УДК 519.21

Б. В. Бондарев, Г. Г. Жирный (Донец. ун-т)

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ПОЛЕЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

For the Wiener field with arbitrary finite number of parameters, we construct the law of iterated logarithm in the functional form. We consider the problem on containment of random fields of certain type in the curvilinear boundaries not demanding that the Cairoli–Walsh condition be satisfied.

Для вінерівського поля з довільним скінченним числом параметрів побудовано закон повторного логарифма у функціональному вигляді. Розглянуто задачу про перебування випадкових полів одного типу в криволінійних межах. Виконання умови Кайролі – Уолша не вимагається.

Закон повторного логарифма в функциональной форме для винеровского поля с произвольным конечным числом параметров доказан без предположения о выполнении условия Каироли – Уолша, что расширяет круг возможных приложений, и применен к задаче о пребывании решения усредняемого уравнения в криволинейных границах около решения усредненного уравнения.

1. Вспомогательные обозначения и определения. Обозначим

$$R_+^N = \{\bar{x} = (x^1,\dots,x^N),\ x^i \ge 0,\ i=\overline{1,N}\}, \qquad N \ge 2,$$

$$[\bar{x},\bar{y}] = \{\bar{z} \in R_+^N \colon \bar{x} \le \bar{z} \le \bar{y}\}, \qquad \bar{T} = (T,\dots,T) \in R_+^N, \quad T > 0.$$

Проекции векторов обозначаем с помощью множеств K индексного множества, которые используем как индексы. Например, если $K \in \Pi_{\mathfrak{N}}$ (множество всех подмножеств из $\mathfrak{N} = \{1,\dots,N\}$), $\bar{x} \in R_+^N$, то $\bar{x}_K$ — проекция $\bar{x}$ на координаты из K. Вообще, обозначим через Π_Q множество всех подмножеств множества Q.

Для функций $f\colon R_+^N \to R^1$ и для $D = [\bar{x},\bar{y}]$, $\bar{x}$, $\bar{y} \in R_+^N$, $T \in \Pi_{\mathfrak{N}}$ приращением f на T-границе D [1] назовем

$$\Delta_D^T f = \sum_{S \subset T} (-1)^{|T|-|S|} f((\bar{x}_{\bar{S}}, \bar{y}_S)),$$

где черта сверху означает дополнение до $\mathfrak{N}$.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — некое полное вероятностное пространство, $F = \{\mathfrak{F}_{\bar{x}},\ \bar{x} \in R_+^N\}$ — возрастающий поток σ-подалгебр:

1. $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_{(0,\dots,0)}$ содержит все P-пренебрежимые множества $\mathfrak{F}$;

2. $\mathfrak{F}_{\bar{x}} = \bigcap\limits_{\bar{u} \ge \bar{x},\ \bar{u} \ne \bar{x}} \mathfrak{F}_{\bar{u}}$.

Пусть мы имеем некий возрастающий поток σ-подалгебр $A = \{\mathfrak{A}_{\bar{x}}\}$. Рассмотрим иные потоки σ-подалгебр $(i, j = \overline{1,N})$:

$$\tilde{\mathfrak{G}}^i_{\bar{x}}(A) = \sigma\{\mathfrak{A}_{\bar{u}} \colon u^i \in [a^i, b^i],\ u^j = x^j \ \text{ при } \ j \ne i\},$$

$$\mathfrak{G}^i_{\bar{x}}(A) = \sigma\{\mathfrak{A}_{\bar{u}} \colon u^i = x^i,\ u^j \in [a^j, b^j] \ \text{ при } \ j \ne i\},$$

$$\mathfrak{G}_{\bar{x}}(A) = \sigma\{\mathfrak{G}^i_{\bar{x}}(A),\ i = \overline{1,N}\},$$

где $[\bar{a},\bar{b}]$ — множество параметров, $\bar{a}$, $\bar{b} \in R_+^N$, $\bar{a} < \bar{b}$.

Будем писать $\xi \sim \mathfrak{A}$, если случайная величина ξ измерима относительно σ-подалгебры $\mathfrak{A}$.

***Определение* 1.** *Действительнозначное случайное поле* $w(\bar{x})$, $\bar{x} \in [0, \bar{T}]$, *назовем винеровским, если* $w(\cdot)$ *является гауссовским сепарабельным,* P*-п. н. непрерывным, равно нулю на координатных гиперплоскостях и*

$$\mathrm{E}\, w(\bar{x}) = 0, \qquad \mathrm{E}\, w(\bar{x})\, w(\bar{y}) = \prod_{i=1}^{N} \min(x^i, y^i).$$

Ниже мы будем считать винеровское поле $w(\bar{x})$ и поток F такими, что $w(\bar{x}) \sim \mathfrak{F}_{\bar{x}}$, $0 \le \bar{x} \le \bar{T}$, и для $0 \le \bar{x} \le \bar{y} \le \bar{T}$ P-п. н. имеем

$$\mathrm{E}\left(\Delta_{[\bar{x}, \bar{y}]} w \mid \mathfrak{G}_{\bar{x}}(F)\right) = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{E}\left((\Delta_{[\bar{x}, \bar{y}]} w)^2 \mid \mathfrak{G}_{\bar{x}}(F)\right) = \prod_{i=1}^{N} (y^i - x^i). \tag{2}$$

Также считаем все случайные поля сепарабельными.

2. Одно свойство винеровского поля.

