УДК 517.944:519.46

$\boxed{\text{В. І. Фущич}}$, **М. І. Сєров, Л. О. Тулупова** (Ін-т математики НАН України, Київ)

УМОВНА СИМЕТРІЯ РІВНЯНЬ НАВ'Є – СТОКСА

The conditional symmetry of the Navier–Stokes equations is studied. The multiparameter families of exact solutions of the Navier–Stokes equations are constructed.

Вивчена умовна симетрія рівнянь Нав'є – Стокса. Побудовані багатопараметричні сім'ї точних розв'язків рівнянь Нав'є – Стокса.

Розглянемо систему рівнянь Нав'є – Стокса

$$\begin{cases} \vec{u}_0 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u} + \lambda\Delta\vec{u} = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}p; \\ \rho_0 + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0; \\ p = f(\rho), \end{cases} \tag{1}$$

де $\vec{u} = \vec{u}(x) \in R_n$, $\rho = \rho(x) \in R_1$; $p = p(x) \in R_1$; $x = (x_0; \vec{x}) \in R_{1+n}$.
Ліївська симетрія рівнянь (1) добре вивчена (див., наприклад, [1]). Результати цих досліджень можна сформулювати у вигляді наступного твердження.

Теорема 1. *Максимальна алгебра інваріантності рівнянь* (1) *складається з операторів:*

1) $\partial_0 = \dfrac{\partial}{\partial x_0}$, $\partial_a = \dfrac{\partial}{\partial x_a}$, $G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a}$, $J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a}$,

якщо $F(\rho)$ *— довільна гладка функція, де* $F(\rho) = \dot{f}(\rho)/\rho$;

2) ∂_0, ∂_a, G_a, J_{ab}, $D_1 = \rho\,\partial_\rho$, $D_2 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a}$, *якщо* $F(\rho) = 0$;

3) ∂_0, ∂_a, G_a, J_{ab}, $D_3 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \dfrac{2}{k+1}\rho\partial_\rho - u^a\partial_{u^a}$ (k *— довільне*),

якщо $F(\rho) = \lambda\rho^k$;

4) ∂_0, ∂_a, G_a, J_{ab}, $D_4 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - n\rho\,\partial_\rho - u^a\partial_{u^a}$;

$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a - nx_0\rho\,\partial_\rho + (x_a - x_0u^a)\partial_{u^a}$, *якщо* $F(\rho) = \lambda\rho^{(2-n)/n}$.

В цій роботі досліджено умовну симетрію системи (1). Докладніше про поняття умовної симетрії див. роботи [1 – 4].

Розглянемо спочатку одновимірний випадок. При $x = (x_0, x_1)$ та $u = u(x)$ система (1) має вигляд

$$\begin{cases} u_0 + uu_1 + \lambda u_{11} + F(\rho)\rho_1 = 0; \\ \rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

де $F(\rho) = \dot{f}(\rho)/\rho$. Оператор умовної інваріантності будемо шукати у вигляді

$$Q = A(x,\rho,u)\partial_0 + B(x,\rho,u)\partial_1 + C(x,\rho,u)\partial_p + D(x,\rho,u)\partial_u, \tag{3}$$

де A, B, C, D — гладкі функції. Диференціальний оператор першого порядку Q діє на многовиді $(x, \rho, u) \in R_4$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Рівняння* (2) Q *-умовно інваріантні відносно оператора* (3), *якщо функції* A, B, C *і* D *задовольняють систему диференціальних рівнянь в одному з таких випадків:*

I. $A \neq 0$ (*не втрачаючи загальності можна покласти* $A = 1$):

1) $B \neq u$:

$$(u-B)\left\{\frac{1}{\rho}[C_u(B-u)-C(B_u+1)]+C_\rho\right\}-B_0-BB_1+D+$$
$$+(BD_u-B_uD)+(D_\rho\rho-D_uu)=0,$$

$$\frac{-2B_uC}{\rho}\left[D+\frac{C}{\rho}(B-u)\right]+\frac{1}{B-u}(B_\rho C+D_\rho\rho)\left(\frac{\lambda}{\rho}C_1-\frac{\lambda C}{\rho^2}C_u-D\right)+$$
$$+\left\{\frac{\lambda}{\rho^3}B_{uu}C^3+\frac{\lambda}{\rho^2}C^2(D_{uu}-2B_{1u})+\frac{C}{\rho}[B_1u-D+B_0+FC_u+\right.$$
$$\left.+\lambda B_{11}-2\lambda D_{1u}+2B_1(B-u)]+D_0+D_1u-FC_1+\lambda D_{11}+2B_1D\right\}=0$$

