УДК 517.9

И. А. Джалладова (Киев. эконом. ун-т)

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ПРИ РЕЗОНАНСЕ

We construct and investigate a mathematical model for dynamical system with random influence, which is stabilized by increasing the frequency of random influence.

Побудовано і досліджено математичну модель динамічної системи з випадковим впливом, в якій стабілізація досягається за рахунок збільшення частоти випадкового впливу.

1. Постановка задачи. Простейшая математическая модель динамической системы со случайными периодическими воздействиями описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t,\mu)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \mu a(t,\xi(t)) & -\mu\beta \end{pmatrix} X(t,\mu), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — марковский периодический случайный процесс, принимающий состояния $\theta_1,\ldots,\theta_n$ с вероятностями $p_1, p_2,\ldots, p_n$, удовлетворяющими системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t) p_s(t),$$

$$\alpha_{kk}(t) \le 0, \quad \alpha_{ks}(t) \ge 0, \quad k \ne s, \quad k,s = 1,\ldots,n,$$

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t) \equiv 0, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

$$a(t,\xi(t)) \equiv (a(t,\theta_1), a(t,\theta_2),\ldots, a(t,\theta_n)) \equiv$$

$$\equiv (a_1(t), a_2(t),\ldots, a_n(t)), \quad a_k(t+2\pi) = a_k, \quad k = 1,\ldots,n,$$

μ — параметр, $\mu > 0$.

Наиболее важным для приложений является изучение условий устойчивого режима функционирования динамической системы со случайными воздействиями, в частности при наличии резонансных явлений.

В математической постановке приходим к задаче нахождения условий устойчивости в среднем квадратичном случайного решения системы уравнений (1).

2. Вывод моментных уравнений. Идею решения поставленной задачи рассмотрим на конкретной ситуации, описываемой системой уравнений (1), где случайный процесс $\xi(t)$ принимает два состояния θ_1, θ_2 с вероятностями p_1, p_2, удовлетворяющими системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -\nu p_1 + \nu p_2, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \nu p_1 - \nu p_2, \end{cases} \quad \nu > 0,$$

а случайная функция $a(t,\xi(t))$ определена следующим образом:

$$a(t, \xi(t)) = \begin{cases} \alpha + \cos 2\omega t, & \xi(t) = \theta_1, \\ \alpha - \cos 2\omega t, & \xi(t) = \theta_2, \end{cases} \qquad \alpha = \text{const.}$$

Применим метод моментов [1], исходя из общей системы моментных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dD_1}{dt} &= A_1 D_1 + D_1 A_1^* - \nu D_1 + \nu D_2, \\ \frac{dD_2}{dt} &= A_2 D_2 + D_2 A_2^* + \nu D_1 - \nu D_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где A_1, A_2 — матрицы коэффициентов в системе уравнений (1) при значениях случайной функции $a(t, \xi(t))$ соответственно равными $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Заменой переменных

$$\begin{gathered} D \equiv (D_1 + D_2)/2, \quad Q \equiv (D_1 - D_2)/2, \\ D \equiv \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad Q \equiv \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix}, \\ \gamma_1 \equiv \mu\alpha + \omega^2, \quad \gamma_2 \equiv \mu\beta + \nu, \quad \gamma_3 \equiv \gamma_2 + \nu, \end{gathered} \tag{4}$$

сведем систему уравнений (3) к системе дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [2]

$$\begin{gathered} \frac{d^3 d_1}{dt^3} + 3\mu\beta \frac{d^2 d_1}{dt^2} + 2(2\gamma_1 + \mu^2\beta^2)\frac{dd_1}{dt} + 4\mu\beta\gamma_1 d_1 + \\ + 4\mu\cos 2\omega t \frac{dq_1}{dt} + 4\mu(\gamma_2 \cos 2\omega t - \omega \sin 2\omega t) q_1 = 0, \\ \frac{d^3 q_1}{dt^3} + 3\gamma_3 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + 2(2\gamma_1 + 2\nu\gamma_2 + \gamma_3^2)\frac{dq_1}{dt} + 4\gamma_3(\gamma_1 + \gamma_2\nu) q_1 + \\ + 4\mu\cos 2\omega t \frac{dd_1}{dt} + 4\mu(\gamma_2 \cos 2\omega t - \omega \sin 2\omega t) d_1 = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Применим к системе уравнений (4) преобразование Лапласа [3]. Имеем систему моментных уравнений для системы (1):

