УДК 519.21

В. А. Коваль, канд. физ.-мат. наук (Терноп. приборостроит. ин-т)

СЛАБЫЙ ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕКУРРЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

We show that continuous random processes constructed by using solutions of the difference equation $X_n = A_n X_{n+1} + V_n$, $n = 1, 2, \dots$, converge in a Banach space to a solution of the corresponding operator equation in distribution.

Встановлюється збіжність за розподілом неперервних випадкових процесів, побудованих за розв'язками різницевого рівняння $X_n = A_n X_{n+1} + V_n$, $n = 1, 2, \dots$, в банаховому просторі до розв'зку відповідного операторного рівняння.

Пусть B — действительное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $L(B)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B в B. Рассмотрим в B уравнение

$$X_n = A_n X_{n+1} + V_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где X_0, V_n и A_n — случайные элементы, которые определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимают значения соответственно в B и $L(B)$. Центральная предельная теорема для решения (X_n) уравнения (1), в котором (V_n) и (A_n) — соответственно последовательности независимых одинаково распределенных векторов и матриц, рассматривалась в [1]. В [2–4] установлен слабый принцип инвариантности для (X_n) в том случае, когда (1) представляет собой процедуру стохастической аппроксимации. При этом показано, что если последовательность (V_n) удовлетворяет слабому принципу инвариантности, то данному принципу удовлетворяет и (X_n).

В настоящей работе рассматривается уравнение (1), в котором

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0 \quad \text{почти наверное (п. н.)}, \tag{2}$$

где $A \in L(B)$ и спектральный радиус оператора A меньше единицы, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = r < 1. \tag{3}$$

В силу (3) существует обратный линейный ограниченный оператор $(I - A)^{-1}$, где I — тождественный оператор.

Через $\mathbb{C}([0, 1], B)$ с sup-нормой обозначим банахово пространство непрерывных B-значных функций, заданных на $[0, 1]$. Построим по (V_n) и (X_n) $\mathbb{C}([0, 1], B)$-значные случайные элементы $Z_n = (Z_n(t), t \in [0, 1])$ и $Y_n = (Y_n(t), t \in [0, 1])$, $n \geq 1$, определенные на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, положив

$$Z_n(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{[nt]} V_i + (nt - [nt]) n^{-1/2} V_{[nt]+1}, \quad t \in [0, 1];$$

$$Y_n(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i + (nt - [nt]) n^{-1/2} X_{[nt]+1}, \ t \in [0, 1].$$

Пусть $Z = (Z(t), t \in [0, 1])$ — $\mathbb{C}([0, 1], B)$-значный случайный элемент, определенный на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, причем $Z(0) = 0$ п. н. Определим $\mathbb{C}([0,1], B)$-значный случайный элемент $Y = (Y(t), t \in [0,1])$, положив $Y(t) = (I - A)^{-1} Z(t)$, $t \in [0,1]$, где оператор A удовлетворяет условию (3). Отметим, что для каждого $\omega \in \Omega$ и $t \in [0,1]$ $Y(\omega, t)$ является решением уравнения в B $x = Ax + Z(\omega, t)$.

Сходимость случайных элементов по вероятности и по распределению будем обозначать соответственно через $\xrightarrow{P}$ и $\xrightarrow{\mathcal{D}}$.

Рассмотрим сначала уравнение (1), в котором $A_n = A$, $n \geq 1$, т. е.

$$X_n = AX_{n+1} + V_n, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть* (X_n) *— решение уравнения* (4) *и выполнено условие* (3). *Если*

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z, \quad n \to \infty,$$

то

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \; n \to \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Решение (X_n) уравнения (4) может быть представлено в виде $X_n = A^n X_0 + X_n^0$, $n \geq 1$, где (X_n^0) — решение уравнения (4) при $X_0 = 0$. Поэтому можно положить в (4) $X_0 = 0$.

Для доказательства соотношения (5) воспользуемся стандартным подходом (см., например, [5]). Так как выполняется равенство [6]

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} A^{n-k} \left(\sum_{i=1}^{k} V_i \right), \quad n \geq 1,$$

то $Y_n(t) = G_n(Z_n)(t)$, $t \in [0,1]$, где (G_n) — линейные ограниченные операторы на $\mathbb{C}([0,1], B)$, определенные следующим образом для всякой функции $\varphi = \varphi(t)$ из $\mathbb{C}([0,1], B)$, $\varphi(0) = 0$:

$$G_n(\varphi)(t) = (i + 1 - nt) \sum_{k=0}^{i} A^{i-k} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) +$$

$$+ (nt - i) \sum_{k=0}^{i+1} A^{i+1-k} \varphi\left(\frac{k}{n}\right), \quad t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right], \quad 0 \leq i < n.$$

Далее с помощью стандартных рассуждений убеждаемся, что для любой φ

$$\sup_{t \in [0,1]} \left\| G_n(\varphi)(t) - (I - A)^{-1} \varphi(t) \right\| \to 0, \; n \to \infty.$$

Так как $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, $n \to \infty$, то отсюда ([7], теорема 5.5) следует (5). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* (X_n) *— решение уравнения* (1), *выполнены условия* (2), (3) *и следующие: существует* $\tau \in (0, 1/2)$ *такое, что*

$$\lim_{R \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P\left(n^{-\tau} \max_{1 \leq k \leq n} k^{\tau - (1/2)} \left\| \sum_{i=1}^{k} V_i \right\| \geq R \right) = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{n \to \infty} n^{\tau - (1/2)} \sum_{i=1}^{n} i^{(1/2) - \tau} \left\| A_{i+1} - A_{i+2} \right\| = 0 \quad \text{п. н.} \tag{7}$$

Тогда если

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

то

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \quad n \to \infty. \tag{9}$$

***Замечания.* 1.** Как показано в ([3], лемма 3.1), если $\left(\left\| \sum_{i=1}^n V_i \right\|, n \geq 1 \right)$ — субмартингал, для которого

$$E \left\| \sum_{i=1}^n V_i \right\| = O(n^{1/2}), \quad n \to \infty,$$

то условие (6) выполнено при любом $\tau \in (0, 1/2)$.