***Определение* 2.** *Пусть для всех* $\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]$ *имеем* $\xi(\bar{x}) \sim \mathfrak{A}_{\bar{x}}$, $\mathrm{E}|\xi(\bar{x})| < +\infty$. *Назовем* ξ $(\bar{y} \ge \bar{x})$:

1. *мартингалом относительно потока* A *на* $[\bar{a}, \bar{b}]$, *если* P*-п. н. выполняется*

$$\mathrm{E}\left(\xi(\bar{y}) \mid \mathfrak{A}_{\bar{x}}\right) = \xi(\bar{x});$$

2. N*-параметрическим почти сильным мартингалом, относительно потока* A *на* $[\bar{a}, \bar{b}]$ $((N, A, [\bar{a}, \bar{b}])$*-п. с. м.), если* P*-п. н.:*

2.1. *если* $N = 1$, *то* ξ *удовлетворяет определению* 1*-параметрического мартингала;*

2.2. *если* $N \ge 2$, *то*

$$\mathrm{E}\left(\Delta_{[\bar{x}, \bar{y}]} \xi \mid \mathfrak{G}^i_{\bar{x}}(A)\right) = 0 \qquad \forall\, i = \overline{1, N},$$

и $\eta_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^N) = \xi(\bar{x})|_{x^i = a^i}$ *является* $(N-1, \{\tilde{\mathfrak{G}}^i_{\bar{x}}(A)\}$, $[a^1, b^1] \times \ldots \times [a^{i-1}, b^{i-1}] \times [a^{i+1}, b^{i+1}] \times \ldots \times [a^N, b^N]$*-п. с. м.,* $i = 1, \ldots, N$.

Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* ξ *является* N*-параметрическим сильным мартингалом относительно потока* A *на* $[\bar{a}, \bar{b}]$ [2], *то* ξ *является* $(N, A, [\bar{a}, \bar{b}])$*-п. с. м.*

Следующая лемма указывает, что определение почти сильного мартингала в многопараметрическом случае является обобщением определения бимартингала [3].

Лемма 2. I. $(N, A, [\bar{a}, \bar{b}])$*-п. с. м. является мартингалом относительно потока* A *на* $[\bar{a}, \bar{b}]$;

II. *Пусть поток* A *таков, что на* $[\bar{a}, \bar{b}]$, *где* $b^i < +\infty$, $i = 1, \ldots, N$, *выполняется многопараметрическое условие Каироли – Уолша* [4]

$$\mathfrak{A}_{\bar{x}} \cap \mathfrak{A}_{\bar{y}} = \mathfrak{A}_{(\min(x^1, y^1), \ldots, \min(x^N, y^N))}. \tag{3}$$

Тогда мартингал относительно потока A *на* $[\bar{a}, \bar{b}]$ *является* $(N, A, [\bar{a}, \bar{b}])$*-п. с. м.*

Доказательство. I. Для $J = [\bar{x}, \bar{y}]$, $\bar{a} \le \bar{x} \le \bar{y} \le \bar{b}$, *имеем*

$$f(\bar{y}) - f(\bar{x}) = \sum_{T \in \Pi_{\mathfrak{N}},\ T \neq \varnothing} \Delta_J^T f,$$

где $f\colon R_+^N \to R^1$. Отсюда имеем первое утверждение леммы.

II. Имеем

$$\Delta_J f = (-1)^N \sum_{S \in \Pi_{\mathfrak{N}-\{i\}}} (-1)^{|S|} \big(f(\bar{x}_{S^*}, \bar{y}_{S+\{i\}}) - f(\bar{x}_{S^*+\{i\}}, \bar{y}_S) \big), \tag{4}$$

где i фиксировано и $S^* = \mathfrak{N} - \{i\} - S$.

Пусть ξ — рассматриваемый мартингал. Тогда

$$\mathrm{E}\big(\xi(\bar{x}_{S^*}, \bar{y}_{S+\{i\}}) - \xi(\bar{x}_{S^*+\{i\}}, \bar{y}_S) \,|\, \mathfrak{G}_{\bar{x}}^i(A)\big) =$$
$$= \mathrm{E}\big(\mathrm{E}\big(\xi(\bar{x}_{S^*}, \bar{y}_{S+\{i\}}) - \xi(\bar{x}_{S^*+\{i\}}, \bar{y}_S) \,|\, \mathfrak{A}_{(\bar{x}_{S^*}, \bar{y}_{S+\{i\}})}\big) \,|\, \mathfrak{A}_{(x^i, \bar{b}_{\overline{\{i\}}})}\big) =$$
$$= \mathrm{E}\big(\xi(\bar{x}_{S^*}, \bar{y}_{S+\{i\}}) - \xi(\bar{x}_{S^*+\{i\}}, \bar{y}_S) \,|\, \mathfrak{A}_{(\bar{x}_{S^*+\{i\}}, \bar{y}_S)}\big) = 0.$$

Лемма 2 доказана.

***Замечание* 1.** Далее рассматриваем общий случай и не требуем выполнения (3).

Теорема 1. *Пусть* ξ *является* $(N, A, [\bar{a}, \bar{b}])$*-п. с. м. Допустим:*

1. $b^i < +\infty \quad \forall\, i = 1, \ldots, N$;

$$\exists\, i_0 \ (1 \le i_0 \le N)\colon \ \sup_{x^{i_0} \in [a^{i_0}, b^{i_0}]} \xi(\bar{x}) \ge 0 \quad \forall\, \bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}];$$

2. $\sup\limits_{\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]} \mathrm{E}(\xi^+(\bar{x}))^p < +\infty, \ p > 1.$

Тогда справедливо неравенство

$$\mathrm{E}\left(\sup_{\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]} \xi(\bar{x})\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^{Np} \sup_{\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]} \mathrm{E}(\xi^+(\bar{x}))^p.$$

Доказательство. Используем индукцию по числу параметров N. Не умаляя общности, положим $i_0 = N$. Обозначим $J = [\bar{a}, \bar{x}]$, $Q = \{1\} \cup S$.

