УДК 517.944

С. Б. Гембарська (Волин. ун-т, Луцьк)

ДОТИЧНІ ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ БІГАРМОНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПУАССОНА В КРУЗІ

Let C_0 be a curve in a disk $D=\{|z|<1\}$, which is tangent to a circle at the point $z=1$, and let C_θ be a result of rotation of this curve about the origin $z=0$ through an angle θ. We construct a bounded function, which is biharmonic in D, has a zero normal derivative on the boundary, and for which a limit along C_θ does not exist for all θ, $0\le\theta\le 2\pi$.

Нехай C_0 — дотична крива в крузі $D=\{|z|<1\}$ до кола в точці $z=1$ і C_θ — результат її обертання навколо $z=0$ на кут θ. Побудовано обмежену бігармонійну в D функцію з нульовою нормальною похідною на межі, для якої границя вздовж C_θ не існує для всіх θ, $0\le$ $\le\theta\le 2\pi$.

В 1906 р. П. Фату [1] одержав ряд результатів відносно поведінки аналітичних функцій в одиничному крузі і розповсюдив їх на гармонійні функції. Зокрема, якщо функція $f(z)$ є обмеженою аналітичною в крузі $D=\{|z|<1\}$, то f має недотичні граничні значення в майже кожній точці кола $\partial D=\{|z|=1\}$. Такий же результат справедливий для обмежених гармонійних функцій в D і навіть для додатних гармонійних функцій.

Порівняння дотичних і недотичних підходів до межі круга привело Літтлвуда [2] до висновку, що теорема Фату є найбільш загальною в такому розумінні. Нехай C_0 — довільна дотична крива в D до кола в точці $z=1$ і C_θ — результат її обертання навколо $z=0$ на кут θ, так що C_θ дотикається до ∂D внутрішньо в точці $e^{i\theta}$. Він показав, що існує обмежена гармонійна функція h в D така, що $\lim_{|z|\to 1,\, z\in C_\theta} h(z)$ на існує майже для всіх θ, $0\le\theta\le 2\pi$.

Зокрема, існує обмежена аналітична функція f в D така, що $\lim_{|z|\to 1,\, z\in C_\theta} f(z)$ не існує майже для всіх θ, $0\le\theta\le 2\pi$.

У 1990 р. Аіокава [3] довів, що сформульований результат має місце для всіх θ, $0\le\theta\le 2\pi$, (зняв поняття „майже"). Виникло питання, чи буде вірним результат Аіокава для одного класу бігармонійних функцій у крузі. Позначимо через $u=u_f(\varphi, r)$ розв'язок у D крайової задачі

$$\Delta^2 u = 0, \quad u\big|_{\partial D} = f(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \tag{1}$$

Відомо (див., наприклад, [4], лема), що клас таких бігармонійних функцій не містить інших гармонійних функцій крім констант. Це означає, що результат Аіокави не дає відповіді на поставлене питання для класу бігармонійних функцій, визначених співвідношеннями (1). Використовуючи методи робіт [2] і [3], встановлюємо наступне твердження.

Теорема 1. *Існує обмежена бігармонійна функція* $u(z)$ *в* D *така, що* $\lim_{|z|\to 1,\, z\in C_\theta} u(z)$ *не існує для всіх* θ, $0\le\theta\le 2\pi$.

Для доведення теореми потрібні допоміжні твердження. Для інтегровної функції f на $[0, 2\pi]$ розв'язок крайової задачі (1) в D має вигляд [5, с. 402]:

$$u_f(\varphi, r) = \frac{(1-r^2)^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi+t)\frac{1-r\cos t}{\left[1-2r\cos t+r^2\right]^2}\,dt. \tag{2}$$

Інтеграл (2) називається бігармонійним інтегралом Пуассона для функції f в крузі D. Будемо вважати, що $f(0)=f(2\pi)$. Якщо сегмент $[\theta_1, \theta_2]$ не міститься в $[0, 2\pi]$, то введемо заміну

$$\Theta = \theta - 2n\pi, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad n = [\theta/2\pi], \tag{*}$$

де $[\cdot]$ — ціла частина, і будемо розглядати множини, визначені (*) як відрізки.