$$\frac{C}{\rho}[C_u(B-u)-C(B_u+1)]+C_0+C_uD+C_1u+D_1\rho+C(B_1+C_\rho-D_u)=$$
$$\left\{\frac{\lambda C}{\rho^2}\left[\frac{C}{B-u}(B_u-2)+2C_u\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho}\left[2C(B-u)+\frac{\lambda C}{B-u}(C_\rho-B_1)-\lambda C_1\right]+3D+\frac{CF}{B-u}\right\}+$$
$$+\frac{2}{\rho}B_u\left\{\left[\frac{2C}{\rho}(B-u)+D\right](B-u)+FC\right\}+$$
$$+\frac{\lambda}{B-u}D_\rho\left\{\frac{1}{\rho}[C_u(B-u)-C(2-B_u)]+C_\rho-B_1+\frac{F\rho}{\lambda}\right\}-$$
$$-\frac{B_1}{\rho}[F\rho+(B-u)(2B-u)]+\lambda\left\{\frac{3}{\rho^3}B_{uu}C^2(u-B)+\right.$$
$$+\frac{2C}{\rho^2}\left[(B-u)(2B_{1u}-D_{uu})-CB_{\rho u}\right]+$$
$$\left.+\frac{1}{\rho}[2C(B_{1\rho}-D_{\rho u})+(B-u)(2D_{1u}-B_{11})]+2D_{1\rho}\right\}B_\rho-$$
$$-C\dot{F}-FC_\rho+D_uF-\frac{B-u}{\rho}(B_0-D+FC_u)=0,$$

$$B_{\rho\rho}\rho^2+(2B_{\rho u}\rho)(B-u)+B_{uu}(B-u)^2+$$
$$+B_\rho\rho(2-B_u)-\frac{1}{B-u}B_\rho^2\rho^2=0,$$

$$B_\rho\left\{-2F-2\frac{(B-u)^2}{\rho}+\frac{\lambda}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}(2C[2-B_u]-C_u[B-u])+\right.\right.$$
$$\left.\left.+B_1-C_\rho-\frac{1}{B-u}(B_\rho C+D_\rho\rho)\right]\right\}-\frac{2(B-u)}{\rho}B_u\left[F+\frac{(B-u)^2}{\rho}\right]+$$
$$+\lambda\left\{\frac{(B-u)^2}{\rho^2}D_{uu}+\frac{1}{\rho}[2(B-u)D_u+(2-B_u)D_\rho]+D_{\rho\rho}\right\}+$$

$$+ \lambda\frac{B-u}{\rho^2}\left\{\frac{3C(B-u)}{\rho}B_{uu} + 2[2CB_{\rho u} - B_{1u}(B-u)] + \rho[2CB_{\rho\rho} - 2B_{1\rho}(B-u)]\right\} = 0; \tag{4}$$

2) $B = u$:

$$D_\rho = 0,$$

$$D_0 + D_1 u - FC_1 + \frac{C}{\rho}(FC_u - 3D) + \lambda\left(\frac{C^2}{\rho^2}D_{uu} - \frac{2C}{\rho}D_{1u} + D_{11}\right) = 0,$$

$$C_0 + C_u D - CD_u - CC_\rho + C_1 u + D_1\rho - \frac{2C^2}{\rho} = 0,$$

$$F\left(\frac{2C}{\rho} + D_u - C_\rho\right) - C\dot{F} = 0.$$

II. $A = 0$ *(не втрачаючи загальності можна покласти* $B = 1$):

$$D_0 + FCD_u + D_1 u - C^2\dot{F} - DD_\rho\rho + (\lambda D_\rho - F)(C_1 + C_u D + CC_\rho) +$$
$$+ \lambda[D_{11} + D(2D_{1u} + DD_{uu} + 2CD_{\rho u}) + C(2D_{1\rho} + CD_{\rho\rho})] + D^2 = 0,$$
$$FCC_u - \lambda C_u(D_1 + DD_u + C_u D_\rho) + D(2C + D_u\rho) + C_0 + C_1 u + D_1\rho = 0.$$

Доведення. Випадок І.1. При $A = 1$ оператор (3) має вигляд

$$Q = \partial_0 + B(x,\rho,u)\partial_1 + C(x,\rho,u)\partial_\rho + D(x,\rho,u)\partial_u, \tag{5}$$