Тогда

$$\xi(\bar{x}) - \xi(x_0^1, x^2, \ldots, x^N) = \sum_{S \in \Pi_{\mathfrak{N}-\{1\}}} \Delta_J^Q \xi.$$

Пусть $\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]_Q$. Тогда $\xi(\bar{x}, \bar{a}_{\overline{Q}})$ является $(|S|+1, \mathfrak{F}_{(\bar{x}, \bar{b}_Q)}, [\bar{a}, \bar{b}]_Q)$-п. с. м. Отсюда имеем

$$\mathrm{E}\left(\sup_{(x^2, \ldots, x^N)} \xi(\bar{x}) \,|\, \mathfrak{F}_{(x_0^1, b^2, \ldots, b^N)}\right) \ge \sup_{(x^2, \ldots, x^N)} \xi(x_0^1, x^2, \ldots, x^N).$$

Тогда

$$\mathrm{E}\left(\sup_{\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]} \xi(\bar{x})\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{x^1 \in [a^1, b^1]} \mathrm{E}\left(\sup_{(x^2, \ldots, x^N)} \xi(\bar{x})\right)^p.$$

При каждом $x_0^1 \in [a^1, b^1]$ $\xi(x_0^1, x^2, \ldots, x^N)$ является $\Big(N-1, \{\mathfrak{F}^*_{(x^2, \ldots, x^N)} = \mathfrak{F}_{(x_0^1, x^2, \ldots, x^N)}\}, [a^2, b^2] \times \ldots \times [a^N, b^N]\Big)$-п. с. м. Тогда по индукции имеем утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим очень важный пример п. с. м. Обозначим

$$\mathfrak{z}(\bar{y}) = \exp\left(\int\limits_{[0,\,\bar{y}]} f(\bar{u})\, dw(\bar{u}) - \frac{1}{2} \int\limits_{[0,\,\bar{y}]} f^2(\bar{u})\, d\bar{u} \right),$$

где случайное поле $f(\bar{u}) \sim \mathfrak{F}_{\bar{u}}$ удовлетворяет соотношению

$$P\left\{ \int\limits_{[0,\,\bar{T}]} f^2(\bar{u})\, d\bar{u} < +\infty \right\} = 1.$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathrm{E}\,\mathfrak{z}(\bar{T}) = 1$; *тогда случайное поле* $\mathfrak{z}$ *является* $(N, F, [0, \bar{T}])$*-п. с. м.*

Доказательство. В силу представления (4) имеем

$$\Delta_{[\bar{x},\,\bar{y}]}\mathfrak{z} = \sum_{S \in \Pi_{\mathfrak{N}-\{i\}}} (-1)^{|S|} \mathfrak{z}(\bar{y}_S, \bar{x}_{S^*+\{i\}}) \times$$

$$\times \left(\exp\left(\int\limits_{J^*} \left(f(\bar{u})\, dw(\bar{u}) - \frac{1}{2} f^2(\bar{u})\, d\bar{u} \right) \right) - 1 \right),$$

где $J^* = [(O_{\mathfrak{N}-\{i\}}, x^i), (\bar{y}_{S+\{i\}}, \bar{x}_{S^*})]$. Далее,

$$\mathfrak{G}^i_{\bar{x}}(F) \le \mathfrak{G}_{(O_{\mathfrak{N}-\{i\}},\, x^i)}(F) \qquad \forall\, i = \overline{1, N}.$$

Тогда в силу леммы 4 из [2] имеем требуемое. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\bar{h} \in [0, \bar{T}]$. *Тогда* $(x > 0,\ x \in R^1)$:

$$P_0 = P\left\{ \sup_{\bar{t} \in [0,\,\bar{h}]} \exp w(\bar{t}) > x \right\} \le 2^{2N} \exp\left(-\frac{x^2}{2\prod_{i=1}^N h^i} \right).$$

Доказательство. Для произвольного $z > 0$ в силу леммы 3 и теоремы 1 настоящей работы имеем

$$P_0 \le P\left\{ \sup_{\bar{t} \in [0,\,\bar{h}]} \exp\left(z w(\bar{t}) - \frac{1}{2} z^2 \prod_{i=1}^N t^i \right) > \exp\left(z x - \frac{z^2}{2} \prod_{i=1}^N h^i \right) \right\} \le$$

$$\le 2^{2N} \exp\left(-2zx + 2z^2 \prod_{i=1}^N h^i \right).$$

Минимизируя по $z > 0$, получаем искомое. Лемма 4 доказана.

Замечания. 2. Очевидно, что аналогичное утверждение имеет место для стохастических интегралов Ито от ограниченных функций.

3. С учетом последней леммы результаты [5] очевидним образом могут быть распространены на случай произвольного потока F, удовлетворяющего (1) и (2). Также можно отказаться от использования понятия субгауссовости в [2] и получить чисто экспоненциальные оценки в соответствующих результатах.

3. Функциональный закон повторного логарифма. В данном пункте мы обобщим на случай нескольких параметров теорему 1 из [6]. Для случая одного параметра имеется более общий результат в [7]. При доказательстве мы будем пользоваться методикой [8, с. 48 – 51], не использующей в отличие от [6] понятия момента остановки.