Лема 1. *Нехай* $m > \pi/2$, $0 < c < 1$ *і* $\eta \in [0, 2\pi]$. *Нехай* f *вимірна на* $[0, 2\pi]$, $|f| \le 1$ *на* $[0, 2\pi]$ *і* $f(\varphi) = 0$ *для* $|\varphi - \eta| < mc$. *Тоді для всіх* r, $1 - c \le \le r < 1$, *справедлива оцінка*

$$|u_f(\eta, r)| < \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-2} m^{-1} + \frac{4}{3\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-4} m^{-3}. \tag{3}$$

Доведення. Нехай $1 - c \le r < 1$. Якщо $mc \le |\varphi - \eta| \le \pi$, то, як доведено в [3], справедлива нерівність

$$|re^{i\eta} - e^{i\varphi}| \ge \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)|\eta - \varphi|.$$

Представимо бігармонійне ядро Пуассона $\tilde{P}$ в такому вигляді:

$$\tilde{P} := \frac{(1-r^2)^2[1 - r\cos t]}{\left[1 - 2r\cos t + r^2\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1-r^2)^2}{1 - 2r\cos t + r^2} + \frac{(1-r^2)^3}{\left[1 - 2r\cos t + r^2\right]^2}\right] \equiv \frac{1-r^2}{2}\left[P + P^2\right].$$

Тоді

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\tilde{P}\,dt = \frac{1-r^2}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fP\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fP^2\,dt\right] =: i_1 + i_2. \tag{4}$$

Оцінимо зверху модулі величин i_1 та i_2. Оскільки i_1 — гармонійний інтеграл Пуассона, то, як показано в [3], маємо

$$|i_1| = \left|\frac{1-r^2}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fP\,d\varphi\right| \le \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-2} m^{-1}.$$

За умовою $f(\varphi) = 0$ при $|\varphi - \eta| < mc$, тому

$$|i_2| = \left|\frac{1-r^2}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{(1-r^2)^2}{\left|re^{i\eta} - e^{i\varphi}\right|^4}d\varphi\right| =$$

$$= \left|\frac{1-r^2}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{|\varphi-\eta| \ge mc} f(\varphi)\frac{(1-r^2)^2}{\left|re^{i\eta} - e^{i\varphi}\right|^4}d\varphi\right| \le$$

$$\le \frac{4c^3}{2\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-4}\int_{|\varphi-\eta| \ge mc}\frac{d\varphi}{|\varphi - \eta|^4} \le \frac{4}{3\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-4} m^{-3}.$$

З наведених оцінок випливає нерівність (3). Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $m > \pi/2$ *буде такою сталою, що виконується умова*

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-4} m^{-1} + \frac{4}{3\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-4} m^{-3} \le \frac{1}{4}.$$

Нехай також $0 < c < 1$, $\eta \in [0, 2\pi]$ *і* f *є вимірною на* $[0, 2\pi]$, $|f| \le 1$ *на* $[0, 2\pi]$, *причому* $f(\varphi) = 1$ *при умові* $|\varphi - \eta| < mc$. *Тоді для* $1 - c \le r < 1$ *вірна оцінка*

$$u_f(\eta, r) \ge 1/2. \tag{5}$$

Доведення. Для розв'язків крайової задачі (1) в прийнятих позначеннях справедлива така рівність: $u_f(\eta, r) = 1 + 2u_{(f-1)/2}(\eta, r)$. Застосуємо лему 1 до функції $\frac{1}{2}(f-1)$, яка, як легко перевірити, задовольняє умови леми 1. Для $1-c \le r < 1$ маємо

$$\left|u_{(f-1)/2}(\eta, r)\right| \le \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-2} m^{-1} + \frac{4}{3\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-4} m^{-3} =: q,$$

а тому

$$u_{(f-1)/2}(\eta, r) = \frac{1}{2}u_f(\eta, r) - \frac{1}{2} \ge -q.$$

Звідси $u_f(\eta, r) \ge 1 - 2q$. За умовою $q \le 1/4$, тому звідси випливає нерівність (5). Лему доведено.

Лема 3. *Нехай* $0 < \varepsilon < 1/4$ *і* $0 < c < 1$. *Припустимо, що функція* f *є вимірною на* $[0, 2\pi]$, $|f| \le 1$ *на* $[0, 2\pi]$ і *для всіх* $\eta \in [0, 2\pi]$ *виконується нерівність*

$$c^{-1} \int\limits_{|\varphi-\eta|<c} |f(\varphi)| d\varphi \le \varepsilon. \tag{6}$$

Тоді

$$\sup_{|z| \le 1-c} \left|u_f(\eta, r)\right| \le m_1\sqrt{\varepsilon},$$

де

$$m_1 = \left(\frac{7}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{3\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^{-4}\right)k_0, \qquad k_0 = \text{const} > 0.$$

Доведення. Позначимо $r = 1 - c$ і візьмемо на колі $\{|z| = r\}$ точку $re^{i\eta}$. Врахововуючи означення характеристичної функції множини, розкладаємо задану функцію f на суму двох функцій f_1 та f_2, покладаючи $f_1 = f\chi_{|\varphi-\eta|<c/\sqrt{\varepsilon}}$. Оцінимо зверху на згаданому колі величини $\left|u_{f_1}(\eta, r)\right|$ і $\left|u_{f_2}(\eta, r)\right|$.