$$\begin{gathered} \chi(p - \omega i) f_1(p - 2\omega i) + \varphi(p) f_{-1}(p) + \chi(p + \omega i) f_1(p + 2\omega i) = 0, \\ \chi(p - \omega i) f_{-1}(p - 2\omega i) + \varphi(p + 2\nu) f_1(p) + \chi(p + \omega i) f_{-1}(p + 2\omega i) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} \chi(p) = 2\mu(p + \gamma_2), \quad i^2 = -1, \\ \varphi(p) = p^3 + 3\mu\beta + 2(2\gamma_1 + \mu^2\beta) + 4\mu\beta\gamma_1, \\ f_1(p) \leftarrow\!\shortmid\; d_1(t), \quad f_{-1}(p) \leftarrow\!\shortmid\; d_2(t). \end{gathered}$$

При $\mu = 0$ так называемое порождающее уравнение $\varphi(p) = 0$ имеет корни $-2\omega i$, 0, $2\omega i$. Поэтому резонансными будут частоты, кратные $2\omega i$.

3. Построение областей неустойчивости. Выведем формулы для областей неустойчивости в случае основного резонанса на частоте $2\omega i$. Для этого введем непрерывные матричные дроби, предварительно сделав замену p на $p + 2\omega i$:

$$\frac{f_1(p+4\omega i)}{f_{-1}(p+2\omega i)} \equiv \psi_1(p+2\omega i),$$

$$\frac{f_1(p-4\omega i)}{f_{-1}(p-2\omega i)} \equiv \psi_2(p-2\omega i).$$

Тогда для определения характеристических показателей решений системы уравнений (5) получим определитель блочной матрицы, в котором выписаны три центральных строки и столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \chi(p+3\omega i)\psi_1(p+2\omega i) + \varphi(p+2\omega i) & \chi(p+2\omega i) & 0 \\ \chi(p+\omega i) & \varphi(p+2\nu) & \chi(p-\omega i) \\ 0 & \chi(p-\omega i) & \varphi(p-2\omega i) + \chi(p-3\omega i)\psi_2(p-2\omega i) \end{vmatrix}, \quad (7)$$

$\Delta = 0$ — уравнение для определения характеристических показателей решений системы уравнений (1). В этом уравнении на главной диагонали два элемента обращаются в 0. Тогда, как известно [4], бесконечный определитель можно свести к определителю конечного порядка:

$$\begin{vmatrix} K & L \\ L & M \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где

$$K \equiv \varphi(p+2\omega i) + \chi(p+3\omega i)\psi_1(p+2\omega i) - \frac{\chi^2(p+\omega i)}{\varphi(p+2\nu)},$$

$$L \equiv -\frac{\chi(p+\omega i)\chi(p-\omega i)}{\varphi(p+2\nu)},$$

$$M \equiv \varphi(p-2\omega i) + \chi(p-3\omega i)\psi_2(p-2\omega i) - \frac{\chi^2(p-\omega i)}{\varphi(p+2\nu)}.$$

Найдем цепные дроби $\psi_1(p)$, $\psi_2(p)$ непосредственно из системы уравнений (5). Из первого уравнения системы (5) имеем

$$\psi_1^{-1}(p) = -\frac{\chi(p+\omega i)}{\varphi(p)+\chi(p+\omega i)\psi_2(p)},$$
$$\psi_2^{-1}(p) = -\frac{\chi(p-\omega i)}{\varphi(p)+\chi(p-\omega i)\psi_1(p)}. \quad (9)$$

Из второго уравнения системы (5):

$$\psi_2(p+2\omega i) = -\frac{\chi(p+\omega i)}{\varphi(p+2\nu)+\chi(p-\omega i)\psi_1^{-1}(p-2\omega i)},$$
$$\psi_1(p-2\omega i) = -\frac{\chi(p-\omega i)}{\varphi(p+2\nu)+\chi(p+\omega i)\psi_2^{-1}(p+2\omega i)}. \quad (10)$$

Из дробей (10) исключим выражение $\psi_2^{-1}(p+2\omega i)$ с помощью дробей (9), предварительно заменив в них $p+2\omega i$ на p.

