УДК 517.5

**Д. М. Бушев** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ПРО НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ЗГОРТОК ЛІНІЙНИМИ МЕТОДАМИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є

We consider a family of special linear methods of summation of Fourier series and establish exact equalities for the approximation of classes of convolutions with even and odd kernels by polynomials generated by these methods.

Розглядається сім'я спеціальних лінійних методів підсумовування рядів Фур'є і знаходяться точні рівності для наближення поліномами, що породжуються цими методами класів згорток з парними та непарними ядрами.

Позначимо через $\tilde{L}_p$, $1 \le p \le \infty$, $\tilde{L}_\infty$, $\tilde{C}$ простори $2\pi$-періодичних функцій відповідно сумовних в $p$-му степені, істотно обмежених та неперервних з нормами

$$\|f\|_{\tilde{p}} = \left( \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad \|f\|_{\tilde{\infty}} = \sup_x \operatorname{vrai} |f(x)|, \quad \|f\|_{\tilde{C}} = \max_x |f(x)|;$$

$T_{n-1}(x)$ — тригонометричний поліном порядку не вище $n-1$; $E_n(f)_{\tilde{X}} = \inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{\tilde{X}}$ та $E_n(\mathfrak{M})_{\tilde{X}} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E_n(f)_{\tilde{X}}$ — найкраще наближення відповідно функції $f(x) \in \tilde{X}$ та множини $\mathfrak{M} \in \tilde{X}$ тригонометричними поліномами $T_{n-1}(x)$ в метриці простору $\tilde{X}$ ($\tilde{X} = \tilde{L}_p$, $1 \le p \le \infty$, або $\tilde{X} = \tilde{C}$); $A_n$ та $A_n^+$ — довільні лінійні та лінійні додатні оператори, що відображають простір $\tilde{X}$ у підпростір всіх тригонометричних (поліномів) степеня не вище $n-1$;

$$U_n(\Lambda, f, x) = \frac{1}{\pi} (\hat{\lambda}_n(t) * f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) \, \hat{\lambda}_n(t) \, dt \tag{1}$$

та $U_n^+(\Lambda, f, x) = \frac{1}{\pi} (\hat{\lambda}_n^+(t) * f)(x)$ — лінійний та лінійний додатні оператори, задані за допомогою згортки, відповідно з ядрами

$$\hat{\lambda}_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} \cos kt, \qquad \hat{\lambda}_n^+(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} \cos kt \ge 0; \tag{2}$$

$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, U_n(\Lambda))_{\tilde{X}} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - U_n(\Lambda, f)\|_{\tilde{X}}$ — наближення множини $\mathfrak{M}$ заданим лінійним оператором $U_n(\Lambda, f, x)$; $\mathscr{E}_n(\mathfrak{M})_{\tilde{X}} = \inf_{A_n} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - A_n(f)\|_{\tilde{X}}$ та $\mathscr{E}_n^+(\mathfrak{M})_{\tilde{X}} = \inf_{A_n^+} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - A_n^+(f)\|_{\tilde{X}}$ — найкраще наближення множини $\mathfrak{M}$ відповідно лінійними операторами $A_n$ та лінійними додатними операторами $A_n^+$.

Нехай $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу, $\psi(k) \ne 0$, $\beta$ — задане дійсне число. Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left( a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right),$$

де $a_k(f)$ та $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, є рядом Фур'є деякої сумовної функції. яку позначимо через $f_\beta^\psi(x)$, а класи неперервних та сумовних в $p$-му степені функцій $f(x)$, для яких відповідно $\|f_\beta^\psi\|_{\tilde\infty} \le 1$ та $\|f_\beta^\psi\|_{\tilde p} \le$ $\le 1$, позначимо через $\tilde C^\psi_{\beta,\infty}$ та $\tilde L^\psi_{\beta,p}$. Такі та інші класи періодичних функцій були вперше введені в роботі О. І. Степанця [1].

Якщо при $k \ge 1$ та довільному $\beta$

$$\psi(k) \ge \psi(k+1) \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty, \tag{3}$$

а при парному $\beta$

$$\Delta_2 \psi(k) = \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \ge 0 \quad \text{та} \quad \lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0, \tag{4}$$

то (див., наприклад, [2, с. 28, 29]) класи $\tilde C^\psi_{\beta,\infty}$ та $\tilde L^\psi_{\beta,p}$ співпадають із класами функцій, що подаються у вигляді згорток

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}(\varphi * \tilde D_{\psi,\beta})(x), \tag{5}$$

де $\int_0^{2\pi} \varphi(u)\,du = 0$ $(\varphi \perp 1)$, $\tilde D_{\psi,\beta}(t)$ — сумовна функція, що має ряд Фур'є $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$ та $\|\varphi\|_{\tilde\infty} \le 1$ та $\|\varphi\|_{\tilde p} \le 1$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $\tilde C^\psi_{\beta,\infty}$ та $\tilde L^\psi_{\beta,p}$ співпадають з відомими класами $\tilde W^r_{\beta,\infty}$ та $\tilde W^r_{\beta,p}$ диференційовних функцій у розумінні Вейля – Надя.

Для розглядуваних раніше лінійних методів підсумовування рядів Фур'є та класів $\tilde W^r_{\beta,p}$ при $p \ne 1, 2, \infty$ відомі лише порядкові значення величин $\mathscr{E}(\tilde W^r_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\tilde p}$, $\mathscr{E}_n(\tilde W^r_{\beta,p})_{\tilde p}$ та $\mathscr{E}^+_n(\tilde W^r_{\beta,p})_{\tilde p}$. При $p = 1, 2, \infty$ точні значення величин $\mathscr{E}(\tilde W^r_{\beta,p}, U_n(\lambda^*))_{\tilde p}$ знайдені для лінійних методів, що реалізують точні верхні межі найкращих наближень, тобто коли $\mathscr{E}(\tilde W^r_{\beta,p}, U_n(\lambda^*))_{\tilde p} = \mathscr{E}(\tilde W^r_{\beta,p})_{\tilde p} =$ $= E_n(\tilde W^r_{\beta,p})_{\tilde p}$. В роботі побудовані лінійні методи $U_n(\Lambda^\psi, f, x)$, що залежать від послідовності $\psi(k)$, та знайдені точні рівності для величин $\mathscr{E}(\tilde L^\psi_{\beta,p}, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde p}$ при $\beta = 0, 1$ та $p = 1, 2, \infty$, асимптотичні рівності для величин $\mathscr{E}(\tilde L^\psi_{0,p}$, $U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde p}$ при $1 \le p \le \infty$ та $\mathscr{E}(\tilde L^\psi_{\beta,p}, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde p}$ при $p = 1, 2, \infty$ і довільному $\beta$. Якщо послідовність $\psi(k)$, що визначає клас, спадає до нуля досить повільно, то асимптотичні рівності для величин $\mathscr{E}(\tilde L^\psi_{0,p}, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde p}$, $E_n(\tilde L^\psi_{0,p})_{\tilde p}$, $\mathscr{E}_n(\tilde L^\psi_{0,p})_{\tilde p}$ при $1 \le p \le \infty$ та $E_n(\tilde L^\psi_{\beta,p})_{\tilde p}$, $\mathscr{E}_n(\tilde L^\psi_{\beta,p})_{\tilde p}$ при $p = 1, \infty$ співпадають.