За рівністю (4) для функції f_1 маємо

$$\left|u_{f_1}(\eta, r)\right| \le \frac{1-r^2}{2}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1 P\, d\varphi\right| + \frac{1-r^2}{2}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1 P^2\, d\varphi\right|.$$

Враховуючи, що при заданих умовах $(1-r^2)/2 < c$, за лемою 3 з [3] маємо

$$\frac{1-r^2}{2}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1 P\, d\varphi\right| \le \frac{2}{\pi}\sqrt{\varepsilon}. \tag{7}$$

У наступній оцінці використовуємо крім властивостей бігармонійного ядра Пуассона таку нерівність:

$$\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 < \frac{c^2+4}{c^2}.$$

Внаслідок цього одержуємо

$$\frac{1-r^2}{2}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1 P^2\, d\varphi\right| = \frac{1-r^2}{2}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\varphi-\eta|<c/\sqrt{\varepsilon}} f P^2\, d\varphi\right| \le$$

$$\le \frac{1-r^2}{4\pi}\int\limits_{|\varphi-\eta|<c/\sqrt{\varepsilon}}|f(\varphi)|\frac{(1-r^2)^2}{\left((1-r)^2+4r\sin^2(\varphi-\eta)/2\right)^2}d\varphi \le$$

$$\le \frac{1-r^2}{4\pi}\int\limits_{|\varphi-\eta|<c/\sqrt{\varepsilon}}|f(\varphi)|\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 d\varphi < \frac{c^2+4}{2\pi}\frac{1}{c}\int\limits_{|\varphi-\eta|<c/\sqrt{\varepsilon}}|f(\varphi)|d\varphi.$$

З оцінки (6) і того факту, що інтервал $\{|\varphi-\eta|<c/\sqrt{\varepsilon}\}$ довжиною $2c/\sqrt{\varepsilon}$ охоплюється числом інтервалів $1+[1/\sqrt{\varepsilon}]$ довжиною $2c$, одержуємо

$$\frac{1-r^2}{2}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1 P^2\, d\varphi\right| \le \frac{c^2+4}{2\pi}\varepsilon\left(1+\left[1/\sqrt{\varepsilon}\right]\right) \le \frac{c^2+4}{\pi}\sqrt{\varepsilon} < \frac{5}{\pi}\sqrt{\varepsilon}. \qquad (8)$$

З (7) і (8) будемо мати оцінку

$$\left|u_{f_1}(\eta, r)\right| \le \frac{7}{\pi}\sqrt{\varepsilon}.$$

Застосуємо лему 1 до функції f_2 і $m = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Умови леми 1 виконуються. Маємо

$$\left|u_{f_2}(\eta, r)\right| < \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)^{-2}\sqrt{\varepsilon}+\frac{4}{3\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)^{-4}\sqrt{\varepsilon^3}.$$

Таким чином, на колі $|z|=1-c$ вірні співвідношення

$$\left|u_f(\eta, r)\right| \le \left|u_{f_1}(\eta, r)\right| + \left|u_{f_2}(\eta, r)\right| < \left(\frac{7}{\pi}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\frac{1}{3\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)^{-4}\right)\sqrt{\varepsilon}.$$

Покажемо, що ці співвідношення справедливі для $|z|\le 1-c$. Справді, за принципом максимуму К. Міранди [6] (див. також [7] або [8]) для розв'язків бігармонійного рівняння $\Delta^2 u=0$ в крузі $|z|\le 1-c$ з неперервно диференційовними граничними даними справедлива оцінка

$$\|u\|_{C^1(\overline{D})} \le k_0\|u\|_{C^1(\partial D)},$$

де $k_0=\text{const}>0$ не залежить від u. З цієї оцінки випливає доводжувана нерівність. Лему доведено.

