УДК 519.21

В. О. Гасаненко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЖИВУЧІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ БАГАТОВИМІРНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We establish necessary and sufficient conditions for the nonexit of many-dimensional diffusion process from a fixed domain with probability one.

Наведені необхідні та достатні умови невиходу з імовірністю 1 багатовимірного дифузійного процесу із фіксованої області.

Дана стаття присвячена узагальненню результатів для одновимірних дифузійних процесів, викладених у монографії [1] (розд. 1.5), на багатовимірний випадок.

Нехай (Ω, F, P) — імовірнісний простір, а R^m — скінченновимірний векторний простір. Будемо позначати для векторів $x \in R^m$ $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_m^2}$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$.

Через $d_K(y)$ позначимо відстань від y до K, визначену як

$$d_K(y) := \inf_{z \in K} |y - z|.$$

Будемо розглядати випадок, коли K є замкнена опукла множина. Останнє гарантує, що для довільного вектора $y \in R^m$ завжди існує найближчий вектор $x \in K$, тобто $d_K(y) = |y - x|$, $x \in K$. Цей факт використовується при подальшому доведенні результатів.

Нехай далі $\xi(t)$ — скінченновимірний дифузійний процес із вектором переносу $a(t, x)$ та дифузійним оператором $B(t, x)$. Тут $x \in R^m$, $t \geq 0$, $a(t, x) \in R^m$.

Визначимо стохастичний процес $\xi(t)$ як розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(t, \xi(t))dw_k(t), \qquad \xi(0) = x, \tag{1}$$

де $w_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$, — незалежні вінерівські процеси. Функції $b_k(t, x)$ визначаються за допомогою рівностей

$$b_k(t, x) = \sqrt{\lambda_k(t, x)}\, l_k(t, x),$$

де $l_k(t, x)$ — власні вектори, $\lambda_k(t, x)$ — відповідні до них власні значення для оператора $B(t, x)$.

Нам будуть потрібні результати стосовно існування розв'язку (1) та оцінки його модуля неперервності, доведені у монографії [2]. Наведемо їх у вигляді окремої теореми.

Теорема 1 [2, с. 480]. *Припустимо, що функції* $a(t, x), b_1(t, x), \ldots, b_m(t, x)$, *які визначені при* $t \in [0, T]$, $x \in R^m$, *набувають значень у* R^m, *є борелівськими. Якщо існує таке* L, *що*

$$|a(t, x)|^2 + \sum_{k=1}^{m} |b_k(t, x)|^2 \leq L^2(1 + |x|^2),$$

$$|a(t,x)-a(t,y)| + \sum_{k=1}^{m} |b_k(t,x)-b_k(t,y)| \le L|x-y|$$

для усіх x та y з R^m, то рівняння (1) *має єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності з імовірністю* 1 *неперервний розв'язок $\xi(t)$.*

Коли ще маємо умову $M|\xi(0)|^4 < \infty$, то існує стала H така, що виконується нерівність

$$M|\xi(t)-\xi(s)|^4 \le H(s-t)^2.$$

Будемо також вважати, що виконується наступна умова неперервності коефіцієнтів стохастичного диференціального рівняння:

$$\lim_{s\to t} \sup_{x} (|a(t,x)-a(s,x)|+|b(t,x)-b(s,x)|) = 0.$$

Нехай K — борелівська множина з R^m.

Означення 1. *Будемо говорити, що випадковий процес $\xi(t)$ є живучим у K тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $t \in [0, T]$ та для майже усіх $\omega \in \Omega$ $\xi_\omega(t) \in K$.*

Будемо також говорити, що K задовольняє властивість живучості відносно пари $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot)$, коли для довільного випадкового вектора x з носієм K існує розв'язок (1), *який є живучим у K.*

Позначимо через F_t стандартну фільтрацію для m-вимірного вінерівського процесу, $F_t \subset F$; через $\overline{v}(t,x)$ вектор $(v_l(t,x),\ l=\overline{1,m})$ із векторнозначних функцій: $v_l(t,x) \in R^m$, $x \in R^m$, $t \ge 0$.