При достатньо повільному прямуванні до нуля послідовності $\psi(k)$ головні члени асимптотичних рівностей для величин $E_n(\tilde L^\psi_{\beta,p})_{\tilde p}$ та $\mathscr{E}(\tilde L^\psi_{\beta,p}, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde p}$ рівні. Встановлено, що у випадку опуклості догори послідовності $1/\psi(k)$ розглядувані лінійні оператори є додатними. Також доведено, що метод Коровкіна є асимптотично найкращим серед всіх лінійних додатних методів $A_n^+$ на класах $\tilde W^2_{0,p}$.

**Лема 1.** *Якщо послідовність* $\psi(k)$ *задовольняє при довільному* $\beta$ *умови* (3), *або при парному* $\beta$ *умови* (4), *то*

$$\max_{1\le k\le n}\left\{\left|\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi(k)\right|\right\} = \mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,2}, U_n(\Lambda))_{\tilde{2}} \le \mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\tilde{p}} \le$$

$$\le \mathscr{E}(\tilde{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_n(\Lambda))_{\tilde{C}} = \frac{1}{\pi} E_1\left(\tilde{D}_{\psi,\beta} - \frac{1}{\pi}\tilde{D}_{\psi,\beta} * U_n(\Lambda)\right)_{\tilde{1}}, \tag{6}$$

$$\psi(n) = E_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,2})_{\tilde{2}} = \mathscr{E}_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,2})_{\tilde{2}} \le E_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}} \le \mathscr{E}_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}} \le$$

$$\le \mathscr{E}_n(\tilde{C}^{\psi}_{\beta,\infty})_{\tilde{C}} = \frac{1}{\pi} E_n(\tilde{D}_{\psi,\beta})_{\tilde{1}}. \tag{7}$$

***Доведення.*** Оскільки операція згортки комутативна, асоціативна та дистрибутивна відносно операцій додавання та віднімання, то, використовуючи рівності (1), (2) та (5), одержуємо

$$\mathscr{E}_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\tilde{p}} = \sup_{\|\varphi\|_{\tilde{p}}\le 1,\ \varphi\perp 1}\left\|\frac{1}{\pi}\tilde{D}_{\psi,\beta} * \varphi - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\tilde{D}_{\psi,\beta} * \varphi\right) * \lambda_n\right\|_{\tilde{p}} =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_{\tilde{p}}\le 1,\ \varphi\perp 1}\left\|\frac{1}{\pi}\varphi * \left(\tilde{D}_{\psi,\beta} - \frac{1}{\pi}\tilde{D}_{\psi,\beta} * \lambda_n\right)\right\|_{\tilde{p}}. \tag{8}$$

Відомо (див., наприклад, [2, с. 27]), що коефіцієнти Фур'є функції $\dfrac{1}{\pi} f * \varphi$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} a_k\left(\frac{1}{\pi} f * \varphi\right) &= a_k(f)\,a_k(\varphi) - b_k(f)\,b_k(\varphi), \\ b_k\left(\frac{1}{\pi} f * \varphi\right) &= a_k(f)\,b_k(\varphi) - b_k(f)\,a_k(\varphi), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{9}$$

Із рівностей (2), (9) та означення функції $\tilde{D}_{\psi,\beta}(t)$ випливає, що функція $\tilde{D}_{\psi,\beta}(t) - \dfrac{1}{\pi}\left(\tilde{D}_{\psi,\beta} * \lambda_n\right)(t)$ має ряд Фур'є

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi(k)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{10}$$

З рівностей (8), (9), (10), рівності Парсеваля та незростання послідовності $\psi(k)$ випливає

$$\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,2}, U_n(\Lambda))_{\tilde{2}} = \sup_{\|\varphi\|_{\tilde{2}}\le 1,\ \varphi\perp 1}\left(\pi\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)^2\psi^2(k)\left(a_k^2(\varphi) + b_k^2(\varphi)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=n}^{\infty}\psi^2(k)\left(a_k^2(\varphi) + b_k^2(\varphi)\right)\right)\right)^{1/2} \le$$

$$\le \max_{k\ge 1}\left\{\left|\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi(k)\right|\right\} \sup_{\|\varphi\|_{\tilde{2}}\le 1,\ \varphi\perp 1}\left(\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2(\varphi) + b_k^2(\varphi)\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \max_{1\le k\le n}\left\{\left|\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi(k)\right|\right\} = \left|\left(1-\lambda_l^{(n)}\right)\psi(l)\right|, \tag{11}$$

де $1 \le l \le n$.

Якщо $\varphi_l(x) = \dfrac{\cos lx}{\|\cos lx\|_p}$, то $\|\varphi_l\|_{\tilde{p}} = 1$, $\varphi_l \perp 1$ та функція

$$f_l(t) = \frac{1}{\pi}\big(\tilde{D}_{\psi,\beta} * \varphi_l\big)(t) = \frac{\psi(l)\cos\left(lt + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{\|\cos lx\|_p}$$

належить класу $\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}$. Тоді, користуючись рівностями (2), (9) та інваріантністю норми відносно зсуву, маємо

$$\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\tilde{p}} \geq \|f_l - U_n(\Lambda, f_l)\|_{\tilde{p}} =$$

$$= \left\|(1-\lambda_k^{(n)})\,\varphi(l)\,(\|\cos lx\|_{\tilde{p}}^{-1})\cos\left(lt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_{\tilde{p}} =$$

$$= (1-\lambda_l^{(n)})\,\varphi(l)\,(\|\cos lx\|_{\tilde{p}})^{-1}\left\|\cos\left(lt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_{\tilde{p}} = |(1-\lambda_l^{(n)})\,\psi(l)|. \qquad (12)$$

Відомо, що для натуральних $r$ (див., наприклад, [3, с. 153 – 155])

$$\mathscr{E}(\tilde{W}^r_{r,p}, U_n(\Lambda))_{\tilde{p}} \leq \mathscr{E}(\tilde{W}^r_{r,\infty}, U_n(\Lambda))_{\tilde{C}} = \frac{1}{\pi}E_1\left(\tilde{D}_{k^{-r},r} - \frac{1}{\pi}\tilde{D}_{k^{-r},r} * \hat{\lambda}_n\right)_{\tilde{1}}. \qquad (13)$$

Аналогічно можна встановити, що співвідношення (13) справедливі і для класів $\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}$, тобто

$$\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\tilde{p}} \leq \mathscr{E}(\tilde{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_n(\Lambda))_{\tilde{C}} = \frac{1}{\pi}E_1\left(\tilde{D}_{\psi,\beta} - \frac{1}{\pi}\tilde{D}_{\psi,\beta} * \hat{\lambda}_n\right)_{\tilde{1}}. \qquad (14)$$

Із співвідношень (11), (12) та (14) випливає (6).