Введемо відображення T точок множини D на $[0, 2\pi]\ni\theta$ за правилом $Tz:=\left\{\theta\,\middle|\,z\in C_\theta\right\}$. Якщо жодне C_θ, $0\le\theta\le 2\pi$, не містить $z\in D$, то $Tz:=\varnothing$. Якщо $M\subset D$, то рівність $T(M)=[0, 2\pi]$ справедлива тоді і тільки тоді, коли крива C_θ, $0\le\theta\le 2\pi$, перетинає множину M. Позначимо через γ частину кривої C_0; тоді γ_θ означає результат її обертання навколо початку координат на кут θ. При цих позначеннях $\gamma=\gamma_0$. Позначимо множину значень відображення T_γ таким чином: $T_\gamma z:=\left\{\theta\,\middle|\,z\in\gamma_\theta\right\}$. Нехай γ^* означає радіальну проекцію γ на ∂D. Оскільки γ — зв'язна множина, то γ^* — круговий інтервал на ∂D або точка. При цьому, якщо γ містить обидва свої кінці, то γ^* — замкнений круговий інтервал або точка. Позначимо через $l(\gamma^*)$ довжину γ^*. Величина γ^* скінченна, хоча крива γ може бути неспрямлюваною.

В [3] доведено, що коли γ є частиною кривої C_0, яка з'єднує точки $a e^{i\alpha}$ і $b e^{i\beta}$, $0<a<b\le 1$, то, поклавши $M(\eta)=\left\{re^{i\eta},\ a\le r\le b\right\}$, одержимо, що $T_\gamma(M(\eta))$ є замкненим інтервалом довжини $l(\gamma^*)$. Зокрема, якщо $\gamma^* = \left\{e^{i\theta},\ \theta_1\le\theta\le\theta_2\right\}$, то $T_\gamma(M(\eta))=[\eta-\theta_2, \eta-\theta_1]$.

Лема 4. *Для довільного* $m > 1$ *можна вибрати послідовність дуг* γ_j *кривої* C_0 *з такими властивостями*:

1) γ_j *зв'язує* $a_j e^{i\alpha_j}$ *і* $b_j e^{i\beta_j}$;

2) *якщо* $z \in \gamma_j$, *то* $a_j \le |z| \le b_j$;

3) $l(\gamma_j^*) > j^2(1 - a_j)$, *де* γ_j^* — *радіальна проекція* γ_j *на коло* ∂D;

4) $0 < 1 - b_j < 1 - a_j < \dfrac{1 - b_{j-1}}{m} < \dfrac{1 - a_{j-1}}{m}$.

Доведення. В [3] властивості 1), 2) і 4) доведені індуктивним методом. Щоб довести 3), використовуємо властивість кута Штольца. Кутом Штольца з вершиною в точці 1 називається кут, утворений хордами кола, для якого радіус кола є бісектрисою, якщо величина кута менша π. Оскільки крива C_0 внутрішньо дотикається до кола в точці 1, то при русі точки z по кривій в напрямку до 1 наступить момент, коли точка z буде зовні кута Штольца і при цьому виконуватиметься рівність

$$\lim_{|z| \to 1} \frac{l\left(C_0(z)^*\right)}{1 - |z|} = \infty,$$

де $C_0(z)$ — частина кривої C_0 від точки z до 1, а $C_0(z)^*$ — її радіальна проекція на коло. На основі записаної вище граничної рівності і за рахунок вибору більших номерів j можна стверджувати, що буде виконуватися нерівність 3). Твердження доведено.

***Доведення** теореми.* Будемо проводити міркування за методом, розробленим в [3] із заміною побудови гармонійної функції $h(z)$ побудовою бігармонійної функції $u_f(\varphi, r)$ з використанням інтегрального представлення (2) і відповідних оцінок, одержаних у лемах 1–4. Зокрема, одержимо оцінку

$$\frac{1}{1 - b_{j-1}} \int\limits_{|\varphi - \eta| < 1 - b_{j-1}} g_j(\varphi)\, d\varphi \le 32\, m \frac{1 - a_j}{l(\gamma_j^*)}$$

для всіх $\eta \in [0, 2\pi]$, де m визначено в лемі 1, і покладемо

$$32\, m \frac{1 - a_j}{l(\gamma_j^*)} = \varepsilon > 0.$$

Внаслідок обмеженості m $\varepsilon \to 0$ при $j \to \infty$. Тоді за лемою 3, покладаючи $c = 1 - b_{j-1}$ при $f = g_j$, для досить великих j одержимо оцінку

$$\sup_{|z| \le b_{j-1}} u_{g_j}(\varphi, r) \le m_1 \sqrt{32 m} \sqrt{\frac{1 - a_j}{l(\gamma_j^*)}},$$

де m_1 визначено в лемі 3.

Це дає можливість далі проводити міркування так, як в роботі [3], і остаточно встановити співвідношення

$$\varliminf_{r = |z| \to 1,\ z \in C_\theta} u_f(\varphi, r) \le -\frac{1}{4} < \frac{1}{4} \le \varlimsup_{r = |z| \to 1,\ z \in C_\theta} u_f(\varphi, r)$$

для всіх $\theta \in [0, 2\pi]$. Теорему доведено.

