УДК 517.9

Ю. Л. Майстренко, О. В. Попович (Ін-т математики НАН України, Київ)

ІСНУВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛАНЦЮГІВ ЗВ'ЯЗАНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

A nonlinear system of difference equations is considered. This system corresponds to chains of N symmetrically connected oscillators with sufficiently general type of connection, which includes, among others, the local and global connection. A theorem on existence and stability of space-time periodic solutions is proved for sufficiently small values of parameter of connection.

Розглядається нелінійна система різницевих рівнянь, що відповідає ланцюгам із N симетрично зв'язаних осциляторів з досить загальним типом зв'язку, що включає в себе серед інших локальний та глобальний зв'язок. Доводиться теорема про існування та стійкість просторово-часових періодичних розв'язків цих систем при досить малих значеннях параметра зв'язку ε.

1. Постановка задачі. Означення ланцюга зв'язаних осциляторів (ЛЗО) грунтується на введені дискретної множини Ω, яка в подальшому буде називатися решіткою, а її елементи — елементами решітки. Ця множина Ω може бути скінченною, зліченною або незліченною. Прикладами решітки можуть бути множина $Z_N^+ \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, N\}$, множина натуральних, цілих чисел та інші.

Кожному елементу решітки $\omega \in \Omega$ поставимо у відповідність деякий локальний фазовий простір X_ω із, взагалі кажучи, незліченною кількістю елементів. Тоді фазовий простір ЛЗО — це прямий добуток локальних фазових просторів X_ω:

$$X \overset{\text{def}}{=} \prod_{\omega \in \Omega} X_\omega,$$

і отже, точка $\mathbf{x} \in X$ зображається як $\mathbf{x} = \{x_\omega\}_{\omega \in \Omega}$, де $x_\omega \in X_\omega$. У загальному вигляді під ланцюгом зв'язаних осциляторів розуміють відображення $\Phi: X \to X$, що зберігає структуру решітки, тобто

$$\Phi \mathbf{x} = \{\Phi_\omega \mathbf{x}\}_{\omega \in \Omega},$$

де $\Phi_\omega: X \to X_\omega$.

У даній роботі буде розглянуто частковий випадок $\Omega = Z_N^+$, $X_\omega = I$, де I — обмежений замкнений інтервал прямої. Таким чином, фазовий простір ЛЗО являє собою N-вимірний куб із $\mathbf{R}^N$: $X = I^N$, а точка фазового простору $\mathbf{x} \in I^N$ відповідно — N-вимірний вектор $\mathbf{x} = \{x(i)\}_{i=1}^N$, $x(i) \in I$, $i = \overline{1, N}$. Припустимо також, що відображення ЛЗО Φ_ω є суперпозицією двох операторів: нелінійного F та лінійного G_ε:

$$\Phi_\varepsilon = G_\varepsilon \cdot F, \tag{1}$$

таких, що нелінійний оператор $F: \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ діє покоординатно $(F\mathbf{x})_i = f(x(i))$, де $f: I \to I$ — деяке відображення відрізка, а лінійний оператор G_ε: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ є ε-близьким до тотожного $id \overset{\text{def}}{=} E$ і має вигляд $G_\varepsilon = (1-\varepsilon)E + \varepsilon G$. Дія оператора G може бути зображена як множення вектора на дійсну квадратну матрицю $\{g(i,j)\}_{i,j=1}^N$ розміру $N \times N$, яка визначає форму зв'язку між елементами решітки, в той час як параметр $\varepsilon \ge 0$ визначає силу цього зв'язку.

При зроблених припущеннях маємо систему різницевих рівнянь, що породжується відображенням ЛЗО у формі (1):

$$x_{n+1}^{\varepsilon}(i) = (1-\varepsilon) f\left(x_n^{\varepsilon}(i)\right) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} g(i, j) f\left(x_n^{\varepsilon}(j)\right), \tag{2}$$

$$i = \overline{1, N}, \quad n \in Z^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Система (2) задає дискретний закон зміни у часі початкового вектора $\mathbf{x}_0^{\varepsilon} = \{x_0^{\varepsilon}(i)\}_{i=1}^{N}$ таким чином, що при відомому його положенні в довільний момент часу $t = n$, $n \in Z^+$, однозначно знаходиться його положення в наступний момент часу $t = n + 1$.

