УДК 517.5

В. К. Дзядик, І. О. Шевчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАУВАЖЕННЯ ПРО СТАЛУ ЛЕБЕГА ЯДРА РОГОЗИНСЬКОГО

For every n, we compute the Lebesgue constant of Rogosinski kernel with any preassigned accuracy.

Для кожного n обчислено сталу Лебега ядра Рогозинського з будь-якою наперед заданою точністю.

Розглянемо сталу Лебега L_n ядра Рогозинського, тобто число [1, с. 121–123]

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\cos nt}{\cos t - \cos(\pi/2n)}\right|dt, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

М. П. Корнійчук [2] довів

$$L_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt - r_n,$$

де

$$0 < r_n < \frac{2}{\sqrt{3}\,(2n+1)}.$$

В. К. Дзядик [1, с. 123] показав, що

$$0 < r_n < \frac{5}{12}\frac{1}{n^2}.$$

Простим наслідком міркувань з [1, с. 121 – 123] та формули сумування Ейлера – Маклорена є твердження 1, яке дозволяє підрахувати r_n для всіх n з будь-якою наперед заданою точністю. Наприклад,

$$r_n \approx \frac{1}{6n^2}$$

з точністю $(4/15)(2n)^{-4}$;

$$r_n \approx \frac{1}{6n^2} + \frac{\pi^2-6}{360}\frac{1}{n^4}$$

з точністю $(8/63)(2n)^{-6}$;

$$r_n \approx \frac{1}{6n^2} + \frac{\pi^2-6}{360}\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4-20\pi^2+120}{15120}\frac{1}{n^6}$$

з точністю $(2/27)(2n)^{-8}, \ldots$.

Обчислення r_n зводиться до знаходження похибки наближення квадратурною формулою трапецій інтеграла від функції

$$f(x) := \frac{\sin x}{x},$$

$f(0) := 1$, оскільки згідно з ([2, с. 123], (22))

$$r_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt - \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{j\pi}{n}\right) + f\left(\frac{j+1}{n}\pi\right)\right)\frac{\pi}{n}. \tag{1}$$

Тому природно застосувати формулу сумування Ейлера – Маклорена ([3, с. 136], (4.8 – 10)): якщо функція g має $2m+2$ неперервних похідних на $[0, n]$, то

$$\sum_{j=0}^{n} g(j) = \int_0^{n} g(t)\,dt + \frac{g(0)+g(n)}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(g^{(2k-1)}(n) - g^{(2k-1)}(0)\right) + \frac{nB_{2m+2}}{(2m+2)!}\,g^{(2m+2)}(\theta n), \tag{2}$$

$m, n = 1, 2, \ldots,\ 0<\theta<1$, де

$$B_{2k} = 2(-1)^{k+1}(2k)!\,\frac{1}{(2\pi)^{2k}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^{2k}} \tag{3}$$

— числа Бернуллі ([3, с. 747], (21.5 – 16)).

Рівність

$$f^{(j)}(x) = \frac{1}{x^{j+1}}\int_0^{x} t^j \cos\left(t + \frac{j\pi}{2}\right)dt, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

легко доводиться за індукцією. Звідси

$$|f^{(2k)}(t)| < \frac{1}{2k+1}, \quad 0<t<\pi.$$

Зокрема, враховуючи (3), маємо

$$\left|\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\,f^{(2m+2)}(t)\right| \le \frac{2}{2^{2m+2}}\,\frac{1}{2m+3} \to 0, \quad m\to\infty. \tag{5}$$

Співвідношення (1), (2) та (5) встановлюють (з урахуванням рівності $f^{(2k-1)}(0)=0$, яка випливає з парності функції f) справедливість першої частини твердження 1.

Твердження. *Справедлива рівність*

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2c_k}{k(2k+1)(2n)^{2k}},$$

де

$$c_k = -\frac{k(2k+1)}{\pi}\,\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!}\,B_{2k}\,f^{(2k-1)}(\pi). \tag{6}$$

При цьому $c_1 = 1$,

$$1 - \frac{\pi^2}{(2k+2)(2k+3)} < c_k < 1, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

звідки

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{2c_k}{k(2k+1)(2n)^{2k}} < \frac{8}{3}\,\frac{1}{m(2m+1)(2n)^{2m}}.$$

Таким чином, залишилося перевірити нерівність (7). Для цього інтегруванням за частинами в (4) знаходимо

$$2k(2k+1)f^{(2k-1)}(\pi) = (-1)^k\pi + \pi^2 f^{(2k+1)}(\pi), \tag{8}$$

звідки, в свою чергу,

$$f^{(2k-1)}(\pi) = \frac{(-1)^k \pi}{2k(2k+1)} \times$$
$$\times \left(1 - \frac{\pi^2}{(2k+2)(2k+3)} + \frac{\pi^4}{(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)} - \ldots\right),$$

тому

$$\frac{\pi}{2k(2k+1)}\left(1 - \frac{\pi^2}{(2k+2)(2k+3)}\right) < |f^{(2k-1)}(\pi)| \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} < \frac{\pi}{2k(2k+1)}.$$

Звідси з урахуванням (6) та (3) одержуємо (7).

Зауваження. Числа Бернуллі B_{2k} можна обчислити за допомогою рекурентної формули або визначника Лапласа ([3, с. 135], (21.5–9)). Зокрема,

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \ldots .$$

Похідні $f^{(2k-1)}(\pi)$ можна обчислити за формулою

$$f^{(2k-1)}(\pi) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \frac{(2k-1)!}{(2k-1-2j)!} \frac{1}{\pi^{2j+1}},$$

яка випливає з (8). Зокрема,

$$f'(\pi) = -\frac{1}{\pi}, \quad f'''(\pi) = \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^3},$$
$$f^{(5)}(\pi) = -\frac{1}{\pi} + \frac{20}{\pi^3} - \frac{120}{\pi^5}, \ \ldots .$$

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций многочленами. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
2. *Корнейчук Н. П.* О приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Бернштейна – Рогозинского // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**, № 2. – С. 258 – 261.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

Одержано 25.03.97