УДК 512.745.4

Н. Л. Іваненко, студ. (Київ. ун-т)

ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ПІДГРУПИ ГРУПИ ЖОНК'ЄРА НАД ПОЛЕМ НУЛЬОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

The lattice of characteristic subgroups of the Jonquere group over the field of zero characteristic is described.

Описується решітка характеристичних підгруп групи Жонк'єра над полем нульової характеристики.

В роботі [1] описується решітка нормальних підгруп групи Жонк'єра $\mathfrak{I}_n$ над полем K нульової характеристики. Кожен її елемент однозначно характеризується деякою підгрупою адитивної групи поля і певним цілочисловим вектором. В даній роботі продовжується дослідження будови цієї групи — описано всі її характеристичні підгрупи. Як виявилося, для них зникає залежність від підгрупи адитивної групи поля.

1. Попередні відомості. Надалі K — поле нульової характеристики. Набір змінних $x_1, \ldots, x_k$ позначимо X_k, тоді $K[X_k]$ — кільце многочленів від k змінних. Вважатимемо, що $K[X_0] = K$. Елементи групи $\mathfrak{I}_n$ записуватимемо у вигляді таблиць: $U = [a_1, a_2(x_1), \ldots, a_n(X_{n-1})]$, де $a_i \in K[X_{i-1}]$.

Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел з природним відношенням порядку. Вважатимемо, що $0 \in \mathbb{N}$. Покладемо

$$P_k = \underbrace{\mathbb{N} \circ \mathbb{N} \circ \ldots \circ \mathbb{N}}_{k \text{ разів}}, \quad Q_n = \bigoplus_{i=n}^{0} P_i,$$

де операції $\circ$ і $\oplus$ означають відповідно ординальні суму і добуток [2]. Добуток розглядається відносно зворотнього лексикографічного порядку.

Означення 1. *Частково впорядкована множина називається жорсткою, якщо тотожнє відображення є її єдиним автоморфізмом.*

Означення 2. *Висотою одночлена* $\alpha x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$, $\alpha \in K$, *називатимемо набір* $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ *із* P_k, *висотою многочлена* $a(X_k) \in K[X_k]$ *— найбільшу з висот його одночленів, висотою таблиці* $U \in \mathfrak{I}_n$ *— набір* $h(U)$ *— висоту її першої ненульової координати, висотою множини таблиць* $U \subset \mathfrak{I}_n$ *— набір*

$$h(M) = \sup\{h(U) \in Q_n \,|\, U \in M\},$$

де порядок розглядається в розумінні множини Q_n.

Означення 3. *Старшим коефіцієнтом многочлена* $a(X_k) \in K[X_k]$ *називатимемо коефіцієнт при одночлені з найбільшою висотою. Старшим коефіцієнтом таблиці* U *— старший коефіцієнт її першої ненульової координати.*

Теорема 1. *Підгрупа* $H < \mathfrak{I}_n$ *буде нормальною тоді і тільки тоді, коли вона містить всі таблиці* $U \in \mathfrak{I}_n$ *висоти не більше* $h(H)$, *причому якщо* $h(U) = h(H)$, *то старший коефіцієнт таблиці* U *лежить в деякій підгрупі* A *адитивної групи поля* K.

Теорема 2. *Решітка нормальних дільників групи* $\mathfrak{I}_n$ *ізоморфна решітці* $\oplus_{h \in Q_n} L_K^{(\bar{h})}$, *де* $L_K^{(\bar{h})}$ *— примірник решітки підгруп адитивної групи поля* K.

Для доведення теорем 1 і 2 див. [1].

2. Характеристичні підгрупи групи Жонк'єра. Якщо на деякій множині R задано структуру решітки, то ця структура індукує частковий порядок. Для кожних двох елементів $p, q \in R$ покладемо $p \le q$, якщо $p \vee q = q$, або, що те ж саме, $p \wedge q = p$.

Означення 4. *Точку p решітки R називатимемо особливою, якщо вона порівнюється з усіма іншими точками цієї решітки.*

У випадку решітки підгруп деякої групи особливість точки означає, що ця точка (тобто підгрупа) або містить, або міститься в усіх інших підгрупах.

Лема 1. *Особливими точками решітки підгруп адитивної групи поля характеристики нуль є невласні підгрупи і тільки вони.*

Доведення. Нехай K — поле характеристики нуль, A — деяка підгрупа, яка є особливою точкою решітки підгруп адитивної групи поля K. Припустимо, що A — циклічна підгрупа, породжена елементом α. Розглянемо іншу підгрупу A', породжену елементом $2\alpha/3$. Очевидно, $\alpha \notin A'$, а $2\alpha/3 \notin A$, а отже, циклічна підгрупа не може бути особливою точкою.

Нехай A не циклічна і не власна. Тоді існує такий елемент α, що не належить A. Розглянемо циклічну підгрупу A', породжену α. Оскільки A — особлива точка решітки підгруп адитивної групи поля K і існує таке α, що лежить в A' і не належить A, то $A < A'$, але A' циклічна, а отже, A також циклічна. Одержана суперечність доводить лему.

Теорема 2. *Висота таблиць із $\mathfrak{I}_n$ є інваріантом щодо дії групи* $\operatorname{Aut}\mathfrak{I}_n$.