тоді

$$Q\rho = \rho_0 + B\rho_1 - C = 0,$$
$$Qu = u_0 + Bu_1 - D = 0. \tag{6}$$

Запишемо умову інваріантності системи (2) відносно оператора (5):

$$\tilde{Q}S_1 = {}^0\eta^1 + {}^1\eta^1 u + \lambda\,{}^{11}\eta^1 + Du_1 - C\dot{F}\rho_1 - F\,{}^1\eta^0 = 0,$$
$$\tilde{Q}S_2 = {}^0\eta^0 + {}^1\eta^0 u + {}^1\eta^1\rho + D\rho_1 + Cu_1 = 0, \tag{7}$$

де

$$S_1 = u_0 + uu_1 + \lambda u_{11} + F(\rho)\rho_1,$$
$$S_2 = \rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1,$$
$$\xi^0 = 1, \quad \xi^0 = B(x,\rho,u), \quad \eta^0 = C(x,\rho,u), \quad \eta^1 = D(x,\rho,u),$$
$${}^\beta\eta^\alpha = \mathbf{D}_\beta\eta^\alpha - u_\delta\mathbf{D}_\beta\xi^\delta,$$
$${}^{\beta\gamma}\eta^\alpha = \mathbf{D}_\gamma{}^\beta\eta^\alpha - u_{\delta\beta}\mathbf{D}_\gamma\xi^\delta,$$

$\mathbf{D}_\alpha$ — оператор повного диференціювання; а $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ набувають значень 0 і 1.

Переходячи на многовид (x, ρ, u), маємо

$$\rho_{00} + B\rho_{01} = L_1, \quad \rho_{01} + B\rho_{11} = L_2,$$
$$u_{00} + Bu_{01} = L_3, \quad u_{01} + Bu_{11} = L_4, \tag{8}$$
$$\rho_{00} + u\rho_{01} + \rho u_{01} = L_5, \quad \rho_{01} + u\rho_{11} + \rho u_{11} = L_6,$$

де

$$L_1 = \mathbf{D}_0 C - \rho_1 \mathbf{D}_0 B, \quad L_2 = \mathbf{D}_1 C - \rho_1 \mathbf{D}_1 B,$$
$$L_3 = \mathbf{D}_0 D - u_1 \mathbf{D}_0 B, \quad L_4 = \mathbf{D}_1 D - u_1 \mathbf{D}_1 B,$$
$$L_5 = -\rho_1 u_0 - \rho_0 u_1, \quad L_6 = -2\rho_1 u_1.$$

Складемо систему лінійних рівнянь (8) відносно других похідних функцій ρ та u. Ця система буде сумісна, коли виконуватиметься умова

$$L_5 - L_1 - uL_2 + BL_6 - \rho L_4 = 0. \tag{9}$$

Виберемо вільну змінну ρ_{11}. Тоді

$$\begin{aligned} \rho_{00} &= L_1 - BL_2 + B^2\rho_{11}, \\ \rho_{01} &= L_2 - B\rho_{11}, \\ u_{00} &= L_3 - BL_4 + \frac{B^2}{\rho}[L_6 - L_2 + (B-u)\rho_{11}], \\ u_{01} &= L_4 - \frac{B}{\rho}[L_6 - L_2 + (B-u)\rho_{11}], \\ u_{11} &= \frac{1}{\rho}[L_6 - L_2 + (B-u)\rho_{11}]. \end{aligned} \tag{10}$$

Щоб визначити перші похідні функцій ρ та u, складемо систему з другого рівняння системи (2) та системи (6). Оскільки ранг одержаної системи 3, а кількість змінних — 4, буде одна вільна змінна, за яку вважатимемо ρ_1. Отже, маємо

$$\begin{aligned} \rho_0 &= C - B\rho_1, \\ u_1 &= \frac{1}{\rho}[(B-u)\rho_1 - C], \\ u_0 &= D - \frac{B}{\rho}[(B-u)\rho_1 - C]. \end{aligned} \tag{11}$$