На матрицю $G = \{g(i, j)\}_{i,j=1}^{N}$ накладемо умову

$$\sum_{j=1}^{N} g(i, j) = 1, \quad \forall\, i = \overline{1, N}; \qquad g(i,j) \geq 0, \quad i,j = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Співвідношення (3) гарантує збереження однорідності вектора $\mathbf{x}_n^{\varepsilon} = \{x_n^{\varepsilon}(i)\}_{i=1}^{N}$ при всіх $\varepsilon \geq 0$ і $n \in Z^+$: якщо $x_0^{\varepsilon}(i) = x_0^{\varepsilon}(j)$ для всіх $i, j = \overline{1, N}$, то $x_n^{\varepsilon}(i) = x_n^{\varepsilon}(j)$ для всіх $i, j = \overline{1, N}$ та $n = 0, 1, \ldots$, $\varepsilon \geq 0$.

Також припустимо, що система (2) є симетричною в тому сенсі, що зв'язок кожного осцилятора з іншими залежить лише від відхилення елементів решітки один від одного і не залежить від номера осцилятора. Ця властивість формалізується наступним чином. Нехай функція $d(i, j)$, $i, j \in Z_N^+$, є відхиленням елемента решітки j від i, що задається формулою

$$d(i,j) = \begin{cases} j - i, & |j-i| \leq N/2; \\ j - i - N \operatorname{sign}(j-i), & |j-i| > N/2. \end{cases}$$

Тоді, які б не були i_1, i_2, j_1, $j_2 \in Z_N^+$ такі, що $d(i_1, j_1) = d(i_2, j_2)$, має місце рівність

$$g(i_1, j_1) = g(i_2, j_2). \tag{4}$$

Модель ЛЗО у формі (2) з обмеженням (3) і (4) розглядалася багатьма авторами (див., наприклад, [1–6]). Грунтуючись на інтересах практики, значну увагу привертає проблема виникнення та стійкості просторово-часових структур як регулярних, так і хаотичних, притягаючих многовидів, наприклад торів, а також їх біфуркацій. Зокрема, стійкість періодичних просторово-часових структур періоду 2 було розглянуто в [3]. Питання про виникнення, стійкість та еволюцію інваріантних торів, так само як про їх руйнування, вивчалося в [4].

У даній роботі розглядаються ЛЗО у випадку слабкої взаємодії, тобто $0 < \varepsilon \ll 1$, коли починає виявлятися зв'язок моделі, що розглядається, з нелінійним різницевим рівнянням $y(t+1) = f(y(t))$, $t \in \mathbf{R}^+$, дослідженим в [7].

2. Асимптотична поведінка розв'язків ЛЗО. Доведено теорему про стійкість розв'язків незв'язної $(\varepsilon = 0)$ системи (2) при малих збуреннях початкових даних та введені малого зв'язку $\varepsilon > 0$ при досить загальних обмеженнях на функцію f та початкові дані. Крім того, в цьому випадку доведено, що асимптотично (при $n \to \infty$) розв'язок системи (2) має таку ж просторово-часову структуру, як і розв'язок незв'язної системи (тобто незбурений розв'язок). Ці факти мають місце при наступних умовах.

1. Функція f є ліпшицевою, тобто існує $L > 0$ таке, що

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2| \qquad \forall\, x_1, x_2 \in I. \tag{5}$$

2. Множина P_+, яка являє собою множину точок всіх притягаючих циклів відображення $f\colon x \mapsto f(x)$, є скінченною. А отже, існує найменше спільне кратне періодів всіх притягаючих циклів, яке будемо позначати через m.