Доведення. Нехай φ — автоморфізм $\mathfrak{I}_n$; φ задає автоморфізм решітки нормальних дільників групи $\mathfrak{I}_n$. При такому автоморфізмі особливі точки переходять в особливі точки, оскільки автоморфізм групи зберігає включення. Згідно з лемою 1 особливими точками решітки нормальних дільників групи $\mathfrak{I}_n$ є точки вигляду $K^{(h)}$ або, що те ж саме, $\{0\}^{(\bar{h}^+)}$, де $\bar{h}^+$ — точка, наступна за $\bar{h}$. Множина таких точок ізоморфна Q_n як лінійно впорядкована множина, а отже, є цілком впорядкованою. Відомо [3], що всяка цілком впорядкована множина є жорсткою, тому φ індукує тотожнє відображення множини особливих точок. Враховуючи, що автоморфізм зберігає частковий порядок на решітці, одержуємо, що автоморфізми групи $\mathfrak{I}_n$ зберігають висоту нормальних дільників.

Нехай U — деяка таблиця з $\mathfrak{I}_n$, $h(U) = \bar{h}$. Розглянемо $H \lhd \mathfrak{I}_n$ — нормальне замикання таблиці U, $h(H) = h$. Оскільки U — твірний елемент групи H як нормального дільника, то $\varphi(U)$ — твірний $\varphi(H)$, тобто $\varphi(H)$ є нормальним замиканням таблиці $\varphi(U)$, а отже, $h(\varphi(H)) = h(\varphi(U))$. Маємо ланцюжок рівностей $\bar{h} = h(U) = h(H) = h(\varphi(H)) = h(\varphi(U))$, який доводить твердження теореми.

Розглянемо підгрупу G в групі Кремони, що складається з наборів вигляду

$$\langle \alpha_1 x_1 + a_1, \alpha_2 x_2 + a_2(x_1), \ldots, \alpha_n x_n + a_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \rangle,$$

де $\alpha_i \in K^*$. Очевидно, група G містить $\mathfrak{I}_n$ як нормальний дільник і підгрупу H, що складається з наборів вигляду $\langle \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n \rangle$. Можна помітити, що $\mathfrak{I}_n \cap H = \{e\}$, де $e = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ — одиничний елемент групи G. Отже, $G = \mathfrak{I}_n \rtimes H$. Оскільки $\mathfrak{I}_n \lhd G$, то $\operatorname{Inn} G \subseteq \operatorname{Aut}\mathfrak{I}_n$, тобто кожен внутрішній автоморфізм групи G буде автоморфізмом групи $\mathfrak{I}_n$.

Лема 2. *Якщо деяка характеристична підгрупа* $H < \mathfrak{I}_n$ *містить таблицю* U *висоти* H, *то вона містить також всі таблиці висоти не більше* $\overline{h}$.

Доведення. Нехай в таблиці U перші k координат нульові, а $k+1$-та відмінна від нуля. Подіємо на таблицю U автоморфізмом, індукованим таким елементом групи G: $V = \langle 0, \ldots, 0, \alpha\, x_{k+1}, 0, \ldots, 0 \rangle$, де $\alpha \in K^*$, $k+1$-та координата ненульова. Якщо $U = [0, \ldots, 0, a_{k+1}(X_k), \ldots, a_n(X_{n-1})]$, то

$$U^V = \Bigg[0, \ldots, 0, \ \alpha a_{k+1}(X_k), \ a_{k+2}\left(x_1, \ldots, x_k, \frac{x_{k+1}}{\alpha}\right), \ldots$$

$$\ldots, a_n\left(x_1, \ldots, x_k, \frac{x_{k+1}}{\alpha}, x_{k+2}, \ldots, x_{n-1}\right)\Bigg],$$

α може бути довільним із K^*, отже, H містить таблиці, висота яких збігається з h, а старший коефіцієнт довільний із K^*. За теоремою 1 підгрупа H містить всі таблиці висоти не більше $\overline{h}$.

Теорема 3. *Підгрупа* $H < \mathfrak{I}_n$ *буде характеристичною тоді і тільки тоді, коли вона містить всі таблиці із* $\mathfrak{I}_n$ *висоти менше деякого* $\overline{h} \in Q_n$.

Доведення. За теоремою 2 описана підгрупа містить образи всіх своїх елементів під дією довільного автоморфізму із $\operatorname{Aut} \mathfrak{I}_n$, а тому є характеристичною.

Навпаки. Нехай H — характеристична підгрупа в $\mathfrak{I}_n$. Можливі два випадки: або H містить таблицю U висоти $h(H)$, або ні.

В першому випадку покладемо $\overline{h}$ рівним елементу Q_n, наступному за $h(H)$. Тоді за лемою 2 одержимо, що H містить всі таблиці висоти не більше $h(H)$, або, що те ж саме, менше $\overline{h}$.

В другому випадку $h(H)$ є граничною точкою множини Q_n. Покладемо $\overline{h}$ рівним $h(H)$: $h = \sup\{h(U) \mid U \in H\}$, а отже, для довільного $\overline{g} < \overline{h}$ в H є таблиця V така, що $h(V) \geq \overline{g}$, а отже, за лемою 2 H містить всі таблиці висоти не більше $\overline{g}$. Оскільки вибір $\overline{g}$ був довільним, то H містить всі таблиці висоти менше $\overline{h}$.

Наслідок. *Решітка характеристичних підгруп групи* $\mathfrak{I}_n$ *ізоморфна решітці* Q_n.

Доведення безпосередньо випливає з попередньої теореми.

1. *Іваненко Н.* Нормальна будова групи Жонк'єра над полем характеристики нуль // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 629–698.
2. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М: Наука, 1984. – 566 с.
3. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455 с.

Одержано 14.06.93