Теорема 2. *Множество предельных точек последовательности*

$$g_n(\bar{t}) \leq \frac{w(n\bar{t})}{\sqrt{n^N 2 \ln\ln n}}$$

в пространстве $C_{[0,1]^N}$ *с равномерной метрикой совпадает с вероятностью* 1 *со множеством* K *функций* f, *равных нулю на координатных гиперплоскостях, абсолютно непрерывных и таких, что*

$$\int\limits_{[0,1]^N} \left(\frac{\partial^N f}{\partial x^1 \ldots \partial x^N} \right)^2 d\bar{x} \leq 1,$$

где производная $\dfrac{\partial^N f}{\partial x^1 \ldots \partial x^N}$ *понимается в смысле Радона–Никодима.*

Доказательство. Разобьем многомерный куб $[0,1]^N$ на m^N кубов с длиной ребра $1/m$. Число m выберем позднее. Данной непрерывной функции $q(\bar{x})$ поставим в соответствие при $\bar{x} \in J_j = [\bar{x}_j, \bar{y}_j]$ ее приближение

$$q^m(\bar{x}) = \sum_{T \in \Pi_{\mathfrak{N}}} \Delta_{J_j}^T \xi \prod_{i \in T} \frac{x^i - x_j^i}{y_j^i - x_j^i},$$

полагая элемент суммы при $T = \varnothing$ равным $\xi(\bar{x}_j)$. Обозначим через K^ε ε-окрестность множества K и, выбирая $r > 1$ достаточно близким к 1 и m достаточно большим, аналогично [8] получаем

$$P\{r^{-1} g_n^m \notin K\} \leq C_1 \exp(-r \ln\ln n);$$

$$P\left\{ r^{-1} g_n^m \in K, \ (1 - r^{-1}) \| g_n^m \| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} = 0.$$

С учетом леммы 4 при $m > (64 r/\varepsilon^2)^{1/N}$ имеем

$$P\left\{ \| g_n - g_n^m \| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leq 2m^N P\left\{ \sup_{\bar{t} \in [0, n/m]^N} |w(\bar{t})| > \frac{\varepsilon}{8} \sqrt{n^N \ln\ln n} \right\} \leq$$
$$\leq C_2 \exp(-r \ln\ln n).$$

Полагая $c > 1$, $n_k = [c^k]$, по лемме Бореля–Кантелли имеем $g_{n_k} \in K^\varepsilon$ P-п. н. и для $k > k_0(\varepsilon, \omega, c)$.

Для $\bar{t}, \bar{s} \in R_+^N$ определим следующую операцию: $\bar{t} \circ \bar{s} = (t^1 s^1, \ldots, t^N, s^N)$. Тогда

$$\sup_{\bar{a} \leq \bar{t}, \ \bar{s} \leq \bar{b}} |w(\bar{t}) - w(\bar{s})| = \sup_{\bar{t}, \bar{s} \in [0, \bar{1}]} |w(\bar{a} + \bar{t} \circ (\bar{b} - \bar{a})) - w(\bar{a} + \bar{s} \circ (\bar{b} - \bar{a}))| \leq$$
$$\leq \sum_{T \in \Pi_{\mathfrak{N}}, \ T \neq \varnothing} \ \sup_{0 \leq \bar{t}, \bar{s} \leq \bar{1}} |\xi(\bar{s}_T) - w(\bar{t}_T)|,$$

где

$$\xi(\bar{s}) = \Delta_{[(\bar{a}_T, 0_{\bar{T}}), (\bar{a}_T + \bar{s} \circ (\bar{b}_T - \bar{a}_T), \bar{a}_{\bar{T}})]} w, \qquad \bar{s} \in [0, \bar{1}]_T.$$

Легко видеть, что

$$\xi(\bar{s}) \sim \mathfrak{F}_{\bar{s}}^* = \mathfrak{F}_{(\bar{a}_T + \bar{s} \circ (\bar{b}_T - \bar{a}_T), \bar{b}_{\bar{T}})}.$$

Пусть $F = \{\mathcal{F}^*_{\bar{s}}\}$. Имеем ($\bar{s} \in [0, 1]^N$):

$$\mathfrak{G}_{\bar{s}_T}(F^*) = \begin{cases} \sigma\{\mathfrak{F}_{(a^i + s^i(b^i - a^i), \bar{b}_{\mathfrak{N}-\{i\}})}, \ i \in T\} & \text{при } |T| > 1; \\ \mathfrak{F}_{(\bar{a}_T + \bar{s}_T \circ (\bar{b}_T - \bar{a}_T), \bar{b}_{\bar{T}})} & \text{при } |T| = 1. \end{cases}$$

Таким образом, $\mathfrak{G}_{\bar{s}_T}(F^*) \subseteq \mathfrak{G}_{\bar{a} + \bar{s} \circ (\bar{b} - \bar{a})}(F)$. В то же время

$$\Delta_{[\bar{u}, \bar{v}]} \xi = \Delta_{[(\bar{a}_T + \bar{u} \circ (\bar{b}_T - \bar{a}_T), 0_{\bar{T}}), (\bar{a}_T + \bar{v} \circ (\bar{b}_T - \bar{a}_T), \bar{a}_{\bar{T}})]} w, \tag{5}$$

где $\bar{u}, \bar{v} \in [0, \bar{1}]_T$, $\bar{u} \leq \bar{v}$.