Якщо послідовність $\psi(k)$ не зростає, то (див., наприклад, [2, с. 201])

$$E_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,2})_{\tilde{2}} = \mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,2})_{\tilde{2}} = \mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,2}, S_{n-1})_{\tilde{2}} = |\psi(n)|, \qquad (15)$$

де $S_{n-1}$ — оператор Фур'є порядку $n-1$.

Нехай $\varphi_n(x) = \dfrac{\cos nx}{\|\cos nx\|_{\tilde{2}}}$. Тоді $\|\varphi_n\|_{\tilde{p}} = 1$, $\varphi_n \perp 1$, функція

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\big(\tilde{D}_{\psi,\beta} * \varphi_n\big)(x) = \frac{\psi(n)\cos\left(nx + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{\|\cos nx\|_{\tilde{p}}}$$

належить класу $\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}$, і використовуючи твердження 3.3.3 із [4], отримуємо

$$\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}} \geq E_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}) \geq E_n(f_n)_{\tilde{p}} = \|f_n\|_{\tilde{p}} = |\psi(n)|. \qquad (16)$$

Відомо (див., наприклад, [4, с. 78, 79]), що

$$\mathscr{E}_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}} \leq \mathscr{E}_n(\tilde{C}^{\psi}_{\beta,\infty})_{\tilde{C}} = \frac{1}{\pi}E_n(\tilde{D}_{\psi,\beta})_{\tilde{1}}. \qquad (17)$$

Із співвідношень (15) – (17), враховуючи невід'ємність послідовності $\psi(k)$, маємо (7). Лему 1 доведено.

Нехай $g_n(u)$ — функція, графік якої при $0 \leq u \leq n$ співпадає з графіком прямої, що проходить через точки $(n, \psi(n))$, $(n+1, \psi(n+1))$, та $g_n^{\psi}(k)$ — послідовність, означена так:

$$g_n^{\psi}(k) = \begin{cases} g_n(k) = (\psi(n+1) - \psi(n))\,k + \psi(n) + \\ \qquad + (\psi(n) - \psi(n+1)), & k = 0, 1, \ldots, n; \\ \psi(k), & k = n+1, n+2, \ldots. \end{cases} \qquad (18)$$

Означимо послідовність $\lambda_n^{\psi}(k)$ таким чином:

$$\lambda_n^\psi(k) = 1 - \frac{g_n^\psi(k)}{\psi(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad \lambda_n^\psi(0) = 1. \tag{19}$$

Нехай далі $U_n(\Lambda^\psi, f, x) = \frac{1}{\pi}(\hat{\lambda}_n^\psi * f)(x)$ — лінійний оператор, для якого $\lambda_k^{(n)} = = \lambda_n^\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тоді справедливе наступне твердження.

**Теорема 1.** *Якщо послідовність* $\psi(k)$ *задовольняє умови* (4), *то*

$$\psi(n) + (n-1)\big(\psi(n) - \psi(n+1)\big) = \mathscr{E}(\tilde{L}_{0,2}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{2}} \le$$

$$\le \mathscr{E}(\tilde{L}_{0,p}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{p}} < \psi(n) + n\big(\psi(n) - \psi(n+1)\big), \tag{20}$$

*а якщо виконуються умови* (3), (4), *то*

$$\mathscr{E}(\tilde{L}_{1,1}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{1}} = \mathscr{E}(\tilde{C}_{1,\infty}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{C}} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_n^\psi(2k+1)}{2k+1}. \tag{21}$$

*Нехай для послідовності* $\psi(k)$ *виконуються умови* (4), *або* (4) *та*

$$n\big(\psi(n) - \psi(n+1)\big) = o\big(\psi(n)\big). \tag{22}$$

*Тоді при* $n \to \infty$ *справедливі асимптотичні рівності*

$$\mathscr{E}(\tilde{L}_{0,p}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{p}} =$$

$$= \psi(n) + (n-1)\big(\psi(n) - \psi(n+1)\big) + O\big(\psi(n) - \psi(n+1)\big). \tag{23}$$

*Якщо ж виконуються умови* (3), (4), *то*

$$\mathscr{E}(\tilde{L}_{0,p}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{p}} = \psi(n) + o\big(\psi(n)\big), \tag{24}$$

*де* $1 \le p \le \infty$, *а при* $p = 1, \infty$

$$\mathscr{E}(\tilde{L}_{\beta,p}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{p}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} + (\psi(n) + n(\psi(n) - \psi(n+1)))\ln n\right) +$$

$$+ O\big(\psi(n) + n\big(\psi(n) - \psi(n+1)\big)\big). \tag{25}$$

***Доведення.*** Асимптотичні рівності (23), (24) випливають з рівності (20) та рівності (22). Згідно з лемою 1

$$\mathscr{E}(\tilde{L}_{0,2}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{2}} = \max_{1 \le k \le n}\left\{\left|(1 - \lambda_n^\psi(k))\,\psi(k)\right|\right\}. \tag{26}$$

Якщо послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови (4), то вона невід'ємна, опукла донизу і незростаюча. Тоді за означенням (18) послідовність $g_n^\psi(k)$ має такі ж властивості, і з рівності (18) випливає

$$\max_{1 \le k \le n}\left\{\left|(1 - \lambda_n^\psi(k))\,\psi(k)\right|\right\} = \max_{1 \le k \le n}|g_n^\psi(k)| = g_n^\psi(1) =$$

$$= \psi(n) + (n-1)\big(\psi(n) - \psi(n+1)\big). \tag{27}$$

Використовуючи співвідношення (10) та лему 1, маємо

$$\mathscr{E}(\tilde{L}_{0,2}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{2}} \le \mathscr{E}(\tilde{L}_{0,p}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{p}} \le \mathscr{E}(\tilde{C}_{0,\infty}^\psi, U_n(\Lambda^\psi))_{\tilde{C}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}E_1\left(\tilde{D}_{\psi,0} - \frac{1}{\pi}\tilde{D}_{\psi,0} * \hat{\lambda}_n^\psi\right)_{\tilde{1}} = \frac{1}{\pi}E_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}g_n^\psi(k)\cos kt\right)_{\tilde{1}}. \tag{28}$$

Нехай

$$E_1\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\cos kt\right)_{\tilde{1}} = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\cos kt - C^*\right\|_{\tilde{1}},$$

де $C^*$ — многочлен найкращого наближення нульового степеня функції $\sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\cos kt$ у просторі $\tilde{L}$. Тоді згідно з теоремою 3.3.4 з роботи [4] функція $\operatorname{sign}\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\cos kt - C^*\right)$ ортогональна до довільної константи. Отже, функція $\sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\cos kt - C^*$ не може бути невід'ємною на сегменті $[0, 2\pi]$. Оскільки послідовність $g_n^{\psi}(k)$ опукла донизу, невід'ємна і незростаюча, то (див., наприклад, [5, с. 652]) функція $g_n^{\psi}(0)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\cos kt$ невід'ємна. Тому

$$\frac{1}{\pi}E_1\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\cos kt\right)_{\tilde{1}} < \frac{1}{\pi}\left\|\frac{g_n^{\psi}(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\cos kt\right\|_{\tilde{1}} =$$

$$= g_n^{\psi}(0) = \psi(n) + n(\psi(n) - \psi(n+1)). \tag{29}$$

Із співвідношень (26)–(29) випливає (20).