3. Відображення f^m (m-та ітерація відображення f) є відображенням стиску на деякому околі множини P_+, тобто існують $\delta > 0$ та $\alpha \in (0, 1)$ такі, що

$$|f^m(x_1) - f^m(x_2)| \le (1-\alpha)|x_1 - x_2| \qquad \forall\, x_1, x_2 \colon [x_1, x_2] \subset U_\delta(P_+)^*. \tag{6}$$

4. Початкові дані $\mathbf{x}_0^0 = \{x_0^0(i)\}_{i=1}^N$ вибрані таким чином, що вони знаходяться поза деяким околом $U_\gamma(D(f))$ множини $D(f)$, тобто існує $\gamma > 0$ таке, що

$$\min_{i=\overline{1,N}} \rho(x_0^0(i), D(f)) > \gamma, \tag{7}$$

де $\rho(x_0^0(i), D(f))$ — відстань в $\mathbf{R}^1$ від точки $x_0^0(i)$ до множини $D(f) \stackrel{\text{def}}{=}$ $\stackrel{\text{def}}{=} I \setminus B(P_+)$, де $B(P_+)$ — область притягання множини P_+:

$$B(P_+) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in I \colon \rho(f^n(x), P_+) \to 0,\ n \to \infty\}.$$

Теорема. *Нехай виконуються умови* $1-4$. *Тоді розв'язок*

$$\mathbf{x}_n^0 = \{x_n^0(i)\}_{i=1}^N, \qquad n \in Z^+,$$

системи (2) *при* $\varepsilon = 0$ *рівномірно по* $N = 1, 2, \ldots$ *стійкий по відношенню до малих збурень параметра* $\varepsilon > 0$ *та початкових даних, тобто* $\forall\, \nu > 0 \quad \exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \nu_0 > 0 \colon \forall\, 0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ *із виконання нерівності*

$$\min_{i=\overline{1,N}} |x_0^0(i) - x_0^\varepsilon(i)| < \nu_0$$

випливає справедливість нерівності

$$\min_{i=\overline{1,N}} |x_n^0(i) - x_n^\varepsilon(i)| < \nu \qquad \forall\, n = 0, 1, \ldots .$$

При цьому збурений розв'язок $\mathbf{x}_n^\varepsilon = \{x_n^\varepsilon(i)\}_{i=1}^N$, $n = 0, 1, \ldots$, *є асимптотично* m*-періодичним, тобто існує періодичний розв'язок системи* (2):

$$\mathbf{p}_n^\varepsilon = \{p_n^\varepsilon(i)\}_{i=1}^N \colon \quad \mathbf{p}_{n+1}^\varepsilon = \Phi_\varepsilon \mathbf{p}_n^\varepsilon, \quad \mathbf{p}_{n+m}^\varepsilon \equiv \mathbf{p}_n^\varepsilon, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

такий, що

$$\min_{i=1,2,\ldots,N} |x_n^\varepsilon(i) - p_n^\varepsilon(i)| \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{8}$$

і якщо, крім того, незбурений розв'язок $\mathbf{x}_n^0$ *є асимптотично за просторовою змінною* l*-періодичним, тобто*

$$p_n^0(i+l) = p_n^0(i) \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, N-l, \quad n \in Z^+,$$

* Очевидно, що внаслідок скінченності P_+ для кожного $\delta > 0$ існує натуральне число $r = r(\delta)$ таке, що множина $U_\delta(P_+)$ являє собою об'єднання $r = r(\delta)$ відкритих інтервалів, що не перетинаються. Включення $[x_1, x_2] \subset U_\delta(P_+)$ в (6) означає, що точки x_1 і x_2 належать одній і тій же підобласті зв'язності (відкритому інтервалу) множини $U_\delta(P_+)$.