При каждом $\bar{s}_T$ поле $\xi(\bar{s}_T)$ имеет $N\left(0, \prod_{i \in T} (b^i - a^i) \prod_{j \in \bar{T}} a^j\right)$-распределение. Из (5) P-п. н. имеем

$$\mathrm{E}(\Delta_{[\bar{u}, \bar{v}]} \xi \mid \mathfrak{G}_{\bar{u}}(F^*)) = 0;$$

$$\mathrm{E}((\Delta_{[\bar{u}, \bar{v}]} \xi)^2 \mid \mathfrak{G}_{\bar{u}}(F^*)) = \prod_{i \in T} (b^i - a^i)(v^i - u^i) \prod_{j \in \bar{T}} a^j,$$

и приращение $\xi(\cdot)$ на непересекающихся параллелепипедах независимы. Тогда поле

$$\eta(\bar{t}) = \frac{\xi(\bar{t})}{\sqrt{\prod_{i \in T} (b^i - a^i) \prod_{j \in \bar{T}} a^j}}$$

винеровское относительно потока F^* при $\bar{t} \in [0, \bar{1}]_T$.

Рассмотрим

$$P_1 = P\left\{ \sup_{0 \leq \bar{t}, \bar{s} \leq \bar{n}_k, |s^i - t^i| \leq \Delta_k, \ i = \overline{1, N}} |w(\bar{t}) - w(\bar{s})| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n_k^N 2 \ln \ln n_k} \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{p_i = 0 \\ i = \overline{1, N}}}^{d_k} P\left\{ \sup_{t^i, s^i \in [\Delta_k p_i, \Delta_k (p_i + 2)], \ i = \overline{1, N}} |w(\bar{t}) - w(\bar{s})| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n_k^N 2 \ln \ln n_k} \right\},$$

где

$$\Delta_k = n_{k+1} - n_k, \quad d_k = \max\left\{\left[\frac{n_{k+1}}{\Delta_k}\right] - 2, 0\right\}.$$

Оценим

$$P\left\{ \sup_{\bar{a} \leq \bar{t}, \bar{s} \leq \bar{b}} |w(\bar{t}) - w(\bar{s})| > x \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{T \in \Pi_{\mathfrak{N}}, \ T \neq \varnothing} P\left\{ \sup_{\bar{t}, \bar{s} \in [0, 1]^N} |\eta(\bar{t}_T) - \eta(\bar{s}_T)| > \right.$$

$$\left. > \frac{x}{(|\Pi_{\mathfrak{N}}| - 1)\sqrt{\prod_{i \in T} (b^i - a^i) \prod_{j \in \bar{T}} a^j}} \right\}.$$

Получим сумму вероятностей уклонения за данный уровень колебаний винеровских полей с различным числом параметров от 1 (соответственно при $|T| =$

$= 1$) до N (соответственно $T = \mathfrak{N}$). Продолжаем последнюю оценку, применяя лемму 4:

$$P_1 \le \left[\frac{n_{k+1}}{\Delta_k}\right]^N (|\Pi_{\mathfrak{N}}| - 1) \times$$

$$\times\, 2^{2N+1} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n_k^N \ln\ln n_k}{16(|\Pi_{\mathfrak{N}}|-1)^2 (2\Delta_k)^{|T|}} (\Delta_k \max\{d_k, 1\})^{-|\bar{T}|}\right) \le$$

$$\le C_3 \exp\left(-\frac{C_4 \ln\ln n_k}{(n_{k+1}/n_k - 1)^N (\max\{d_k, 1\})^{|\bar{T}|}}\right) \le C_3 \exp(-\gamma \ln\ln n_k),$$

где последнее неравенство верно для c достаточно близких к 1, $\gamma = \gamma(c) > 1$ и достаточно больших k. Требуемая экспоненциальная оценка для

$$P\left\{\sup_{0 \le \bar{t} \le \bar{n}} |w(\bar{t})| > \frac{\varepsilon}{2}((2n_k^N \ln\ln n_k)^{-1/2} - (2n_{k+1}^N \ln\ln n_{k+1})^{-1/2})^{-1}\right\}$$

может быть получена из леммы 4. По лемме Бореля – Кантелли $g_n \in K^{\varepsilon}$ для P-почти всех ω и при всех $n > n_0(\omega, \varepsilon)$.

Таким образом, остается показать, что для любой функции $f \in K$ такой, что

$$\int_{[0,1]^N} \left(\frac{\partial^N f}{\partial x^1 \ldots \partial x^N}\right)^2 d\bar{x} = a^2 < 1,$$

будет выполнено $P\{g_n \in (\{f\})^{\varepsilon}$ бесконечно часто$\} = 1$.

Будем рассуждать аналогично [8]. Заметим, что

$$\{\|g_n^m - f^m\| < \varepsilon\} = \left\{\sup_{i \in \overline{1, m^N}} \sup_{\bar{t} \in J_i} |g_n^m(\bar{t}) - f^m(\bar{t})| < \varepsilon\right\} \supset$$

$$\supset \left\{\sup_{i \in 1, \ldots, m^N} |\Delta_{J_i}(g_n - f| < \frac{\varepsilon}{m^N}\right\} = B_n.$$

Покажем, что с вероятностью 1 происходит бесконечно много событий B_{m^l}:

$$P\{B_{m^l}\} \ge \prod_{i=1}^{m^N} P\left\{|\Delta_{J_i} f| \sqrt{2m^{lN} \ln\ln m^l} <\right.$$

$$\left.< \frac{\Delta_{J_i} w_{m^l}}{m^{lN/2}\, m^{-N/2}} < \frac{\varepsilon}{m^N} + |\Delta_{J_i} f| \sqrt{2m^{lN} \ln\ln m^l}\right\},$$

где $w_n(\bar{t}) = w(n\bar{t})$. Тогда существует $\delta \in (a, 1)$, $\delta \in \delta(f, m)$ такое, что

$$P\{B_{m^l}\} \ge \exp(-\delta \ln\ln m^l),$$

что и требовалось доказать. Теорема 2 доказана.