Нехай випадковий вектор x є F_t-вимірним та $x \in K$ з імовірністю 1.

Означення 2. *Визначимо стохастичну контингентну множину $\tau_K(t,x)$ для K у точці x як множину F_t-вимірних векторів $(\gamma, \overline{v})$, що мають таку властивість: існують послідовності $h_n \ge 0$, $h_n \to 0$ та F_{t+h_n}-вимірних випадкових векторів a^n, c^n такі, що:*

i) $M(|a^n|^2) \to 0$,

ii) $M(|c^n|^2) \to 0$,

iii) $M(c^n) = 0$,

iv) c^n *не залежить від* F_t,

а також для цих послідовностей справедливі включення

$$x + h_n\gamma + \sum_{k=1}^{m} v_k(w_k(t+h_n)-w_k(t)) + h_n a^n + \sqrt{h_n}\, c^n \in K \quad \forall\, n \ge 0.$$

Теорема 2. *Якщо підмножина K задовольняє властивість стохастичної живучості відносно пари $(a(\cdot,\cdot), \overline{b}(\cdot,\cdot))$, то для кожної фіксованої точки $t \in [0, T]$ існує F_t-вимірне x таке, що*

$$(a(t,x), \overline{b}(t,x)) \in \tau_K(t,x).$$

Доведення. Розглянемо живучий у K дифузійний процес $\xi(t)$

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s,\xi(s))\,ds + \int_0^t \sum_{k=1}^{m} b_k(s,\xi(s))\,dw_k(s).$$

З того, що

$$\xi(t+h_n) = \xi(t) + \int_t^{t+h_n} a(s,\xi(s))\,ds + \int_t^{t+h_n} \sum_{k=1}^m b_k(s,\xi(s))\,dw_k(s),$$

маємо

$$\xi(t+h_n) = \xi(t) + h_n a(t,\xi(t)) + \sum_{k=1}^m b_k(t,\xi(t))(w_k(t+h_n) - w_k(t)) +$$

$$+ \int_t^{t+h_n} f(s)\,ds + \int_t^{t+h_n} \sum_{k=1}^m g_k(s)\,dw_k(s).$$

Тут

$$f(s) = (f_k(s),\ k=\overline{1,m}) = (a_k(t,\xi(t)) - a_k(s,\xi(s)),\ k=\overline{1,m}),$$

$$g_k(s) = b_k(t,\xi(t)) - b_k(s,\xi(s)), \qquad k=\overline{1,m}, \qquad s \in [t, t+h_n].$$

Покладемо

$$f^n(t) = \frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} f(s)\,ds, \qquad g^n(t) = \frac{1}{\sqrt{h_n}}\int_t^{t+h_n}\sum_{k=1}^m g_k(s)\,dw_k(s).$$

Перевіримо умови з означення контингентної множини. Застосовуючи нерівність Шварца, маємо

$$M(|f^n(t)|^2) = \frac{1}{h_n^2}\sum_{k=1}^m M\left(\int_t^{t+h_n} f_k(s)\,ds\right)^2 \le \frac{1}{h_n}\sum_{k=1}^m \int_t^{t+h_n} Mf_k^2(s)\,ds. \tag{2}$$

Далі з нерівності $(a+b)^2 \le a^2 + 2b^2$ одержуємо

$$f_k^2(s) = (a_k(s,\xi(s)) \mp a_k(t,\xi(s)) - a_k(t,\xi(t)))^2 \le$$

$$\le 2(a_k(s,\xi(s)) - a_k(t,\xi(s)))^2 + 2(a_k(t,\xi(s)) - a_k(t,\xi(t)))^2 \le$$

$$\le 2\delta_t(h_n) + 2L|\xi(s) - \xi(t)|^2,$$

де $\delta_t(h) = \sup\limits_{s\in[t,t+h]} \sup\limits_x |a(t,x) - a(s,x)|$.