Розв'язуючи одночасно перше рівняння системи (2) та останнє рівняння системи (10), знаходимо

$$\begin{aligned} \rho_{11} = \frac{1}{B-u}\Big\{ &\frac{\rho_1}{\lambda}[F\rho + (B-u)^2] + \frac{1}{\lambda}(Cu - D\rho - BC) + \\ &+ \frac{2\rho_1}{\rho}[(B-u)\rho_1 - C] + \frac{1}{\rho}(C_u - B_u\rho_1)[(B-u)\rho_1 - C] + \\ &+ C_1 + C_\rho\rho_1 - B_1\rho_1 - B_\rho\rho_1^2\Big\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Підставляючи ρ_{11} з (12) в (10), одержуємо вираз для всіх інших других похідних через ρ_1. Потім, підставляючи вирази для всіх похідних через ρ_1 в (7) та умову сумісності (9) і розщеплюючи ці рівняння за степенями ρ_1, одержуємо рівняння (4).

Випадки I.2 та II доводяться аналогічно.

Теорему доведено.

Для того щоб виписати оператор (3), необхідно знайти розв'язок *системи (4)*, що, очевидно, в загальному випадку зробити неможливо.

При деяких значеннях функції $F(\rho)$ вдалося знайти частинні розв'язки цих систем і за ними побудувати такі оператори:

$$
\begin{aligned}
&F = \lambda, \quad Q_1 = \partial_0 + u\partial_1 + k\rho^2\partial_\rho, \\
&F = \lambda, \quad Q_2 = x_0\partial_1 + \frac{1}{mx_0}\partial_\rho + \partial_u, \\
&F = \lambda\rho, \quad Q_3 = x_0\partial_1 - \frac{m}{x_0^2\rho^2}\partial_\rho + \partial_u, \\
&F = -k^2\rho, \quad Q_4 = \left(x_0^2 + m^2\right)\partial_1 + \frac{m}{k}\partial_\rho + x_0\partial_u, \\
&F = \lambda\rho^3, \quad Q_5 = 3x_0\partial_1 + \frac{2u}{\rho^3}\partial_\rho + \partial_u, \\
&F = f(\rho), \quad Q_6 = x_1\partial_1 + u\partial_u, \\
&F = f(\rho), \quad Q_7 = F(\rho)\partial_1 + \partial_\rho,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

де λ, m, k — довільні сталі.

Оператори Q_i використані для побудови анзаців, редукції та знаходження точних розв'язків системи (2). Нижче наведені анзаци, які побудовано за операторами (13) і які дозволяють редукувати систему (2) до систем звичайних диференціальних рівнянь, та точні розв'язки системи рівнянь Нав'є – Стокса, що одержані після розв'язання відповідних редукованих рівнянь:

1. $\begin{cases} x_0 u - x_1 = \varphi^1(u); \\ x_0 + \dfrac{c_1}{\rho} = \varphi^0(u), \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x_0 u - x_1 = \Phi(u); \\ x_0 + \dfrac{c_1}{\rho} = \Phi(u), \end{cases}$

2. $\begin{cases} \rho = \dfrac{x_1}{mx_0^2} + \varphi^0(x_0); \\ u = \dfrac{x_1}{x_0} + \varphi^1(x_0), \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \rho = \dfrac{x_1}{mx_0^2}\left[x_1 - \dfrac{M}{m}(\ln x_0 + 1) + c\right] + \dfrac{k}{x_0}; \\ u = \dfrac{1}{x_0}\left(c + x_1 - \dfrac{M}{m}\ln x_0\right), \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{\rho}{2} = -\dfrac{mx_1}{x_0^3} + \varphi^0(x_0); \\ u = \dfrac{x_1}{x_0} + \varphi^1(x_0), \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \dfrac{\rho^2}{2} = -\dfrac{mx_1}{x_0^2}\left(\dfrac{Mm^2}{2x_0^2} - \dfrac{mx_1}{x_0} + c_2\right); \\ u = \dfrac{1}{x_0}\left(x_1 - \dfrac{Mm}{x_0}\right), \end{cases}$

4. $\begin{cases} \rho = \dfrac{mx_1}{k\left(x_0^2 + m^2\right)} + \varphi^0(x_0); \\ u = \dfrac{x_0 x_1}{x_0^2 + m^2} + \varphi^1(x_0), \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \rho = \dfrac{m^2 x_1 - c_1 x_0}{km\left(x_0^2 + m^2\right)}; \\ u = \dfrac{c_1 + x_0 x_1}{x_0^2 + m^2}, \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{\rho^4}{4} = \dfrac{x_1^2}{9x_0^2} + \dfrac{2\varphi^1 x_1}{3x_0} + \varphi^0(x_0); \\ u = \dfrac{x_1}{3x_0} + \varphi^1(x_0), \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \dfrac{\rho^4}{4} = \dfrac{x_1^2}{9x_0^2} + \dfrac{2c_1 x_1}{3x_0^2} + \varphi^0(x_0); \\ u = \dfrac{x_1}{3x_0} + \dfrac{c_2}{x_0^{4/3}}, \end{cases}$