то збурений розв'язок $\mathbf{x}_n^\varepsilon$ *також є асимптотично* l*-періодичним відносно* i, *тобто*

$$p_n^\varepsilon(i+l) = p_n^\varepsilon(i) \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, N-l, \quad n \in Z^+.$$

Доведення. Позначимо через $\mathbf{x}_n^\varepsilon = \{x_n^\varepsilon(i)\}_{i=1}^N$, $n = 0, 1, \ldots$, розв'язок системи (2) при $\varepsilon \geq 0$. Цей розв'язок отримується при ітеруванні початкових даних $\mathbf{x}_0^\varepsilon$ за допомогою оператора (1). Розв'язок незбуреної $(\varepsilon = 0)$ системи (2) будемо записувати як $\mathbf{x}_n^0 = \{x_n^0(i)\}_{i=1}^N$, $n = 0, 1, \ldots$.

Для довільного, але фіксованого $i \in Z_N^+$ розглянемо різницю

$$|x_n^\varepsilon(i) - x_n^0(i)| = \left|(1-\varepsilon) f(x_{n-1}^\varepsilon(i)) + \varepsilon \sum_{j=1}^N g(i,j) f(x_{n-1}^\varepsilon(j)) - f(x_{n-1}^0(i))\right| \leq$$

$$\leq |f(x_{n-1}^\varepsilon(i)) - f(x_{n-1}^0(i))| + \varepsilon \left|\sum_{j=1}^N g(i,j) f(x_{n-1}^\varepsilon(j)) - f(x_{n-1}^\varepsilon(i))\right|.$$

З умови (3) випливає, що існує $R > 0$ таке, що для будь-якої кількості елементів решітки N та для кожного $i \in Z_N^+$ і $n = 0, 1, \ldots$ має місце оцінка

$$\left|\sum_{j=1}^N g(i,j) f(x_n^\varepsilon(j)) - f(x_n^\varepsilon(i))\right| < R.$$

Таким чином, використовуючи умову 1, маємо

$$|x_n^\varepsilon(i) - x_n^0(i)| < L\,|x_{n-1}^\varepsilon(i) - x_{n-1}^0(i)| + \varepsilon R,$$

а тому

$$|x_n^\varepsilon(i) - x_n^0(i)| < L^n \nu_0 + \varepsilon R(L^{n-1} + L^{n-2} + \ldots + L + 1). \tag{9}$$

З означення множини $D(f)$, враховуючи структуру області притягання $B(P_+)$ (яка є об'єднанням всіх прообразів під дією функції f області безпосереднього притягання $V(P_+)$; вона, в свою чергу, є скінченним об'єднанням відкритих інтервалів, що не перетинаються) випливає, що для будь-яких $\mu_1 > 0$ і $\mu_2 > 0$ існує натуральне $k = k(\mu_1, \mu_2)$ таке, що

$$f^k(I \setminus U_{\mu_1}(D(f))) \subset U_{\mu_2}(P_+). \tag{10}$$

З (7) випливає, що існує $\gamma > 0$ таке, що $\{x_0^0(i)\}_{i=1}^N \subset I \setminus U_\gamma(D(f))$. Тому внаслідок (10) можемо вказати таке k, що $x_k^0(i) \in U_{\mu/2}(P_+)$, $i = 1, \ldots, N$, де константа $\mu = \min\{\nu, \delta\}$, в той час як значення δ взято з умови 3, а ν — з першого твердження теореми.

Виберемо та зафіксуємо константи ν_1, $\nu \geq \nu_1 > 0$ та $\varepsilon_1 > 0$ так, щоб

$$L^k \nu_1 + \varepsilon_1 R(L^{k-1} + L^{k-2} + \ldots + L + 1) = \frac{\mu}{2}.$$

Тоді, беручи до уваги (9), при довільних ε та ν_0, але таких, що $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_1$ і $0 \leq \nu_0 < \nu_1$, маємо $x_k^\varepsilon(i) \in U_\mu(P_+)$, $i = 1, \ldots, N$.