З нерівності Гельдера та теореми 1 знаходимо

$$M|\xi(s)-\xi(t)|^2 \le M^{1/2}(\xi(s)-\xi(t))^4 \le |s-t|k_1, \qquad k_1 < \infty.$$

Отже, $M|f^n(t)|^2 \sim \max(\delta_t(h_n), h_n) \to 0$.

Далі, використовуючи властивість стохастичного інтеграла Іто, маємо

$$M|g^n(t)|^2 = \frac{1}{h_n} M\left|\int_t^{t+h_n}\sum_{k=1}^m g_k(s)\,dw_k(s)\right|^2 = \frac{1}{h_n}\sum_{k=1}^m \int_t^{t+h_n} M|g_k(s)|^2\,ds.$$

З останнього аналогічно викладеному вище одержуємо

$$M(g^n(t))^2 \to 0.$$

Очевидно, що $M g_n(t) = 0$ та $g^n(t)$ не залежить від F_t. Таким чином, ми перевірили вимоги i)–iv) до послідовностей з означення контингентної множини.

Нарешті, покладемо $x=\xi(t)$. Тепер, виходячи з того, що $\xi(t)$ є живучим у K:

$$\xi(t+h_n) \in K \qquad \forall n>0, \qquad t+h_n \le T,$$

завершуємо доведення теореми.

Теорема 3. *Якщо для довільного випадкового процесу*

$$\xi(t) = \xi(0)+\int_0^t a(s,\xi(s))\,ds+\int_0^t\sum_1^m b_k(s,\xi(s))\,dw_k(s)$$

визначено F_0-вимірну проекцію $y=\Pi_K(\xi(0))$, то для довільної пари F_0-вимірних векторів $(\gamma,\overline{v})$ із стохастичної контингентної множини $\tau_K(0,y)$ справедлива оцінка

$$\lim_{t_n\to 0}\inf\Big(M(d_K^2(\xi(t_n))-M(d_K^2(\xi(0))\Big)/t_n \le$$

$$\le 2M\big(\langle\xi(0)-y,\,a(0,\xi(0))-\gamma\rangle\big)+\sum_{k=1}^m M\big(|b_k(0,\xi(0))-v_k|^2\big).$$

Доведення. Покладемо $x=\xi(0)$, визначимо проекцію $y=\Pi_K(x)$ та виберемо пару $(\gamma,\overline{v})$ із стохастичної контингентної множини $\tau_K(0;y)$. Тобто, існують такі об'єкти: послідовність $0<t_n\to 0$ та F_0-вимірні a^n та c^n, які задовольняють умови i)–iv) та майже скрізь

$$y+\sum_{k=1}^m v_k w_k(t_n)+\gamma t_n+t_n a^n+\sqrt{t_n}\,c^n \in K \qquad \forall n>0.$$

Далі

$$d_K^2(\xi(t_n))-d_K^2(\xi(0)) \le \Bigg|x+\int_0^{t_n} a(s,\xi(s))\,ds+\int_0^{t_n}\sum_{k=1}^m b_k(s,\xi(s))\,dw_k(s)-$$

$$-y-\sum_{k=1}^m v_k w_k(t_n)-\gamma t_n-t_n a^n-\sqrt{t_n}\,c^n\Bigg|^2-|x-y|^2 =$$

$$=\Bigg|(x-y)+\int_0^{t_n}(a(s,\xi(s))-\gamma)\,ds+\int_0^{t_n}\sum_{k=1}^m (b_k(s,\xi(s))-v_k)\,dw_k(s)-$$

$$--t_n a^n-\sqrt{t_n}\,c^n\Bigg|^2-|x-y|^2 := I.$$

Оцінку останнього виразу зробимо через оцінку його складових. Покладемо

$$2\left\langle x-y,\int_0^{t_n}\sum_{k=1}^m (b_k(s,\xi(s))-v_k)\,dw_k\right\rangle = I_1,$$

$$2\left\langle x-y,\int_0^{t_n}(a(s,\xi(s))-\gamma)\,ds\right\rangle = I_2,$$

$$\left|\int_0^{t_n} \sum_{k=1}^{m} (b_k(s, \xi(s)) - v_k)\, dw_k\right|^2 = I_3,$$