4. О пребывании полей в криволинейных границах. В этом пункте будут указаны нелинейные границы, в которых с вероятностью, близкой к 1, будут находиться поля из одного класса.

Докажем важное вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Если на* $[0,1]^N$ $v(\bar{x}) \geq 0$, $g(\bar{x}) \geq 0$,

$$v(\bar{x}) \leq q(\bar{x}) \leq 1 + \int\limits_{[0,\bar{x}]} v(\bar{u})\, g(\bar{u})\, d\bar{u},$$

то

$$v(\bar{x}) \leq \exp\left(\int\limits_{[0,\bar{x}]} g(\bar{u})\, d\bar{u} \right).$$

Доказательство. При $N=2$ имеем

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) \leq v(\bar{x})\, g(\bar{x}) \leq g(\bar{x})\, q(\bar{x}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}}(\ln q(\bar{x})) \leq \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) \frac{1}{q(\bar{x})} \leq g(\bar{x}),$$

откуда получаем требуемое.

Пусть $N > 2$. Тогда получаем

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^{N-1} \partial x^N}(\bar{x}) \frac{1}{q(\bar{x})} \geq \frac{\partial^2}{\partial x^{N-1} \partial x^N}(\ln q(\bar{x})) =$$

$$= \int\limits_0^{x^1} \ldots \int\limits_0^{x^{N-2}} \frac{\partial^N}{\partial \bar{u}\, \partial x^{N-1} \partial x^N} (\ln q(\bar{u}, x^{N-1}, x^N))\, d\bar{u}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 q(\bar{x})}{\partial x^{N-1} \partial x^N} = \int\limits_0^{x^1} \ldots \int\limits_0^{x^{N-2}} v(\bar{u}, x^{N-1}, x^N)\, g(\bar{u}, x^{N-1}, x^N)\, d\bar{u} \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{x^1} \ldots \int\limits_0^{x^{N-2}} q(\bar{u}, x^{N-1}, x^N)\, g(\bar{u}, x^{N-1}, x^N)\, d\bar{u} \leq$$

$$\leq q(\bar{x}) \int\limits_{[0,\bar{x}_s]} g(\bar{u}, x^{N-1}, x^N)\, d\bar{u}, \qquad s = \{1, \ldots, N-2\}.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\ln q(\bar{x}) \leq \int\limits_{[0,\bar{x}]} g(\bar{u})\, d\bar{u},$$

откуда вытекает утверждение леммы. Лемма 5 доказана.

Теорема 3. *Пусть поле* z_n *задано на* $[0,\lambda]^N$ *стохастическим уравнением*

$$z_n(\bar{x}) = n^{-N} \left(\int\limits_{[0,\bar{x}]} a(\bar{y}, z_n(\bar{y}))\, d\bar{y} + w(\bar{x}) \right),$$

неслучайное поле z_0 *задано уравнением*

$$z_0(\bar{x}) = \int\limits_{[0,\bar{x}]} a_0(z_0(\bar{y}))\, d\bar{y}$$

и выполнены условия:

1) $|a(\bar{t}, u)| \le C(1+|u|)$, $|a'_u(\bar{t}, u)| \le C_1$, $|a''_{uu}(\bar{t}, u)| \le C_2$;

2) *равномерно по* $\bar{y} \in R_+^N$, $u \in R^1$

$$\lim_{T \to +\infty} T^{-N} \int\limits_{[\bar{y}, \bar{y}+\bar{T}]} a(\bar{t}, u)\, d\bar{t} = a_0(u);$$

3) *для любой абсолютно непрерывной функции* f *с интегрируемой в квадрате производной Радона–Никодима выполнено при* $n \to +\infty$

$$\int\limits_{[0, \bar{x}]} f(\bar{y})\, a'_u(n\bar{y}, z_0(\bar{y}))\, d\bar{y} \to \int\limits_{[0, \bar{x}]} f(\bar{y})\, \alpha(\bar{y})\, d\bar{y},$$

где $|\alpha(\cdot)| \le C_3$;

4) *при* $n \to +\infty$

$$\|\rho_n(\bar{x})\| \le \sqrt{\frac{n^N}{2 \ln \ln n}} \left\| \int\limits_{[0, \bar{x}]} \left(a(n\bar{y}, z_0(\bar{y})) - a_0(z_0(\bar{y}))\right) d\bar{y} \right\| \to 0.$$

Тогда при $n \to +\infty$ *для всех* $t \in [0,1]^N$ *с вероятностью, близкой к* 1, *будет выполнено неравенство*

$$|z_n(n\bar{t}) - z_0(\bar{t})| \le \sqrt{n^{-N} 2 \ln \ln n \int\limits_{[0, \bar{t}]} \exp\left(2 \int\limits_{[0, \bar{x}]} |\alpha(\bar{u})|\, d\bar{u}\right) d\bar{x}}.$$

Доказательство. Условия теоремы о существовании и единственности решения стохастического уравнения [9] выполнены. Обозначим

$$\xi_n(\bar{t}) = \sqrt{\frac{n^N}{2 \ln \ln n}} \left(z_n(n\bar{t}) - z_0(\bar{t})\right).$$

Из липшицевости функции $a(\cdot)$ имеем

$$|\xi_n(\bar{t})| \le C_1 \int\limits_{[0, \bar{t}]} |\xi_n(\bar{u})|\, d\bar{u} + |\rho_n(\bar{t})| + |g_n(\bar{t})|,$$

где g_n такое же, как и в теореме 2. По лемме Гронуолла

$$\|\xi_n\| \le (1+3\varepsilon) \exp C_1 = L < +\infty$$

в силу условия 4 теоремы и, так как для достаточно больших n P-п. н. выполнено $\|g_n\| \le 1 + 2\varepsilon$,

$$|g_n(\bar{t}) - g_n(\bar{s})| \le C_5 \sqrt{\max_{i=\overline{1,N}} |t^i - s^i|} + \varepsilon,$$

где $C_5 = C_5(N)$.