Получим выражение для дроби $\psi_2(p)$ через $\psi_2(p-2\omega i)$. Применив его повторно, выразим функции $\psi_2(p-\theta_1)$ через функции $\psi_2(p-2\omega i(k+1))$. При $k \to \infty$ для функции $\psi_2(p)$ получим аналитическое выражение в виде цепной дроби. Аналогично, из соотношений (10) находим цепную дробь для $\psi_1(p)$. Таким образом, для цепных дробей $\psi_1(p)$, $\psi_2(p)$ можно записать явные выражения:

$$\psi_1(p+2\omega i) = -\cfrac{\chi(p+3\omega i)}{\varphi(p+2\nu+4\omega i) - \cfrac{\chi^2(p+5\omega i)}{\varphi(p+6\omega i) - \cfrac{\chi^2(p+7\omega i)}{\varphi(p+2\nu+8\omega i) - \ldots}}},$$

$$\psi_2(p-2\omega i) = -\cfrac{\chi(p-3\omega i)}{\varphi(p+2\nu-4\omega i) - \cfrac{\chi^2(p-5\omega i)}{\varphi(p-6\omega i) - \cfrac{\chi^2(p-7\omega i)}{\varphi(p+2\nu-8\omega i) - \ldots}}}.$$

Для получения границ областей неустойчивости при параметрическом резонансе положим $p=0$ [2].

При выводе уравнения (7) для определения характеристических показателей мы не делали ограничений на параметр μ.

Рассмотрим два случая.

1. μ — любое число. В этом случае численно решалось уравнение (7) и был определен характер зависимости решения системы дифференциальних уравнений (1), близкого к 0, от параметров μ, α. Построены границы областей неустойчивости при различных значениях случайного параметра ν.

2. $\mu > 0$ достаточно мало. Тогда уравнение границы областей неустойчивости в пространстве параметров μ, α имеет вид

$$|T(\alpha, \mu, p)|^2 = |U(\alpha, \mu, p)|^2, \tag{11}$$

где

$$T(\alpha, \mu, p) \equiv -8p\omega^2 + 8\mu\alpha\omega i - 8\mu\beta\omega^2 -$$

$$-\frac{4\mu^2(\nu+3\omega i)^2}{\varphi(4\omega i+2\nu)} - \frac{4\mu^2(\nu+\omega i)^2}{\varphi(2\nu)},$$

$$U(\alpha, \mu, p) \equiv -\frac{4\mu^2(\nu^2+\omega^2)}{\varphi(2\nu)},$$

т. е. при $0<\mu<\varepsilon_1$ $|p-2\omega i|<\varepsilon_2$, где ε_1, ε_2 — достаточно малые числа, система дифференциальных уравнений (1) имеет неустойчивое решение при выполнении условия

$$\frac{\nu}{\omega^2}\left[\frac{1}{2\nu^2} + \frac{1}{2(\nu^2+\omega^2)} - \frac{2}{\nu^2+\omega^2}\right] < 8\beta + o(\mu),$$

$$\frac{\alpha}{\omega} < \frac{\mu}{8(\nu^2+4\omega^2)\omega} \pm \sqrt{\frac{1}{(16\omega^2\nu)^2} - \kappa^2}, \tag{12}$$

$$\kappa \equiv \beta + \frac{\mu}{16\nu\omega^2} - \frac{\mu\nu}{4\omega^2(\nu^2+\omega^2)} + \frac{\mu\nu}{16\omega^2(\nu^2+4\omega^2)}.$$

Из анализа условий устойчивости (12) получим необходимое условие существования областей неустойчивости при параметрическом резонансе:

$$0 < \nu^2 < \frac{\sqrt{57}-5}{2}\omega^2.$$

Вывод. Динамическая система со случайными воздействиями, описываемая системой уравнений (1) и неустойчивая в каждом из принимаемых случайным марковским процессом состоянии, может быть стабилизирована за счет числа случайных переходов из одного состояния в другое.

Число неустойчивых значений трения β конечно. В частности, при большом значении трения β может и не быть ни одной области неустойчивости. Кроме того, при увеличении трения β такие области сужаются.

1. *Валеев К. Г., Стрижак О. А.* Метод моментных уравнений. – Киев: ИЭД АН УССР, 1986.
2. *Валеев К. Г.* Об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 4. – С. 793–796.
3. *Мартыненко В. С.* Операционное исчисление. – Киев: Вища шк., 1990. – 355 с.
4. *Валеев К. Г.* К методу Хилла в теории линейных дифференциальних уравнений с периодическими коэффициентами // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**, № 6. – С. 979–987.
5. *Джалладова И. А.* Исследование устойчивости решений системы дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. – Киев, 1993. – 10 с. – Деп. в ГНТБ Укр. 28.06.93; 1258.

Получено 25.03.97