$$\left|\int_0^{t_n} (a(s, \xi(s)) - \gamma)\, ds\right|^2 = I_4,$$

$$2\left\langle \int_0^{t_n} \sum_{k=1}^{m} (b_k(s, \xi(s)) - v_k)\, dw_k,\ \int_0^{t_n} (a(s, \xi(s)) - \gamma)\, ds \right\rangle = I_5,$$

$$2\left\langle x - y + \int_0^{t_n} \sum_{k=1}^{m} (a(s, \xi(s)) - \gamma)\, ds + \int_0^{t_n} \sum_{k=1}^{m} (b_k(s, \xi(s)) - v_k)\, dw_k(s), t_n a^n \right\rangle = I_6,$$

$$2\left\langle x - y + \int_0^{t_n} (a(s, \xi(s)) - \gamma)\, ds + \int_0^{t_n} \sum_{k=1}^{m} (b_k(s, \xi(s)) - v_k)\, dw_k(s), \sqrt{t_n} c_n \right\rangle = I_7,$$

$$\left| t_n a^n + \sqrt{t_n} c_n \right|^2 = I_8,$$

Обчислимо математичне сподівання від обох частин останнього виразу і далі будемо оцінювати кожний доданок у правій частині окремо.

Із властивостей стохастичного інтеграла Іто маємо

$$M\left(\left\langle x - y, \int_0^{t_n} \sum_{k=1}^{m} (b_k(s, \xi(s)) - v_k)\, dw_k(s) \right\rangle\right) = 0.$$

Оцінимо другий доданок I_2. З того, що

$$\left|\int_0^{t_n} (a(s, \xi(s)) \pm a(0, \xi(s)) \pm a(0, \xi(0)) - \gamma)\, ds - (a(0, \xi(0)) t_n\right| \le$$

$$\le\ t_0 \delta_0(t_n) + t_n L |\xi(s) - \xi(0)|,$$

випливає нерівність

$$\left|\frac{1}{t_n} M I_2 - M\langle x - y, a(0, \xi(0)) - \gamma \rangle\right| \le \delta_0(t_n) + L t_n^{1/4}.$$

Для третього доданку I_3 маємо

$$M\left|\int_0^{t_n} \sum_{k=1}^{m} (b_k(s, \xi(s)) - v_k)\, dw_k(s)\right|^2 = \int_0^{t_n} M \sum_{k=1}^{m} \left(|b_k(s, \xi(s)) - v_k|^2\right) ds =$$

$$= \int_0^{t_n} M \sum_{k=1}^{m} \left(|b_k(s, \xi(s)) \pm b_k(0, \xi(s)) \pm b_k(0, \xi(0)) - v_k|^2\right) ds.$$

Тепер аналогічно останньому будемо мати

$$\left|\frac{1}{t_n} M I_3 - M\left(\sum_{k=1}^{m} |b_k(s, \xi(s)) - v_k|^2\right)\right| \le i_3\left(\delta_0(t_n) + L t^{1/4}\right),$$

де $i_3 < \infty$.

Для I_4, використовуючи нерівність

$$M\left(\left|\int_0^t \varphi(s)\,ds\right|^2\right) \le t\int_0^t M|\varphi(s)|^2 ds,$$

одержуємо

$$MI_4 = M\left|\int_0^{t_n} (a(s,\xi(s))-\gamma)\right|^2 ds \le t_n\int_0^{t_n} |a(s,\xi(s))-\gamma|^2 ds \le i_4 t_n^2,$$

де $i_4 < \infty$.

