорема доказана.

1. *Дашкова О. Ю.* Локально нильпотентные группы конечного неабелева секционного ранга // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 452–455.
2. *Дашкова О. Ю.* Разрешимые группы конечного неабелева секционного ранга // Там же. – 1996. – **48**, № 3. – С. 418–421.

3. *Hartley B.* Finite groups of automorphisms of locally soluble groups // J. Algebra. – 1979. – **57**, № 1. – P. 242–257.
4. *Зайцев Д. И.* О локально разрешимых группах конечного ранга // Докл. АН СССР. – 1978. – **240**, № 2. – С. 257–259.
5. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1970. – **9**, № 5. – С. 579–615.
6. *Дашкова О. Ю.* Разрешимые группы конечного неабелева ранга // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 159–164.
7. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1968. – 468 с.
8. *Беляев В. В.* Локально конечные группы с черниковскими силовскими p-подгруппами // Алгебра и логика. – 1981. – **20**, № 6. – С. 605–619.
9. *Павлюк И. И., Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием min-p по всем p // VII Всесоюз. симп. по теории групп: Тез. докл. – Красноярск: Краснояр. ун-т, 1980. – С. 84–85.
10. *Дашкова О. Ю.* Группы конечного.метабелева ранга. – Киев, 1990. – 35 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.1).
11. *Дашкова О. Ю.* Локально почти разрешимые группы конечного неабелева ранга // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 477–482.
12. *Kropholler P. H.* On finitely generated soluble groups with no large wreath products sections // Proc. London Math. Soc. – 1984. – **49**, № 1. – P. 155–169.
13. *Robinson D. J. S.* A note on groups of finite rank // Compos. math. – 1969. – **31**, № 2. – P. 240–246.
14. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 5. – С. 652–660.
15. *Чарин В. С.* О разрешимых группах типа A_4 // Мат. сб. – 1960. – **52**, № 3. – С. 895–914.
16. *Мягкова Н. Н.* О группах конечного ранга // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1949. – **13**, № 6. – С. 495–512.
17. *Дашкова О. Ю.* Группы конечного неабелева ранга: Автореф. дис.…канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1990. – 11 с.
18. *Курош А. Г.* Теория групп: 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

Получено 30.10.95