6. $\begin{cases} \rho = \varphi^0(x_0); \\ u = x_1\varphi^1(x_0), \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \rho = \dfrac{c_2}{x_0 + c_1}; \\ u = \dfrac{x_1}{x_0 + c_1}, \end{cases}$

7. $$\begin{cases} \int F(\rho)d\rho = x_1 + \varphi^0(x_0); \\ u = \varphi^1(x_0), \end{cases} \qquad \begin{cases} \int F(\rho)d\rho = x_1 + \dfrac{x_0^2}{2} - c_1 x_0; \\ u = c_2 - x_0. \end{cases}$$

Через Φ позначено довільну гладку функцію; M, c, c_1, c_2, k, m — довільні сталі.

У випадку довільної кількості змінних в рівняннях (1) дослідження умовної симетрії пов'язане з громіздкими перетвореннями і в цій статті не наводиться. Однак деякі з операторів умовної симетрії n-вимірних рівнянь (1) можуть бути одержані безпосереднім узагальненням операторів (13). Такі узагальнення наведені нижче разом з анзацами, побудованими за цими операторами, і відповідними точними розв'язками системи Нав'є – Стокса (1).

Оператор $Q_a = x_0\partial_a + \dfrac{\alpha_a}{mx_0}\partial_\rho + \partial_{u^a}, \quad F = \mu$:

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{x}}{m\omega^2} + \varphi^0(\omega); \\ \vec{u} = \dfrac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega} + \vec{\varphi}(\omega); \\ \omega = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{x} + k}{mx_0^2} - \dfrac{M(\ln x_0 + 1)}{m^2 x_0^2} + \dfrac{\lambda}{x_0}; \\ \vec{u} = \dfrac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{x_0} - \dfrac{M\vec{\alpha}\ln x_0}{mx_0} + \dfrac{k\vec{\alpha}}{x_0}. \end{cases}$$

Оператор $Q_a = x_0\partial_a + \dfrac{m\alpha_a}{\rho x_0^2}\partial_\rho + \partial_{u^a}, \quad F = \mu\rho$:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^2}{2} = -\dfrac{m(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega^3} + \varphi^0(\omega); \\ \vec{u} = \dfrac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega} + \vec{\varphi}(\omega); \\ \omega = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\rho^2}{2} = -\dfrac{m(\vec{\alpha}\vec{x}) + k}{x_0^3} + \dfrac{Mm^2}{x_0^4} + \dfrac{k}{x_0^2}; \\ \vec{u} = \dfrac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x} + k)}{x_0} - \dfrac{Mm\vec{\alpha}}{x_0^2}. \end{cases}$$

Оператор $Q_a = \left(x_0^2 + m^2\right)\partial_a + \dfrac{m\alpha_a}{k}\partial_\rho + x_0\partial_{u^a}, \quad F = -k^2\rho$:

$$\begin{cases} \rho = -\dfrac{m(\vec{\alpha}\vec{x})}{k(\omega^2 + m^2)} + \varphi^0(\omega); \\ \vec{u} = \dfrac{\omega\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega^2 + m^2} + \vec{\varphi}(\omega); \\ \omega = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \left[m^2(\vec{\alpha}\vec{x} + c_2) - c_1 x_0\right]\dfrac{km}{x_0^2 + m^2}; \\ \vec{u} = \dfrac{x_0\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x} + c_2) + c_1\vec{\alpha}}{x_0^2 + m^2}. \end{cases}$$

Оператор $Q_a = (2n+1)x_0\partial_a + \dfrac{2nu^a}{\rho^3}\partial_\rho + \partial_{u^a}, \quad F = \rho^3$:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^4}{4} = \dfrac{n}{2n+1}\dfrac{\vec{x}^2}{\omega^2} + \dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{\vec{x}\vec{\varphi}}{\omega} + \varphi^0(\omega); \\ \vec{u} = \dfrac{\vec{x}}{(2n+1)\omega} + \vec{\varphi}(\omega); \\ \omega = x_0, \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{\rho^4}{4} = \dfrac{n}{2n+1}\dfrac{\vec{x}^2}{x_0^2} + \dfrac{n\vec{\lambda}^2}{x_0^2} + \\ + \dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{\vec{x}\vec{\lambda}}{x_0^2} + kx_0^{-4n/(2n+1)}; \\ \vec{u} = \dfrac{\vec{x}}{(2n+1)x_0} + \dfrac{\vec{\lambda}}{x_0}. \end{cases}$$