Теорема 2. *У крузі* D *існує необмежена бігармонійна функція* $u_{f_0}(\varphi, r)$ *така, що для всіх* θ, $0 \le \theta \le 2\pi$, *справедлива рівність*

$$\varlimsup_{|z| \to 1,\ z \in C_\theta} u_{f_0}(\varphi, r) = \infty.$$

Доведення. Будемо користуватися множиною E_j, побудованою в [3]. Для цієї множини міра $|E_j| \to 0$ при $j \to \infty$. На відміну від [3] побудуємо функцію $f_0(\varphi)$ як суму ряду

$$f_0(\varphi) = \sum_{j=j_0}^{\infty} p_j \chi_{E_j},$$

де $\{p_j\}$ — така невід'ємна послідовність, що $\overline{\lim}_{j\to\infty} p_j = \infty$, а j_0 вибираємо настільки великим, що $|f_0(\varphi)| \le 1$. Тоді, використовуючи лему 2, одержуємо невід'ємну бігармонійну функцію $u_{f_0}(\varphi, r)$, для якої $\overline{\lim}_{|z|\to 1,\ z\in C_\theta} u_{f_0}(\varphi, r) = \infty$ для всіх $\theta \in [0, 2\pi]$. Теорему доведено.

Зауваження. Теорема 2 дає позитивну відповідь на питання Барча ([3], вступ), яке стосується бігармонійних у крузі функцій: чи існує додатна бігармонійна функція, для якої не існує границі вздовж C_θ для всіх $\theta \in [0, 2\pi]$. Випадок гармонійних функцій розглянуто в [3].

Покажемо, нарешті, що має місце повний аналог теореми 1 для функцій $F(z, \bar{z})$, біаналітичних в D [9, с. 302]:

$$F(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy, \tag{9}$$

де за формулою Гурса $u(x, y) = \operatorname{Re}(\bar{z}\varphi(z) + \psi(z))$ — бігармонійна в D функція, $v(x, y) = \operatorname{Im}(\bar{z}\varphi(z) + \psi(z))$ — спряжена в D бігармонійна функція, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналітичні компоненти функції F.

Лема 5. *Нехай $A = \{F(z, \bar{z})\}$ — множина всіх біаналітичних функцій в D, кожен елемент $F(z, \bar{z})$ якої задовольняє такі умови:*

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{|z|=1} = 0, \qquad F(z, \bar{z})\Big|_{|z|=1} = \delta(e^{i\theta}), \quad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{10}$$

Тоді множина A не містить інших біаналітичних функцій крім констант.

Справді, покладаючи $\delta(e^{i\theta}) = \delta_1(e^{i\theta}) + i\,\delta_2(e^{i\theta})$, з (9) і (10) одержуємо

$$u(x, y)\Big|_{|z|=1} = \delta_1(e^{i\theta}), \qquad v(x, y)\Big|_{|z|=1} = \delta_2(e^{i\theta}).$$

Це означає, що для кожної з функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$ в D виконуються всі умови леми роботи [4], за якою $u(x, y) = \text{const}$, $v(x, y) = \text{const}$.

Теорема 3. *Існує біаналітична функція $F(z, \bar{z})$ в D така, що $\lim_{|z|\to 1,\ z\in C_\theta} F(z, \bar{z})$ не існує для всіх θ, $0 \le \theta \le 2\pi$.*

Це твердження випливає з теореми 1, леми 5 і структури класу біаналітичних функцій.

1. *Fatou P.* Séries trigonométriques et séries de Taylor // Acta Math. – 1906. – **30**. – P. 335–400.
2. *Littlewood J. E.* On a theorem of Fatou // J. London Math. Soc. – 1927. – **2**. – P. 172–176.
3. *A. Aikawa.* Harmonic functions having no tangential limits // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – **108**, № 2. – P. 457–464.
4. *Горбайчук В. И.* Теорема Фату о граничном поведении производных в классе бигармонических функций // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 5. – С. 557–562.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
6. *Miranda C.* Formule diemaggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche in due variabili // Ciorn. Math. Battaglini. – 1949. – **78**. – P. 97–118.
7. *Agmon S.* Maximum theorems for solutions of higher order elliptic equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1960. – **66**. – P. 77–80.
8. *A.-M. Sändig.* Das Maximum Prinzip vom Miranda – Agmon – Typ für Lösungen der biharmonischen Gleichung in einem Rechteck // Math. Nachr. – 1980. – **96**. – S. 49–51.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Одержано 20.06.96