Обозначим

$$\eta_n(\bar{t}) = \int\limits_{[0, \bar{t}]} a'_u(n\bar{s}, z_0(\bar{s}))\, \eta_n(\bar{s})\, d\bar{s} + g_n(\bar{t}).$$

Тогда справедливо соотношение

$$|\xi_n(\bar{t}) - \eta_n(\bar{t})| \le$$

$$\le \int\limits_{[0, \bar{t}]} \left(|a'_u(n\bar{s}, z_0(\bar{s}))\, (\xi_n(\bar{s}) - \eta_n(\bar{s}))| + \frac{C_2}{2} \sqrt{\frac{2 \ln \ln n}{n^N}}\, \xi_n^2(\bar{s}) \right) d\bar{s} + \varepsilon \le$$

$$\leq \frac{C_2}{2}\sqrt{\frac{2\ln\ln n}{n^N}}L^2 + \varepsilon + C_1 \int\limits_{[0,\bar{t}]} |\xi_n(\bar{s}) - \eta_n(\bar{s})|\, d\bar{s}\,,$$

откуда имеем

$$\|\xi_n - \eta_n\| \leq \left(\frac{C_2}{2}\sqrt{\frac{2\ln\ln n}{n^N}}L^2 + \varepsilon\right)\exp C_1\,.$$

Рассмотрим множество неслучайных функций вида

$$\eta(\bar{s}) = \int\limits_{[0,\bar{s}]} \alpha(\bar{u})\,\eta(\bar{u})\,d\bar{u} + f(\bar{s}), \qquad f \in K. \tag{6}$$

Для произвольного ε P-п. н. при каждом ω, начиная с достаточно больших $n^* > n_1^*(\omega,\varepsilon)$, для подпоследовательности, для которой $g_{n^*} \to f$, имеем

$$|\eta_{n^*}(\bar{t}) - \eta(\bar{t})| \leq \left| \int\limits_{[0,\bar{t}]} (a'_u(n^*\bar{s}, z_0(\bar{s}))\,\eta_{n^*}(\bar{s}) - a'_u(n^*\bar{s}, z_0(\bar{s}))\,\eta(\bar{s}) + \right.$$

$$\left. + \; a'_u(n^*\bar{s}, z_0(\bar{s}))\,\eta(\bar{s}) - \alpha(\bar{s})\,\eta(\bar{s})\,d\bar{s}\right| + |g_{n^*}(\bar{t}) - f(\bar{t})| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{[0,\bar{t}]} (a'_u(n^*\bar{s}, z_0(\bar{s}))\,\eta(\bar{s}) - \alpha(\bar{s})\,\eta(\bar{s}))\,ds \right| +$$

$$+ \; C_1 \int\limits_{[0,\bar{t}]} |\eta_{n^*}(\bar{s}) - \eta(\bar{s})|\,d\bar{s} + |g_{n^*}(\bar{t}) - f(\bar{t})| \leq$$

$$\leq C_1 \int\limits_{[0,\bar{t}]} |\eta_{n^*}(\bar{s}) - \eta(\bar{s})|\,d\bar{s} + \varepsilon\,,$$

следовательно, $\|\eta_{n^*} - \eta\| \leq \varepsilon \exp C_1$.

Представим решение (6) в удобном для нас виде. По аналогии со случаем двух параметров [10, с. 62–67] назовем функцией Римана уравнения (6) — решение $R(\bar{x},\bar{y})$ следующего интегрального уравнения $(\bar{x},\bar{y} \in [0,1]^N)$:

$$R(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^N + \int\limits_{[\bar{y},\bar{x}]} R(\bar{s},\bar{y})\,\alpha(\bar{s})\,d\bar{s}\,.$$

Легко проверить, что если выполнено

$$\frac{\partial^N}{\partial y^1 \ldots \partial y^N} R(\bar{x},\bar{y}) = \alpha(\bar{y})\,R(\bar{x},\bar{y})\,,$$

то решение (6) имеет вид

$$\eta(\bar{t}) = \int\limits_{[0,\bar{t}]} R(\bar{s},\bar{t})\,\frac{\partial^N f}{\partial s^1 \ldots \partial s^N}\,d\bar{s}\,.$$

Методика [10] для N параметров приведет к необходимости построения весьма громоздкого дифференциального тождества. Однако в силу более частного вида уравнения (6) можно поступить следующим образом:

$$\frac{\partial^N R(\bar{x},\bar{y})}{\partial y^1 \ldots \partial y^N} - \alpha(\bar{y})\,R(\bar{x},\bar{y}) =$$

$$= \int\limits_{[\bar{y},\bar{x}]} \left(\frac{\partial^N}{\partial y^1 \ldots \partial y^N} R(\bar{s}, \bar{y}) - \alpha(\bar{y})\, R(\bar{s}, \bar{y}) \right) \alpha(\bar{s})\, d\bar{s} ,$$

откуда имеем

$$\left| \frac{\partial^N R(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y^1 \ldots \partial y^N} - \alpha(\bar{y})\, R(\bar{x}, \bar{y}) \right| \le C_3 \int\limits_{[0,\bar{x}]} \left| \frac{\partial^N R(\bar{s}, \bar{y})}{\partial y^1 \ldots \partial y^N} - \alpha(\bar{y})\, R(\bar{s}, \bar{y}) \right| d\bar{s} .$$

Тогда в силу леммы Гронуолла

$$\frac{\partial^N}{\partial y^1 \ldots \partial y^N} R(\bar{x}, \bar{y}) - \alpha(\bar{y})\, R(\bar{x}, \bar{y}) = 0 ,$$

что и требовалось доказать.