Використовуючи співвідношення двоїстості для класів згорток (див., наприклад, [4, с. 77]) та (8), (10), (18), одержуємо

$$\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}} = \sup_{\|\varphi\|_{\tilde{p}} \le 1,\ \varphi \perp 1}\left\|\frac{1}{\pi} * \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)\right\|_{\tilde{p}} =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_{\tilde{p}'} \le 1} E_1\left(\frac{1}{\pi}\varphi * \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)\right)_{\tilde{p}'}, \tag{30}$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\tilde{p}'} = 1$. Якщо послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови (3) та (4), то за означенням (18) послідовність $g_n^{\psi}(k)$ задовольняє такі ж умови.

Тоді з рівностей (4.18), (4.19) з [2], твердження 6.1 з [2] та рівності (30) при $p = 1$ і $p = \infty$ маємо

$$\sup_{\|\varphi\|_{\tilde{p}'} \le 1} E_1\left(\frac{1}{\pi}\varphi * \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_n^{\psi}(k)\sin kt\right)\right)_{\tilde{p}'} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_n^{\psi}(2k+1)}{2k+1}. \tag{31}$$

Із рівностей (30), (31) випливає (21).

Внаслідок співвідношення (10)

$$\tilde{D}_{\psi,\beta}(t) - \frac{1}{\pi}(\tilde{D}_{\psi,\beta}(t) * \hat{\lambda}_n^{\psi})(t) = \cos\frac{\beta\pi}{2}\left(\tilde{D}_{\psi,0}(t) - \frac{1}{\pi}(\tilde{D}_{\psi,0} * \hat{\lambda}_n^{\psi})(t)\right) +$$

$$+ \sin\frac{\beta\pi}{2}\left(\tilde{D}_{\psi,1}(t) - \frac{1}{\pi}(\tilde{D}_{\psi,1} * \hat{\lambda}_n^{\psi})(t)\right). \tag{32}$$

Тоді з рівності (32) випливає

$$\left|\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{1,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}} - \left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{0,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}}\right| \le \mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}} \le$$

$$\le \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{1,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}} + \left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{0,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}}. \tag{33}$$

Якщо послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови (3) і (4), то й послідовність $g_n^{\psi}(k)$ задовольняє ті ж умови. Тоді

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_n^{\psi}(2k+1)}{2k+1} = \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_n^{\psi}(k)}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k g_n^{\psi}(k)}{k}\right) <$$

$$< \frac{2}{\pi}\left(g_n^{\psi}(1)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+1\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{g_n^{\psi}(k)}{k}\right) <$$

$$< \frac{2}{\pi}\left((\psi(n) + (n-1)(\psi(n) - \psi(n+1)))(\ln n + 2) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}\right) \tag{34}$$

і, враховуючи, що послідовність $\frac{g_n^{\psi}(k)}{k}$ і відповідна їй функція

$$\frac{g_n(u)}{u} = \psi(n+1) - \psi(n) + \frac{\psi(n) + n(\psi(n) - \psi(n+1))}{u}$$

при $1 \le u \le n+1$ не зростають, маємо

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_n^{\psi}(2k+1)}{2k+1} > \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_n^{\psi}(k)}{k} + g_n^{\psi}(1) - \frac{g_n^{\psi}(2)}{2}\right) >$$

$$> \frac{2}{\pi}\left(\int_1^n \frac{g_n(u)}{u}\,du + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} + g_n^{\psi}(1) - \frac{g_n^{\psi}(2)}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left((\psi(n) + n(\psi(n) - \psi(n+1)))\ln n + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}\right) +$$

$$+ \frac{\psi(n) - (n-2)(\psi(n) - \psi(n+1))}{\pi}. \tag{35}$$

Отже, при виконанні умов (3), (4) із співвідношень (20), (21), (33) – (35) випливає (25). Теорему 1 доведено.

Нехай $\psi(u)$ — функція, графік якої складається з ламаних з кінцями в точках з координатами $(k, \psi(k))$, де $k = 1, 2, \ldots$ та $\psi'(u) \overset{\text{df}}{=} \psi'(u+0)$. Тоді $\psi(n) - \psi(n+1) = -\psi'(n)$ та умова (22) рівносильні умові

$$n|\psi'(n)| = o(\psi(n)). \tag{22'}$$

Якщо виконується умова (22′), то

$$\psi(k) = o\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}\right). \tag{36}$$

Дійсно, використовуючи правило Лопіталя і незростання функції $\psi(u)$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi(n)}{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}} = \lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{\int_u^{\infty}\frac{\psi(x)}{x}\,dx} = \lim_{u\to\infty}\frac{\psi'(u)}{\frac{-\psi(u)}{u}} = \lim_{u\to\infty}\frac{u|\psi'(u)|}{\psi(u)} = 0.$$

Коли $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{u|\psi'(u)|\ln u}{\psi(u)} = C$, то згідно з правилом Лопіталя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi(n)\ln n}{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}} = \lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)\ln u}{\int_u^{\infty}\frac{\psi(x)}{x}dx} = \lim_{u\to\infty}\frac{u|\psi'(u)|\ln u}{\psi(u)} - 1 = C-1 \geq 0.$$

Отже, $C \geq 1$, або $C=\infty$ і

$$\psi(n) = O\big(n\,|\psi'(n)|\ln n\big) \quad \text{або} \quad \psi(n) = o\big(n\,|\psi'(n)|\ln n\big). \tag{37}$$

Тоді якщо

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u|\psi'(u)|\ln u}{\psi(u)} = 1, \tag{38}$$

то

$$\psi(n)\ln n = o\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}\right), \tag{38$'$}$$

якщо

$$1 < \lim_{u\to\infty}\frac{u|\psi'(u)|\ln u}{\psi(u)} = C < \infty, \tag{39}$$

то

$$\psi(n)\ln n = O\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}\right), \tag{39$'$}$$

і якщо

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u|\psi'(u)|\ln u}{\psi(u)} = \infty, \tag{40}$$

то

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} = o\big(\psi(n)\ln n\big). \tag{40$'$}$$

Встановимо залежність асимптотичних рівностей (23) – (25) від швидкості прямування до нуля послідовності $\psi(k)$, яка характеризується поведінкою величини $\dfrac{n|\psi'(n)|}{\psi(n)}$ при $n\to\infty$.