По аналогії з (9) легко бачити, що для довільних $i = \overline{1, N}$ та $n = 0, 1, \ldots$

$$|x_{n+m}^{\varepsilon}(i) - f^m(x_k^{\varepsilon}(i))| < \varepsilon R(L^{m-1} + L^{m-2} + \ldots + 1). \tag{11}$$

А оскільки відображення f^m внаслідок умови (6) є відображенням стиску на множині $U_\mu(P_+)$, то $f^m(U_\mu(P_+)) \subset U_{(1-\alpha)\mu}(P_+)$.

З останнього співвідношення та оцінки (11) випливає, що для будь-якого ε: $0 \le \varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, де $\varepsilon_2 = (\alpha(L-1))/(R(L^m - 1))$, та ν_0, $0 \le \nu_0 < \nu_1$ має місце включення $\{x_{k+m}^{\varepsilon}(i)\}_{i=1}^N \subset U_\mu(P_+)$. Це доводить інваріантність множини $U_\mu(P_+)$ по відношенню до дії оператора Φ_ε, визначеного в (1), що в свою чергу забезпечує близькість розв'язку збуреної системи до розв'язку незбуреної, тобто справедливість першого твердження теореми.

Для того щоб довести асимптотичну періодичність розв'язку системи (2), покажемо, що оператор Φ_ε^m є стискуючим на множині $U_\mu(P_+)$.

Як було сказано вище, множина $U_\mu(P_+)$ являє собою об'єднання скінченної кількості відкритих інтервалів, що не перетинаються. Візьмемо один із них і позначимо через I_1. Нехай

$$A_1 \overset{\text{def}}{=} \{l\colon \forall\, x_1, x_2 \in I_1 \ \ |f(x_1) - f(x_2)| \le l|x_1 - x_2|\}.$$

Множина A_1 обмежена внаслідок умови (5), а тому можемо вибрати $l_1 \overset{\text{def}}{=} \inf A_1$. Аналогічно, можемо визначити константу $l_2 \ge 0$ із співвідношення $l_2 \overset{\text{def}}{=} \inf A_2$, де

$$A_2 \overset{\text{def}}{=} \{l\colon \ \forall\, x_1, x_2 \in I_2 = U_\mu(P_+) \cap f(I_1) \ \ |f(x_1) - f(x_2)| \le l|x_1 - x_2|\}.$$

Продовжуючи діяти таким чином, одержуємо набір констант $l_1, l_2, \ldots, l_m$ таких, що для будь-яких двох x_1, x_2 що належать одній і тій же області зв'язності множини $U_\mu(P_+)$, справедливе співвідношення

$$|f^m(x_1) - f^m(x_2)| \le l_1 l_2 \ldots l_m |x_1 - x_2|.$$

Більш того, у відповідності з умовою (6) та побудовою набору $l_1, l_2, \ldots, l_m$ маємо

$$l_1 l_2 \ldots l_m \le 1 - \alpha. \tag{12}$$

Розглянемо простір усіх векторів $\mathbf{x} = \{x(i)\}_{i=1}^N$ таких, що $x(i) \in U_\mu(P_+)$, $i = \overline{1, N}$, з нормою

$$\|\mathbf{x}\| \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} |x(i)|. \tag{13}$$

Відомо, що цей простір повний. І оскільки Φ_ε відображає множину $U_\mu(P_+)$ в себе, то для доведення асимптотичної m-періодичності розв'язку системи (2) досить показати, що оператор Φ_ε^m є стискуючим, тобто існує $\beta \in (0, 1)$ таке, що

$$\|\Phi_\varepsilon^m(\mathbf{x}) - \Phi_\varepsilon^m(\mathbf{y})\| \le (1-\beta)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \qquad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_\mu^N(P_+). \tag{14}$$

Доведення цього факту будемо проводити для таких двох $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, що їхні компоненти попарно належать до одних і тих же областей зв'язності множини

$U_\mu(P_+)$, тобто якщо $x(i) \in I_j$, то $y(i) \in I_j$, де інтервал I_j є складовою частиною множини $U_\mu(P_+)$.