Из вида функции Римана следует, что для всех $\bar{y} \in [0, 1]^N$

$$|R(\bar{x}, \bar{y})| \le 1 + \int\limits_{[0,\bar{x}]} |R(\bar{s}, \bar{y})|\,|\alpha(\bar{s})|\, d\bar{s} .$$

Применяя лемму 5, для всех $\bar{y} \in [0, 1]^N$ имеем

$$|R(\bar{x}, \bar{y})| \le \exp\left(\int\limits_{[0,\bar{x}]} |\alpha(\bar{y})|\, d\bar{y} \right),$$

следовательно,

$$|\eta(\bar{t})| \le \sqrt{\int\limits_{[0,\bar{t}]} \exp\left(2 \int\limits_{[0,\bar{x}]} |\alpha(\bar{y})|\, d\bar{y} \right) d\bar{x}} .$$

Тогда в силу полученных выше оценок для достаточно больших n имеем с вероятностью, близкой к 1, что поле $z_n(n\bar{t})$ находится в указанных криволинейных границах. Теорема 3 доказана.

5. Пример. Пусть $N = 3$, $a(x, y, z, u) = \sin^2(x + y + z + u)$. Тогда

$$\lim_{T \to +\infty} T^{-3} \int\limits_x^{x+T} \int\limits_y^{y+T} \int\limits_z^{z+T} a(t_1, t_2, t_3, u)\, d\bar{t} \equiv \frac{1}{2}, \qquad z_0(x, y, z) = \frac{xyz}{2} .$$

Далее,

$$2 \sqrt{\frac{2 \ln \ln n}{n^N}}\, |\rho_n(x, y, z)| =$$

$$= \left| \int\limits_0^x \int\limits_0^y \int\limits_0^z \cos 2\left(nt + ns + np + \frac{tsp}{2} \right) dt\, ds\, dp \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{1}{2n + ts} \left(\sin 2\left(nt + ns + nz + \frac{tsz}{2} \right) - \sin 2(nt + ns) \right) dt\, ds \right| .$$

Имеем

$$\left| \int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{1}{2n + ts} \sin 2\left(nt + ns + nz + \frac{tsz}{2} \right) dt\, ds \right| =$$

$$= \left| \int_0^x \left(\frac{1}{2n+ts} \frac{-1}{2n+tz} \cos 2\left(nt + ns + nz + \frac{tsz}{2} \right) \Big|_{s=0}^{s=y} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_0^y \frac{t}{(2n+ts)^2} \frac{1}{2n+tz} \cos 2\left(nt + ns + nz + \frac{tsz}{2} \right) ds \right) dt \right| = o_{n\to+\infty}(n^{-2}),$$

аналогично для второго интеграла, т. е. условие 4 теоремы 3 выполнено.

Легко проверить, что условие 3, носящее технический характер, также выполнено в нашем случае с $\alpha(\cdot) = 0$. Тогда при $n \to +\infty$ для всех $(x, y, z) \in$ $\in [0, 1]^3$ с вероятностью, близкой к 1, для решения уравнения

$$z_n(x, y, z) = n^{-3} \left(\int\limits_{[0,(x,y,z)]} \sin^2(s + t + p + z_n(s, t, p))\, ds\, dt\, dp + w(x, y, z) \right)$$

будет выполнено неравенство

$$\left| z_n(nx, ny, nz) - \frac{xyz}{2} \right| \leq \sqrt{xyz \frac{2 \ln \ln n}{n^3}}.$$

1. *Imkeller P.* Stochastic calculus for continuous N-parameter strong martingales // Stoch. Processes and their Applications. – 1985. – № 20. – P. 1–40.
2. *Бондарев Б. В., Жирный Г. Г.* Некоторые свойства многопараметрических случайных полей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 12. – С. 1609–1622.
3. *Гихман И. И.* Двупараметрические мартингалы // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 6 (228). – С. 1–28.
4. *Fazekas I.* On convergence of multiparameter strong martingales in Banach lattices // Analysis Mathematica. – 1984. – № 10. – P. 202–207.
5. *Bondarev B. V., Jirny G. G.* On the functional of effect for the multiparametric random fields // Random Operators and Stoch. Equats. – 1995. – **3**, № 2. – P. 37–46.
6. *Strassen V.* An invariance principle for the law of the iterated logarithm // Z. Wahrsheinlichkeits-theorie verw. Gebiete. – 1964. – **3**, № 3. – P. 211–226.
7. *Булинский А. В.* Новый вариант функционального закона повторного логарифма // Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – **25**, № 3. – С. 502–512.
8. *Булинский А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и полей. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 64 с.
9. *Пономаренко Л. Л.* Стохастические интегралы по многопараметрическому броуновскому движению и связанные с ними стохастические уравнения // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1972. – № 7. – С. 100–109.
10. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

Получено 11.04.95