**Наслідок 1.** *Нехай послідовність $\psi(k)$ задовольняє умову* (4), *або* (4) *і* (22$'$). *Тоді при $1\leq p\leq\infty$*

$$\psi(n) + (n-1)|\psi'(n)| = \mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{0,2}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{2}} \leq$$
$$\leq \mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{0,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}} < \psi(n) + n|\psi'(n)|$$

*і при $n\to\infty$ справедливі відповідно асимптотичні рівності*

$$\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{0,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}} = \psi(n) + (n-1)|\psi'(n)| + o(|\psi'(n)|),$$

*або*

$$\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{0,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}} = \psi(n) + O(n|\psi'(n)|). \tag{41}$$

*Нехай послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови* (3), (4). *Тоді при $p = 1, \infty$ і $n\to\infty$ справедливі асимптотичні рівності*

$$\mathscr{E}^{+}_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}} = \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} + (\psi(n)+n|\psi'(n)|)\ln n\right) +$$
$$+ O\big(\psi(n) + n|\psi'(n)|\big), \tag{42}$$

$$\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left|\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{\psi(k)}{k} + O(\psi(n)\ln n), \\ \qquad\qquad \textit{якщо виконується умова } (38); \\ \dfrac{2}{\pi}\left|\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right| \left( \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{\psi(k)}{k} + \psi(n)\ln n \right) + O(\psi(n)), \qquad (43) \\ \qquad\qquad \textit{якщо виконується умова } (39); \\ \dfrac{2}{\pi}\left|\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right| \psi(n)\ln n + O\left( n|\psi'(n)|\ln n + \displaystyle\int_n^{\infty} \dfrac{\psi(u)}{u}\,du \right), \\ \qquad\qquad \textit{якщо виконуються умови } (40) \textit{ та } (22'); \\ \dfrac{2}{\pi}\left|\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right| (\psi(n) + n|\psi'(n)|)\ln n + O(\psi(n)), \qquad (44) \\ \qquad\qquad \textit{якщо} \quad n|\psi'(n)| = O(\psi(n)); \\ \dfrac{2}{\pi}\left|\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right| n|\psi'(n)|\ln n + O(\psi(n)\ln n), \\ \qquad\qquad \textit{якщо} \quad \psi(n) = o(n|\psi'(n)|) \quad \textit{і} \\ \qquad n|\psi'(n)| = o(\psi(n)\ln n), \quad \textit{або} \quad n|\psi'(n)| = O(\psi(n)\ln n); \qquad (45) \\ \dfrac{2}{\pi}\left|\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right| n|\psi'(n)|\ln n + O(n|\psi'(n)|), \\ \qquad\qquad \textit{якщо} \quad \psi(n)\ln n = o(n|\psi'(n)|). \qquad (46) \end{cases}$$

Наслідок 1 випливає з теореми 1 та співвідношень (22), (36), (38), (38′), (39), (39′), (40), (40′), (43)–(46). Відмітимо, що послідовність $\psi_1(k) = \ln^{-\alpha}(k+1)$ при $\alpha > 0$ задовольняє умови (4), (22′), при $\alpha = 1$ — умову (38), а при $\alpha > 1$ — умови (3), (39); послідовність $\psi_2(k) = \ln^{-1}(k+1)\ln(\ln^{-\beta}(k+3))$ при $\beta > 1$ задовольняє умови (3), (4), (38); послідовність $\psi_3(k) = e^{-\ln^{\gamma}(k+1)}$ при $0 < \gamma < 1$ — умови (3), (4), (40), (22′); послідовність $\psi_4(k) = k^{-r}$ при $r > 0$ — умови (3), (4), (43); послідовність $\psi_3(k)$ при $1 < \gamma < 2$ — умови (3), (4), (44), при $\gamma = 2$ — умови (3), (4), (45), а при $\gamma > 2$ — умови (3), (4), (46).

Якщо послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови (4) та

$$\Delta^3\psi(k) = \psi(k) - 3\psi(k+1) + 3\psi(k+2) - \psi(k+3) \geq 0, \qquad (47)$$

то послідовність $g_n^{\psi}(k)$, визначена рівністю (18), задовольняє умову (4), але не задовольняє умову (47). Для побудови послідовності $h_n^{\psi}(k)$, яка задовольняє умови (4) і (47), будемо додатково вважати, що послідовність $\psi(k)$ є звуженням на множину натуральних чисел $N$ значень функції $\psi(u)$, яка на проміжку $[1, +\infty)$ задовольняє умову

$$(-1)^m \psi^{(m)}(u) \geq 0, \qquad m = 0, 1, 2, 3. \qquad (48)$$

Покладемо

$$h_n^{\psi}(u) = \begin{cases} \psi(n) + \dfrac{\psi'(n)}{1!}(u-n) - \dfrac{\psi''(n)}{2!}(u-n)^2, & 0 \leq u \leq n; \\ \psi(n), & u \geq n. \end{cases} \qquad (49)$$

Якщо виконуються умови (48), то з означення (49) випливає, що

$$h_n^{\psi}(n) = \psi(n), \quad (h_n^{\psi}(u))'_{u=n} = \psi'(n), \quad (h_n^{\psi}(u))''_{u=n} = \psi''(n)$$

і для функції $h_n^{\psi}(u)$ на проміжку $[0, +\infty]$ виконуються умови (48), а для послідовності $h_n^{\psi}(k)$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ — умови (4), (47).

Визначимо коефіцієнти підсумовування $\lambda_k^{(n)}(k) = \lambda_{n,h}^{\psi}(k)$ і лінійний оператор $U_n(\Lambda_h^{\psi}, f, x)$ таким чином:

$$\lambda_{n,h}^{\psi}(k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{h_n^{\psi}(k)}{\psi(k)}, & k = 1, 2, \ldots; \\ 1, & k = 0, \end{cases}$$
$$U_n(\Lambda_h^{\psi}, f, x) = \frac{1}{\pi}(\hat{\lambda}_{n,h}^{\psi} * f)(x), \tag{50}$$

де $\hat{\lambda}_{n,h}^{\psi}(x) = \frac{1}{2}\lambda_{n,h}^{\psi}(0) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,h}^{\psi}(k) \cos kx$.

Для класів згорток з парним ядром справедливе наступне твердження.

**Наслідок 2.** *Нехай функція* $\psi(u)$ *задовольняє умови* (48). *Тоді справедлива рівність*

$$\mathscr{E}(\tilde{L}_{0,p}^{\psi}, U_n(\Lambda_h^{\psi}))_{\tilde{p}} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k h_n^{\psi}(2k+1)}{2k+1}, \tag{51}$$

*де* $p = 1$, *або* $p = \infty$.