При $m=1$ співвідношення (14) доводиться просто. Нехай тепер $m=2$. Позначимо $\mathbf{x}^n \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_\varepsilon^n \mathbf{x}$. Тоді внаслідок представлення (1) маємо

$$\|\Phi_\varepsilon^2 \mathbf{x} - \Phi_\varepsilon^2 \mathbf{y}\| \le \|G_\varepsilon\| \, \|FG_\varepsilon F\mathbf{x} - FG_\varepsilon F\mathbf{y}\|.$$

Оскільки з умови (3) випливає, що $\|G_\varepsilon\| = 1$, то розглянемо

$$|(FG_\varepsilon F\mathbf{x})_i - (FG_\varepsilon F\mathbf{y})_i| = |f(x^1(i)) - f(y^1(i))| \le$$

$$\le p_i' |x^1(i) - y^1(i)| = p_i' \left| \sum_{j=1}^N g_\varepsilon(i,j)(f(x(j)) - f(y(j))) \right| \le$$

$$\le p_i' \sum_{j=1}^N g_\varepsilon(i,j) p_j'' |x(j) - y(j)|,$$

де константи p_i', p_j'', $i, j = \overline{1, N}$, набувають значень із множини $\{l_1, l_2\}$, причому таким чином, що $p_i' p_i'' = l_1 l_2$ при довільному $i \in Z_N^+$. Таким чином,

$$\|\Phi_\varepsilon^2(\mathbf{x}) - \Phi_\varepsilon^2(\mathbf{y})\| \le \|FG_\varepsilon F\mathbf{x} - FG_\varepsilon F\mathbf{y}\| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^N p_i' \sum_{j=1}^N g_\varepsilon(i,j) p_j'' |x(j) - y(j)| = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N g_\varepsilon(i,j) p_i' p_j'' |x(j) - y(j)| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^N |x(j) - y(j)| \left[g_\varepsilon(i,j) l_1 l_2 + l_2^2 \sum_{i=\overline{1,N},\, i \ne j} g_\varepsilon(i,j) \right],$$

де $l_2 = \max\{l_1, l_2\}$. З властивостей (3) та (4) матриці G_ε випливає, що $g_\varepsilon(j,j) = (1-\varepsilon) + \varepsilon g(1,1)$, $j = \overline{1, N}$, і $g_\varepsilon(i,j) = \varepsilon g(i,j)$ при $i \ne j$. Вибравши константу ε таким чином, що $0 \le \varepsilon \le l_1 / l_2$, отримаємо

$$\|\Phi_\varepsilon^2(\mathbf{x}) - \Phi_\varepsilon^2(\mathbf{y})\| \le l_1 l_2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

що разом із (12) забезпечує при $\beta = \alpha$ справедливість умови (14) при $m=2$.

Для будь-якого скінченного фіксованого m існує $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(m)$ таке, що для будь-якого $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_3$ оператор Φ_ε^m є відображенням стиску на множині $U_\mu^N(P_+)$. Це твердження легко доводиться по аналогії з випадком $m = 2$. А це доводить справедливість другого твердження теореми.

Із близькості m-періодичного розв'язку $\mathbf{p}_n^\varepsilon$, $n = 0, 1, \ldots$, до $\mathbf{p}_n^0$ випливає, що всі компоненти векторів $\mathbf{p}_n^\varepsilon$, $n = 0, 1, \ldots$, належать до області безпосереднього притягання $V(P_+)$ циклів P_+. Множина $V(P_+)$ складається з r (число r рівне кількості точок у множині P_+) відкритих інтервалів, тобто

$$V(P_+) = \bigcup_{i=1}^r I_i.$$

Як випливає з попередніх викладок, існує таке k, що для всіх $n \ge k$ всі осцилятори $\{x_n^\varepsilon(i)\}_{i=1}^N$ належать $V(P_+)$. Більш того, для кожного $i = \overline{1, N}$ існує $j = \overline{1, r}$ таке, що

$$x_n^\varepsilon(i) \in I_j, \quad x_n^\varepsilon(i+l) \in I_j \quad \forall\, n = ms + k, \quad s = 0, 1, \ldots .$$

Оскільки оператор Φ_ε^m (1) є стискуючим на інтервалі I_j, то існує єдина притягаюча точка $\tilde{p}_j \in I_j$ така, що обидві точки $x_{ms+k}^\varepsilon(i)$ і $x_{ms+k}^\varepsilon(i+l)$ притягаються до неї при $s \to \infty$. Таким чином, справедливе останнє твердження теореми.