2. Условие (7) будет, например, выполнено, если $\| A_n - A_{n+1} \| = O(n^{\alpha})$, $n \to \infty$, п. н., где $\alpha < -1$.

Доказательство *теоремы* 2. Без ограничения общности положим в (1) $X_0 = 0$. Пусть $Y_n^0 = \left(Y_n^0(t), t \in [0,1] \right)$, $n \geq 1$, — $\mathbb{C}([0, 1], B)$-значные случайные элементы, построенные по решению $\left(X_n^0 \right)$ уравнения (1) при $A_n = A$, $n \geq 1$. Тогда в силу (8) и теоремы 1 $Y_n^0 \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$, $n \to \infty$. Поэтому для доказательства соотношения (9) достаточно показать в силу теоремы 4. 1 [7], что

$$\sup_{t \in [0,1]} \left\| Y_n(t) - Y_n^0(t) \right\| \xrightarrow{P} 0, \ n \to \infty,$$

или

$$N^{-1/2} \max_{1 \leq n \leq N} \left\| S_n - S_n^0 \right\| \xrightarrow{P} 0, \ N \to \infty, \tag{10}$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad S_n^0 = \sum_{k=1}^n X_k^0 = \sum_{k=1}^n A^{n-k} \sum_{i=1}^k V_i, \quad n \geq 1.$$

Докажем (10). Справедливо неравенство

$$N^{-\tau} \max_{1 \leq n \leq N} n^{\tau-(1/2)} \left\| S_n^0 \right\| \leq C(1-q)^{-1} N^{-\tau} \max_{1 \leq n \leq N} n^{\tau-(1/2)} \left\| \sum_{i=1}^n V_i \right\|.$$

Поэтому в силу (6)

$$\lim_{R \to \infty} \limsup_{N \to \infty} P\left(N^{-\tau} \max_{1 \leq n \leq N} n^{\tau-(1/2)} \left\| S_n^0 \right\| \geq R \right) = 0. \tag{11}$$

В ([6], формула (9)) было показано, что

$$S_n = S_n^0 + \sum_{i=1}^{n-1} G_{n,i} S_i, \quad n \geq 1, \tag{12}$$

где

$$G_{n,i} = \begin{cases} (I-A)^{-1}\left(I - A^{n-1-i}\right)\left(A_{i+1} - A_{i+2}\right) + A^{n-1-i}\left(A_{i+1} - A\right), & 1 \leq i \leq n-2, \\ A_n - A, & i = n-1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, используя условия (2), (7) и лемму Теплица, что

$$n^{\tau-(1/2)}\sum_{i=1}^{n-1} i^{(1/2)-\tau}\left\|G_{n,i}\right\| \to 0, \quad n\to\infty, \text{ п. н.} \tag{13}$$

Применяя метод, использованный в [4] при доказательстве соотношения (17), убеждаемся в силу (11) – (13), что

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{N\to\infty} P\left(N^{-\tau}\max_{1\le n\le N} n^{\tau-(1/2)}\left\|S_n\right\|\ge R\right) = 0. \tag{14}$$

Для завершения доказательства соотношения (10) осталось воспользоваться формулой (12), условиями (13), (14) и следующим неравенством:

$$N^{-1/2}\max_{1\le n\le N}\left\|S_n - S_n^0\right\| \le$$

$$\le N^{\tau-(1/2)}\max_{1\le n\le N}\sum_{i=1}^{n-1} i^{(1/2)-\tau}\left\|G_{n,i}\right\| N^{-\tau}\max_{1\le n\le N} n^{\tau-(1/2)}\left\|S_n\right\|.$$

Теорема 2 доказана.

1. *Darling R. W. R.* Infinite-dimensional stochastic difference equations for particle systems and network flows // J. Appl. Prob. – 1989. – **26**, № 2. – P. 325–344.
2. *Walk H.* An invariance principle for the Robbins – Monro process in a Hilbert space // Z. Wahrsch. verw. Gebiete. – 1977. – **39**, № 2. – P. 135–150.
3. *Berger E.* An invariance principle for a class of stochastic approximation procedures // Probab. Th. Rel Fields. – 1986. – **71**, № 4. – P. 517–522.
4. *Walk H.* Limit behaviour of stochastic approximation processes // Statist. Decis. – 1988.– **6**, № 1, **2**. – P. 109–128.
5. *Дороговцев А. А.* Разностная аппроксимация задачи Штурма – Лиувилля с белым шумом в правой части // Кибернетика. – 1989. – № 2. – С. 149–150.
6. *Коваль В. А.* Законы больших чисел и повторного логарифма для решений стохастических разностных уравнений в банаховом пространстве // Стохастические уравнения и граничные теоремы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 79–90.
7. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М: Мир, 1977. – 352 с.

Получено 25.03.93