***Доведення.*** Якщо функція $\psi(u)$ задовольняє умови (48), то послідовність $h_n^{\psi}(k)$ задовольняє умови (4) і (47). Тоді, замінюючи послідовність $g_n^{\psi}(k)$ послідовністю $h_n^{\psi}(k)$, з рівностей 4.18, 4.19 з [2], твердження 6.1 з [2] і рівності (30) при $p = 1$, або $p = \infty$ одержуємо

$$\mathscr{E}(\tilde{L}_{0,p}^{\psi}, U_n(\Lambda_n^{\psi}))_{\tilde{p}} = \sup_{\|\varphi\|_{\tilde{p}} \le 1} E_1\left(\frac{1}{\pi}\varphi * \left(\sum_{k=1}^{\infty} h_n^{\psi}(k) \cos kt\right)\right)_{\tilde{p}} =$$
$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k h_n^{\psi}(2k+1)}{2k+1},$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Наслідок 2 доведено.

**Теорема 2.** *Якщо виконуються умови* (4) *і* (22′) *і* $1 \le p \le \infty$, *або* (3), (4), (36), $p = 1, \infty$ *і* $\beta$ *— довільне дійсне число, то при* $n \to \infty$ *справедливі відповідно асимптотичні рівності*

$$\psi(n) \le E_n(\tilde{L}_{0,p}^{\psi})_{\tilde{p}} \le \mathscr{E}_n(\tilde{L}_{0,p}^{\psi})_{\tilde{p}} = \psi(n) + o(\psi(n)), \tag{52}$$

$$E_n(\tilde{L}_{\beta,p}^{\psi})_{\tilde{p}} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} + O(\psi(n)), \tag{53}$$

$$\mathscr{E}_n(\tilde{L}_{\beta,p}^{\psi})_{\tilde{p}} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} + O(\psi(n)). \tag{54}$$

***Доведення.*** Нехай виконуються умови (4) і (22′). Тоді із леми 1 та рівності (41) випливає співвідношення (52).

Оскільки $\tilde{D}_{\psi,\beta}(t)$ — сумовна функція, що має ряд Фур'є

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) = \cos\frac{\beta\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos kt - \sin\frac{\beta\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \sin kt,$$

то

$$\tilde{D}_{\psi,\beta}(t) = \cos\frac{\beta\pi}{2} \tilde{D}_{\psi,0}(t) + \sin\frac{\beta\pi}{2} \tilde{D}_{\psi,1}(t), \tag{55}$$

де $\tilde{D}_{\psi,0}(t)$ та $\tilde{D}_{\psi,1}(t)$ — сумовні функції, що мають відповідно ряди Фур'є $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos kt$ та $-\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \sin kt$. Тоді для кожної функції $f(x)$ з класу $\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}$

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\cos\frac{\beta\pi}{2}(\varphi * \tilde{D}_{\psi,0})(x) + \sin\frac{\beta\pi}{2}(\varphi * \tilde{D}_{\psi,1})(x)\right). \tag{56}$$

Зважаючи на те, що (див., наприклад, [4, с. 17])

$$\left|E_n(f_1)_{\tilde{p}} - E_n(f_2)_{\tilde{p}}\right| \le E_n(f_1 + f_2)_{\tilde{p}} \le E_n(f_1)_{\tilde{p}} + E_n(f_2)_{\tilde{p}}$$

та

$$E_n(\lambda f)_{\tilde{p}} = |\lambda| E_n(f)_{\tilde{p}},$$

із рівностей (55), (56) та леми 1 випливає

$$\begin{aligned} &\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| E_n(\tilde{L}^{\psi}_{1,p})_{\tilde{p}} - \left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| E_n(\tilde{L}^{\psi}_{0,p})_{\tilde{p}}\right) \le \\ &\le E_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}} \le \mathscr{E}_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}} \le \frac{1}{\pi} E_n(\tilde{D}_{\psi,\beta}(t))_{\tilde{1}} \le \\ &\le \frac{1}{\pi}\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| E_n(\tilde{D}_{\psi,1})_{\tilde{1}} + \left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| E_n(\tilde{D}_{\psi,0})_{\tilde{1}}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| E_n(\tilde{D}_{\psi,1})_{\tilde{1}} + \left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| \mathscr{E}_n(\tilde{C}^{\psi}_{0,\infty})_{\tilde{C}}. \end{aligned} \tag{57}$$

Якщо виконується умова (4), то (див., наприклад, [2, с. 213, 250, 251])

$$E_n(\tilde{L}^{\psi}_{0,p})_{\tilde{p}} = O(\psi(n)), \qquad \mathscr{E}_n(\tilde{C}^{\psi}_{0,\infty})_{\tilde{C}} = O(\psi(n)). \tag{58}$$

А якщо виконуються умови (3) і (4), то [2, с. 257]

$$E_n(\tilde{L}^{\psi}_{1,1})_{\tilde{1}} = E_n(\tilde{C}^{\psi}_{1,\infty})_{\tilde{C}} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi((2k-1)n)}{2k-1} = \frac{1}{\pi} E_n(\tilde{D}_{\psi,1})_1. \tag{59}$$

В роботі [9] було встановлено, що

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} \le \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi((2k-1)n)}{2k-1} < \frac{2}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} + \frac{6}{\pi}\psi(n). \tag{60}$$

Із співвідношень (57) – (60) випливають (53), (54), отже, теорему 2 доведено.

Відмітимо, що рівність (53) при $p = \infty$ була отримана в роботі [6], а рівність (52) при ще одній додатковій умові — в [7]. Оскільки виконання умови (22′) зумовлює і виконання умови (36), то з наслідку 1 та теореми 2 випливає, що при виконанні умов (4), (22′) асимптотичні рівності для величин $\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{0,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}}$ та $E_n(\tilde{L}^{\psi}_{0,p})_{\tilde{p}}$ співпадають та не залежать від параметра $1 \le p \le \infty$, а при виконанні умов (3), (4), (38) і $p = 1, \infty$ головні члени асимптотичних рівностей для величин $\mathscr{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}}$, $E_n(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}}$ рівні.

В роботі [6] було встановлено, що при виконанні умов (3), (4), (38) асимптотична рівність (42) справедлива для величин $\mathscr{E}(\tilde{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, S_n)_{\tilde{C}}$ та $\mathscr{E}(\tilde{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, Z_n)_{\tilde{C}}$, де $S_n$ та $Z_n$ — суми Фур'є та Зігмунда.

Доведемо, що якщо послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови (4), а послідовність $\varphi(k) = 1/\psi(k)$ опукла догори, тобто

$$\Delta_1 \psi(k) = \psi(k) - \psi(k+1) \geq 0, \qquad \Delta_1 \varphi(k) = \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 0,$$
$$\Delta_2 \varphi(k) = \varphi(k) - 2\varphi(k+1) + \varphi(k+2) \leq 0 \tag{61}$$

та

$$2\psi(2) \geq \psi(1), \tag{62}$$

то оператори $U_n(\Lambda^{\psi}, f, x)$ додатні.