Отже, вибравши параметри ν_0 та ε_0 так, щоб $0 \le \nu_0 \le \nu_1$ і $0 \le \varepsilon_0 \le$ $\le \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, одержуємо, що твердження теореми справедливі при деякому фіксованому N. А оскільки при доведенні теореми значення ν_0 та ε_0 не залежать від N, то всі твердження мають місце при довільному натуральному N. Теорему доведено.

Зауважимо, що при виконанні умов теореми розглядуваний незбурений розв'язок є, очевидно, не тільки стійким, а й асимптотично стійким*, але вже по відношенню до збурень лише початкових даних. Аналогічні властивості притаманні й збуреному розв'язку $\mathbf{x}_n^\varepsilon$, $n \in Z^+$, що стверджує наступний наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай виконуються умови теореми. Тоді при достатньо малих* $\varepsilon \ge 0$ *збурений розв'язок* $\mathbf{x}_n^\varepsilon$, $n = 0, 1, \ldots$, *системи* (2) *є рівномірно по* N *стійким по відношенню до малих збурень параметра* ε *і рівномірно по* N *асимптотично стійким по відношенню до малих збурень початкових даних.*

3. Утворення періодичних структур. З теореми також випливає близькість відповідних збуреного і незбуреного граничних періодичних розв'язків $\mathbf{p}_n^0$ і $\mathbf{p}_n^\varepsilon$, що задовольняють співвідношення (8).

***Наслідок* 2.** *Нехай виконуються умови теореми. Тоді розглядуваний* m-*періодичний граничний розв'язок* $\mathbf{p}_n^\varepsilon$ *системи* (2) *сходиться при* $\varepsilon \to 0$ *до відповідного* m-*періодичного розв'язку* $\mathbf{p}_n^0$, *тобто*

$$\max_n \|\mathbf{p}_n^\varepsilon - \mathbf{p}_n^0\| \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

де норма $\|\cdot\|$ *визначена в* (13).

Ця властивість може бути інтерпретована з точки зору виникнення, збереження та еволюції просторових структур під дією збурень, що діють у системі (2). Аналоги цих структур визначені в [7, 8] для розв'язків одновимірних різницевих рівнянь з неперервним часом. Нехай, для простоти викладу, множина P_+ містить лише один притягаючий цикл періоду m: $P_+ = \{z_s\}_{s=1}^m$, $z_{s+1} = f(z_s)$, $s = \overline{1, m-1}$, і $z_1 = f(z_m)$.

Кожне відображення $T^0\colon Z_N^+ \to P_+$ задає просторову структуру вигляду

$$Z_{i_1 i_2 \ldots i_N} \stackrel{\text{def}}{=} \{z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_N}\}, \quad i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad k \in Z_N^+, \tag{15}$$

де компоненти вектора $Z_{i_1 i_2 \ldots i_N}$ визначаються за формулою $z_{i_k} = T^0(k)$, $k \in$ $\in Z_N^+$.

У випадку незбуреної ($\varepsilon = 0$) системи (2) будь-яка структура (15), якщо її взяти за початкові дані задачі, породжує m-періодичний розв'язок, а тому така структура може бути названа періодичною періоду m. Звідси також випливає, що простір такого роду m-періодичних структур може бути розбитий на класи

* Під асимптотичною стійкістю розв'язку, як звичайно, розуміється, що розв'язок є стійким по відношенню до розглядуваного класу збурень, причому різниця між збуреним і незбуреним розв'язками з часом прямує до нуля.