Аналогічно для I_5 із нерівності Коші – Шварца маємо

$$MI_5 \le 2M^{1/2}\left(\left|\int_0^{t_n}\sum_{k=1}^m b_k(s,\xi(s))-v_k dw_k(s)\right|^2\right)M^{1/2}\left(\left|\int_0^{t_n}(a(s,\xi(s))-\gamma)\,ds\right|^2\right) =$$

$$= 2\left(M\int_0^{t_n}\sum_{k=1}^m |b_k(s,\xi(s))-v_k|^2 ds\right)M^{1/2}\left(\left|\int_0^{t_n}(a(s,\xi(s))-\gamma)\,ds\right|\right) \le 2i_5 t^{1/2} i_4^{1/2} t_n.$$

Шостий доданок оцінюється таким чином:

$$M(\langle x-y, t_n a^n\rangle) \le t_n M^{1/2}(|x-y|^2)M^{1/2}(|a^n|^2),$$

$$M\left(\left\langle\int_0^{t_n}(a(s,\xi(s))-\gamma)\,ds, t_n a^n\right\rangle\right) \le$$

$$\le t_n M_{1/2}\left(\left|\int_0^{t_n}(a(s,\xi(s))-\gamma)\,ds\right|^2\right)M^{1/2}(|a^n|^2),$$

$$M\left(\left\langle\int_0^{t_n}\sum_{k=1}^m (b_k(s,\xi(s))-v_k)\,dw_k(s), a^n t_n\right\rangle\right) \le$$

$$\le M^{1/2}\left(\left|\int_0^{t_n}\sum_{k=1}^m (b_k(s,\xi(s))-v_k)\,dw_k\right|^2\right)M^{1/2}(|a^n|^2) =$$

$$= t_n\left(\left(\int_0^{t_n} M\left(\left|\sum_{k=1}^m (b_k(s,\xi(s))-v_k)\right|^2 ds\right)\right)^{1/2} M^{1/2}(|a^n|^2)\right) \le i_5 t_n^2 M^{1/2}(|a^n|^2).$$

Для I_7 з урахуванням того, що b^n за умовою незалежна від $x-y$ та $M\,b^n = 0$, маємо

$$M(\langle x-y, \sqrt{t_n}\,c^n\rangle) = 0.$$

Знову використовуючи нерівність Коші – Шварца, одержуємо

$$M\left(\left\langle\int_0^{t_n}(a(s,\xi(s))-\gamma)\,ds, \sqrt{t_n}\,c_n\right\rangle\right) \le$$

$$\le \sqrt{t_n}M^{1/2}\left(\left|\int_0^{t_n} a(s,\xi(s))-\gamma)\,ds\right|^2\right)M^{1/2}(|c_n|^2) \le \sqrt{t_n}\,i_4^{1/2} t_n M^{1/2}(|c_n|^2),$$

$$M\left(\left\langle \int_0^{t_n} \sum_{k=1}^m (b_k(s,\xi(s)) - v_k)dw_k(s), \sqrt{t_n}\, c^n \right\rangle\right) \le$$

$$\le \sqrt{t_n} M^{1/2}\left(\left| \int_0^{t_n} \sum_{k=1}^m (b_k(s,\xi(s)) - v_k)dw_k(s)\right|^2\right) M^{1/2}\left(\left|c^n\right|^2\right) =$$

$$= \sqrt{t_n}\int_0^{t_n} M \sum_{k=1}^m |b_k(s,\xi(s)) - v_k|^2 ds) M^{1/2}\left(\left|c^n\right|^2\right) \le \sqrt{t_n}\, i_5 t_n M^{1/2}\left(\left|c^n\right|^2\right).$$

Нарешті I_8 оцінюється так:

$$M\left|t_n a^n + \sqrt{t_n} c^n\right|^2 = t_n M\left|\sqrt{t_n} a^n + c^n\right|^2.$$

Проаналізувавши всі оцінки, завершуємо доведення теореми 2.

Теорема 4. *Припустимо, що для кожної F_t-випадкової величини x існує F_t-вимірна проекція $y = \Pi_K(x)$ така, що*

$$\left(a(t,\cdot), \overline{b}(t,\cdot)\right) \in \tau_K(t,y).$$

Тоді множина K інваріантна відносно $(a, \overline{b})$.