Покажемо, що при виконанні умов (61) при $k = 1, 2, \ldots, n$ послідовність $g_n^{\psi}(k)/\psi(k) = g_n^{\psi}(k)\varphi(k)$, де $g_n^{\psi}(k)$ визначається рівністю (18), опукла догори та неспадна. Згідно з означенням (1) та співвідношенням (61) при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\Delta_1 g_n^{\psi}(k) = g_n^{\psi}(k) - g_n^{\psi}(k+1) = \psi(n) - \psi(n+1) \geq 0, \tag{63}$$

а при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$\Delta_2 g_n^{\psi}(k) = g_n^{\psi}(k) - 2g_n^{\psi}(k+1) + g_n^{\psi}(k+2) = 0. \tag{64}$$

Використовуючи співвідношення (61), (63), (64) при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ маємо

$$\Delta_2 g_n^{\psi}(k)\varphi(k) = g_n^{\psi}(k)\varphi(k) - 2g_n^{\psi}(k+1)\varphi(k+1) + g_n^{\psi}(k+2)\varphi(k+2) =$$
$$= \varphi(k)\Delta_2 g_n^{\psi}(k) + g_n^{\psi}(k+1)\Delta_2\varphi(k) +$$
$$+ (\varphi(k+2) - \varphi(k))(g_n^{\psi}(k+2) - g_n^{\psi}(k+1)) \leq 0, \tag{65}$$

тобто послідовність $g_n^{\psi}(k)\varphi(k)$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ опукла догори. В силу співвідношень (61) та означення послідовностей $g_n^{\psi}(k)$ і $\varphi(k)$ одержуємо

$$g_n^{\psi}(n-1)\varphi(n-1) - g_n^{\psi}(n)\varphi(n) =$$
$$= \frac{2\psi(n) - \psi(n-1) - \psi(n+1)}{\psi(n-1)} \leq 0. \tag{66}$$

Із співвідношень (65), (66) випливає, що послідовність $g_n^{\psi}(k)\varphi(k)$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ опукла догори та неспадна. Тоді послідовність $\lambda_k^{\psi}(k) = 1 - g_n^{\psi}(k)/\psi(k) = 1 - g_n^{\psi}(k)\varphi(k)$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ опукла донизу і не зростає. Оскільки $\lambda_n^{\psi}(0) = 1$, то використовуючи нерівність (62), означення послідовностей $g_n^{\psi}(k)$ і $\varphi(k)$ та незростання послідовності $\psi(k)$, маємо

$$\lambda_n^{\psi}(0) - 2\lambda_n^{\psi}(1) + \lambda_n^{\psi}(2) = \frac{2\psi(2)\, g_n^{\psi}(1) - \psi(1)\, g_n^{\psi}(2)}{\psi(1)\,\psi(2)} =$$
$$= \frac{(2\psi(2) - \psi(1))\, g_n^{\psi}(1) + \psi(1)(\psi(n) - \psi(n-1))}{\psi(1)\,\psi(2)} \geq 0.$$

Отже, послідовність $\lambda_n^{\psi}(k)$ при $k = 0, 1, \ldots, n$ опукла донизу та не зростає. Оскільки $\lambda_n^{\psi}(n) = 0$, то при $k = 0, 1, \ldots, n$ послідовність $\lambda_n^{\psi}(k)$ невід'ємна, опукла донизу та не зростає. Отже (див., наприклад, [5, с. 652]),

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_n^{\psi}(k) \cos kt . \geq 0$$

та оператори $U_n(\Lambda^{\psi}, f, x)$ додатні. На підставі того, що при $n \geq 2$ величини $\mathcal{E}(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}}$ не залежать від першого члена послідовності $\psi(k)$, у випадку необхідності, зменшивши його (поклавши, наприклад, $\psi(1) = 2\psi(2) - \psi(3)$), завжди можна домогтися виконання нерівності (62) із збереженням для зміненої послідовності умов (4).

Відмітимо, що співвідношення (61) виконуються, наприклад, для послідовностей

$$\psi_1(k) = \ln^{-\gamma}(k + e^{\gamma-1}), \qquad \psi_2(k) = \left(\ln^{-1}(k+3)\right)\ln^{-\delta}\left(\ln(k+3)\right),$$

$$\psi_3(k) = e^{-\ln^{\beta}(k+1)}, \qquad \psi_4(k) = k^{-r},$$

де $\gamma > 0$, $\delta > 1$, $0 < \beta \leq 1$, $0 < r \leq 1$.

Оскільки для всіх наведених вище послідовностей, крім $\psi_4(k) = k^{-r}$, виконуються умови (4), (22′), то, як відмічалось, асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}(\tilde{L}^{\psi}_{0,p}, U_n(\Lambda^{\psi}))_{\tilde{p}}$ та $E_n(\tilde{L}^{\psi}_{0,p})_{\tilde{p}}$ при $1 \leq p \leq \infty$ співпадають. Отже, для класів $\tilde{L}^{\psi}_{0,p}$, визначених за допомогою наведених послідовностей, додатні оператори $U_n(\Lambda^{\psi}, f, x)$ є асимптотично найкращими серед всіх лінійних операторів $A_n$ і $A_n^+$. Справедливе наступне твердження.

***Наслідок* 3.** *Нехай виконуються умови* (4), (61), (22′). *Тоді при* $1 \leq p \leq \infty$ *і* $n \to \infty$ *справедлива асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n^+(\tilde{L}^{\psi}_{0,p})_{\tilde{p}} = \psi(n) + o(\psi(n)).$$

*Якщо виконуються умови* (3), (4), (61), (38), *то при* $p = 1, \infty$ *і* $n \to \infty$ *справедлива асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n^+(\tilde{L}^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} + O(\psi(n)\ln n).$$

Відмітимо, що умова (4) випливає з (3) і (61).

В роботі [8] було встановлено, що метод Коровкіна є асимптотично найкращим серед всіх лінійних додатних методів $A_n^+$ на класах $\tilde{W}^2_{0,\infty}$, тобто при $n \to \infty$ справедливі рівності

$$\mathcal{E}_n^+(\tilde{W}^2_{0,\infty})_{\tilde{C}} = \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{67}$$

та

$$\mathcal{E}(\tilde{W}^2_{0,\infty}, K_n)_{\tilde{C}} = \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

де $K_n(f, x) = \dfrac{1}{\pi}(\tilde{K}_n * f)(x)$ — оператор Коровкіна,

$$\tilde{K}_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\lambda}_k^{(n)}(k) \cos kt \geq 0,$$

$$\tilde{\lambda}_k^{(n)}(k) = \frac{n-k+1}{n+1}\cos\frac{k\pi}{n+1} + \frac{1}{n+1}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{k\pi}{n+1}.$$

Відомо (див., наприклад, [9]), що якщо множина $\mathfrak{M}$, котра містить константи, інваріантна відносно зсуву, тобто із включення $f(x) \in \mathfrak{M}$ випливає $f(x+t) \in \mathfrak{M}$, і, крім того, із включення $f(x) \in \mathfrak{M}$ випливає $f(-x) \in \mathfrak{M}$, то $\mathscr{E}_n^+(\mathfrak{M})_{\tilde{X}} = \mathscr{E}_n^+(\mathfrak{M}, U_n^+(\Lambda))_{\tilde{X}}$.