еквівалентності таким чином, що дві структури $Z_{i_1 i_2 \ldots i_N}$ і $Z_{j_1 j_2 \ldots j_N}$ є еквівалентними, якщо для породжених ними m-періодичних розв'язків $\mathbf{p}_n^0$ та $\mathbf{q}_n^0$, $n \in \in Z^+$, знайдеться невід'ємне ціле число n_1 таке, що $\mathbf{p}_{n+n_1}^0 \equiv \mathbf{q}_n^0$, $n \in Z^+$. По суті, кожен клас еквівалентності — це цикл структур періоду m відображення ЛЗО.

Отже, кожному початковому вектору $\mathbf{x}_0^0$ (що задовольняє умови теореми) може бути поставлений у відповідність клас еквівалентних m-періодичних структур, який будується за наступним правилом. Згідно з умовою 4 існує натуральне k таке, що $x_n^0(i) \in U_\mu(P_+) \subset V(P_+)$, $i \in Z_N^+$, $n \geq k$, де $V(P_+)$ — область безпосереднього притягання P_+. Тоді при подальшому зростанні n розв'язок $\mathbf{x}_n^0$ незв'язної системи (2) притягається деяким m-періодичним розв'язком $\mathbf{p}_n^0$, $n \in Z^+$ (всі компоненти якого належать P_+). А отже, маємо сукупність із m різних відображень $T_{n_1}^0 : Z_N^+ \to P_+$, $n_1 = \overline{0, m-1}$, таких, що

$$T_{n_1}^0(i) = \lim_{n \to \infty} x_{mn+n_1}^0(i), \quad n_1 = \overline{0, m-1},$$

і всі вони належать одному й тому ж класу еквівалентності, тобто циклу структур періоду m.

Як легко бачити, з теореми випливає, що аналогічні властивості притаманні також і збуреному розв'язку $\mathbf{x}_n^\varepsilon$ системи (2): при $n \to \infty$ він породжує клас еквівалентних m-періодичних просторових структур вигляду $T^\varepsilon : Z_N^+ \to U_\nu(P_+)$. При цьому їх форма залежить вже не тільки від початкових даних, а й від значення параметра $\varepsilon \geq 0$.

Доведена теорема дозволяє зробити висновок, що при виконанні умов $1-4$ періодичні структури, які породжуються розв'язками незбуреної системи (2), зберігаються при малих збуреннях параметра $\varepsilon \geq 0$, мало змінюючись при введенні слабкого зв'язку.

1. *Kaneko K.* Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems. – Singapore: World Scientific Publishing, 1986. – 306 p.
2. *Bunimovich L. A., Livi R., Martinez-Mekler G., Ruffo S.* Coupled trivial maps // Chaos. – 1992. – **2**, № 3. – P. 283–291.
3. *Afraimovich V. S., Bunimovich L. A.* Simplest structures in coupled map lattices and their stability // Random and Comput. Dynamics. – 1993. – **1**. – P. 423–444.
4. *Giberty G., Vernia C.* On the presence of normally attracting manifolds containing periodic or quasiperiodic orbits in coupled map lattices // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1993. – **3**, № 6. – P. 1503–1514.
5. *Pikovsky A. S., Kurth J.* Do globally coupled maps really violate the law of large numbers? // Phys. Rev. Lett. – 1994. – **72**, № 11. – P. 1644–1646.
6. *Perez G., Sinha S., Cerdeira H. A.* Non-statistical behavior of coupled optical systems // Phys. Rev. A. – 1992. – **45**, № 15. – P. 5469–5477.
7. *Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu.* Difference equations and their applications. – Dordrecht: Kluwer A. P., 1993. – 358 p.
8. *Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н.* Интегро-разностные уравнения и динамика численности популяций // Дифференц. уравнения и их применения. – 1981. – **29**. – С. 69–77.

Одержано 19.06.96