Доведення. Стохастичне диференціальне рівняння може бути записане як

$$\xi(t+h) = \xi(t) + \int_t^{t+h} a(s\xi(s))ds + \int_t^{t+h} \sum_{k=1}^m b_k(s, \xi(s) dw_k(s).$$

З теореми 3 маємо

$$\lim_{h\to 0+}\inf \left(M(d_K^2(\xi(t+h))) - M(d_K^2(\xi(t)))\right)/h \le$$

$$\le 2M\left(\langle \xi(t) - y(t), a(t,\xi(t)) - \gamma \rangle\right) + M\left(\sum_{k=1}^m |b_k(t,\xi(t)) - v|^2\right)$$

для проекції $y(t) = \Pi_K(\xi(t))$ та довільної пари $\left(v(t,\cdot), (\overline{b}(t,\cdot)\right) \in \tau_K(t, y(t))$.

Покладемо

$$\overline{v}(t,\cdot) = \overline{b}(t,\cdot), \qquad \gamma(t,\cdot) = a(t,\cdot), \qquad \varphi(t) := M\left(d_K^2(\xi(t))\right).$$

Контингентна епіпохідна визначається як

$$D_{\uparrow}\varphi(t)(1) := \lim_{h\to 0+}\inf \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}.$$

Вона, як ми довели, у нашому випадку не додатна. З цього випливає співвідношення $\varphi(t) \le 0$ для усіх $t \in [0, T]$.

Припустимо, що це не так. Тоді існує таке $t > 0$, що $\varphi(t) > 0$. На підставі неперервності φ існує таке $\alpha \in (0, T]$, що

$$\varphi(\beta) > 0 \qquad \forall\, \beta \in (t - \alpha, t).$$

Введемо множини

$$A := \{s \in [0,t) \mid \forall\, \beta \in (s,t), \varphi(\beta) > 0\}, \qquad t_0 := \inf A.$$

Таким чином, із означень випливає, що

$$\beta \in (t_0, t), \quad \varphi(\beta) > 0, \quad \varphi(t_0) = 0.$$

В той же час $D_{\uparrow}\varphi(\beta)(1) \le 0$ для довільної $\beta \in (t_0, t)$, що призводить до суперечності, бо для $t_0 + h \in (t_0, t]$

$$0 < \varphi(t_0 + h) = \varphi(t_0 + h) - \varphi(t) \le 0.$$

Таким чином,

$$Md_K^2(\xi(t)) = \int_\Omega d_K^2(\xi_\omega(t))\, dP(\omega) = 0$$

Звідси випливає, що $d_K(\xi_\omega(t)) = 0$ майже скрізь, тобто $\xi(t)$ живе у K.

Теорема 5. *Нехай K є замкнена опукла F-вимірна підмножина із R^m. Тоді еквівалентні наступні умови:*

1. *Підмножина K задовольняє стохастичну властивість живучості відносно пари $(a(\cdot,\cdot), (\overline{b}(\cdot,\cdot))$.*

2. *Для кожної F_t-випадкової величини x, живучої у K, виконується умова*

$$\left(a(t, x), \overline{b}(t, x)\right) \in \tau_K(t, x).$$

Доведення. Необхідність (тобто $1 \to 2$) випливає з теореми 1, достатність — з теореми 2. Але для останнього зробимо ще один крок у доведенні цієї теореми. Розширимо $a(t,\cdot)$, $b(t,\cdot)$ на цілий простір за допомогою проектора на множину K:

$$A(t, x) := a(t, \pi_K(x)), \quad \overline{B}(t, x) := \overline{b}(t, \pi_K(x)).$$

Таким чином, K інваріантна відносно $(A, \overline{B})$ завдяки теоремі 2. Виходячи з того, що $(A, \overline{B})$ співпадають з $(a, \overline{b})$ на K, робимо висновок, що K є областю живучості відносно $(a(\cdot,\cdot), (\overline{b}(\cdot,\cdot))$.

1. *Aubin J. P.* Viability theory // System & Control & Foundation & Applications. – 1991. – P. 543.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.

Одержано 19.02.97