Оскільки класи $\tilde{W}_{0,p}^2$ задовольняють всі умови останнього твердження, то

$$\mathscr{E}_n^+(\tilde{W}_{0,p}^2)_{\tilde{p}} = \mathscr{E}_n^+(\tilde{W}_{0,p}^2, U_n^+(\Lambda))_{\tilde{p}}. \tag{68}$$

В роботі [9] було доведено, що метод Коровкіна є асимптотично найкращим серед всіх лінійних додатних методів і на класах $\tilde{W}_{0,2}^2$, тобто при $n \to \infty$ справедливі рівності

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_n^+(\tilde{W}_{0,2}^2)_{\tilde{2}} &= \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \mathscr{E}(\tilde{W}_{0,2}^2, K_n)_{\tilde{2}} &= \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \tag{69}$$

Використовуючи рівності (67) – (69) та лему 1, одержуємо

$$\mathscr{E}_n^+(\tilde{W}_{0,2}^2)_p = \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отже, метод Коровкіна є асимптотично найкращим серед всіх додатних методів і на класах $\tilde{W}_{0,p}^2$ при $1 \le p \le \infty$.

Позначимо через $\tilde{\Psi}_\beta H_p^0$ класи $2\pi$-періодичних функцій $f(x)$, які подаються у вигляді згортки $f(x) = \dfrac{1}{\pi}(\varphi * \tilde{\Psi}_\beta)(x)$, де $\|\varphi\|_{\tilde{p}} \le 1$ і $\tilde{\Psi}_\beta(t)$ — сумовна функція, що має ряд Фур'є

$$\frac{\psi(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Такі класи функцій розглядались, наприклад, в роботі [4, с. 96].

Нехай $\tilde{\Psi}_\beta H_p^1$ — підмножина функцій $f(x)$ із класу $\tilde{L}_{\beta,p}^{\psi}$, у яких нульовий коефіцієнт Фур'є $a_0(f) = 0$. Тоді згідно з означеннями $\tilde{\Psi}_\beta H_p^1 \subset \tilde{L}_{\beta,p}^{\psi}$ і $\tilde{\Psi}_\beta H_p^1 \subset \tilde{\Psi}_\beta H_p^0$.

Зміна нульового коефіцієнта ядра згортки $\tilde{\Psi}_\beta(t)$ зумовлює зміну нульового коефіцієнта ядра методу наближень.

Покладемо $\lambda_n^\psi(0) = 1 - \dfrac{g_n^\psi(0)}{\psi(0)}$, де $g_n^\psi(k)$ — послідовність, визначена рівністю (18), та $\psi(0) \ne 0$. Замість лінійного оператора $U_n(\Lambda^\psi, f, x)$ будемо розглядати лінійний оператор $U_n(\Lambda^\psi, f, x) = \dfrac{1}{\pi}(f * \hat{\lambda}_n^\psi(x))$, для якого

$$\begin{aligned} \lambda_{n,0}^\psi(k) &= 1 - \frac{g_n^\psi(k)}{\psi(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \\ \hat{\lambda}_n^\psi(x) &= \frac{1}{2}\lambda_{n,0}^\psi(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,0}^\psi(k) \cos kx. \end{aligned} \tag{70}$$

Для класів згорток $\tilde{\Psi}_0 H_p^0$ із парним ядром справедливе наступне твердження.

**Теорема 3.** *Якщо виконується умова* (4) *та* $1 \le p \le \infty$, *то*

$$\mathscr{E}(\tilde{\Psi}_0 H_p^0, U_n(\Lambda_0^\psi))_{\tilde{p}} = \psi(n) + n|\psi'(n)|. \tag{71}$$

Міркуючи, як і при доведенні рівностей (8), (10), та використовуючи позначення (18), (70), одержуємо

$$e(p) = \mathscr{E}(\tilde{\Psi}_\beta H_p^0, U_n(\Lambda_0^\psi))_{\tilde{p}} =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_{\tilde{p}} \le 1} \frac{1}{\pi} \left\| \varphi * \left( \frac{g_n^\psi(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_n^\psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)\right\|_{\tilde{p}}. \tag{72}$$

Із теореми 1 і наслідка зі статті [7] випливає, що функція $e(p)$ при $1 \le p \le 2$ не зростає, а при $2 \le p \le \infty$ не спадає, $e(p) = e(p')$, де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$,

$$\min_{1 \le p \le \infty} e(p) = e(2) = \max_{k \ge 0} |g_n^\psi(k)|, \tag{73}$$

$$\max_{1 \le p \le \infty} e(p) = e(1) = e(\infty) = \frac{1}{\pi} \left\| \frac{g_n^\psi(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_n^\psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_{\tilde{1}}. \tag{74}$$

Якщо виконується умова (4), то послідовність $g_n^\psi(k)$ невід'ємна, не зростаюча, опукла донизу і $\lim\limits_{k \to \infty} g_n^\psi(k) = 0$. Тоді (див., наприклад, [5, с. 652]) функція $\dfrac{g_n^\psi(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_n^\psi(k) \cos kt$ невід'ємна,

$$\max_{k \ge 0} |g_n^\psi(k)| = g_n^\psi(0) = \psi(n) + n|\psi'(n)|, \tag{75}$$

$$\frac{1}{\pi} \left\| \frac{g_n^\psi(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_n^\psi(k) \cos kt \right\|_{\tilde{1}} = g_n^\psi(0). \tag{76}$$

Із співвідношень (72) – (76) випливає (71) і теорема 3 доведена.


1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
5. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 963 с.
6. *Бушев Д. Н., Степанец А. И.* О приближении слабо дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 3. – С. 406–412.
7. *Бушев Д. Н., Ковальчук И. Р.* О приближении классов сверток // Там же. – 1993. – **45**, № 1. – С. 26–31.
8. *Коровкин П. П.* Об одном асимптотическом свойстве суммирования рядов Фурье и о наилучшем приближении функций класса $\mathbb{Z}_2$ линейными положительными операторами // Успехи мат. наук. – 1953. – **13**, № 6184. – С. 99–103.
9. *Бушев Д. Н.* Об асимптотически наилучшем приближении классов дифференцируемых функций линейными положительными операторами // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 2. – С. 154–162.


Одержано 07.06.96