Оператор $Q_a = (2n+1)x_0\partial_a + \dfrac{x_a - x_0 u^a}{x_0\rho^3}\partial_\rho + \partial_{u^a}, \quad F = \rho^3$:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^4}{4} = \dfrac{n}{2n+1}\dfrac{\bar{x}^2}{\omega^2} - \dfrac{1}{2n+1}\dfrac{\bar{x}\bar{\varphi}}{\omega} + \varphi^0(\omega); \\ \bar{u} = \dfrac{\bar{x}}{(2n+1)\omega} + \bar{\varphi}(\omega); \\ \omega = x_0, \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{\rho^4}{4} = \dfrac{n}{(2n+1)^2}\dfrac{\bar{x}^2}{x_0^2} + \dfrac{\bar{\lambda}^2}{4n} - \\ - \dfrac{1}{2n+1}\dfrac{\bar{x}\bar{\lambda}}{x_0^2} + kx_0^{-4n/(2n+1)}; \\ \bar{u} = \dfrac{\bar{x}}{(2n+1)x_0} + \bar{\lambda}. \end{cases}$$

Оператор $Q_a = 3x_0\partial_a + \dfrac{2\alpha_a}{\rho^3}\bar{\alpha}\bar{u}\partial_\rho + \partial_{u^a}, \quad F = \rho^3$:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^4}{4} = \left(\dfrac{\bar{\alpha}\bar{x}^2}{3\omega}\right)^2 - \dfrac{2(\bar{\alpha}\bar{x})(\bar{\alpha}\bar{\varphi})}{3\omega} + \varphi^0(\omega); \\ \bar{u} = \dfrac{\bar{\alpha}(\bar{\alpha}\bar{x})}{3\omega} + \bar{\varphi}(\omega); \\ \omega = x_0, \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{\rho^4}{4} = \left(\dfrac{\bar{\alpha}\bar{x}^2}{3x_0}\right)^2 + \dfrac{2k(\bar{\alpha}\bar{x})}{3x_0} + \\ + \dfrac{k^2}{x_0^2} + \lambda x_0^{-4/3}; \\ \bar{u} = \dfrac{\bar{\alpha}(\bar{\alpha}\bar{x})}{3x_0} + \dfrac{k\bar{\alpha}\bar{x}}{x_0}. \end{cases}$$

Оператор $Q_a = 3x_0\partial_a + \dfrac{\alpha_a}{x_0\rho^3}(\bar{\alpha}\bar{x} - x_0\bar{\alpha}\bar{u})\partial_\rho + \partial_{u^a}, \quad F = \rho^3$:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^4}{4} = \left(\dfrac{\bar{\alpha}\bar{x}^2}{3\omega}\right)^2 - \dfrac{(\bar{\alpha}\bar{x})(\bar{\alpha}\bar{\varphi})}{3\omega} + \varphi^0(\omega); \\ \bar{u} = \dfrac{\bar{\alpha}(\bar{\alpha}\bar{x})}{3\omega} + \bar{\varphi}(\omega); \\ \omega = x_0, \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{\rho^4}{4} = \left(\dfrac{\bar{\alpha}\bar{x}}{3x_0}\right)^2 + \dfrac{(\bar{\alpha}\bar{\lambda})^2}{4} - \\ - \dfrac{(\bar{\alpha}\bar{x})(\bar{\alpha}\bar{\lambda})}{3x_0} + kx_0^{-4/3}; \\ \bar{u} = \dfrac{\bar{\alpha}(\bar{\alpha}\bar{x})}{3x_0} + \bar{\lambda}. \end{cases}$$

Оператор $Q_a = \bar{\alpha}\bar{x}\partial_a + \alpha_a u^b\partial_{u^k}, \quad F = F(\rho)$:

$$\begin{cases} \rho = \varphi^0(\omega); \\ \bar{u} = \bar{\alpha}\bar{x}\bar{\varphi}(\omega); \\ \omega = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{k}{x_0 + \lambda}; \\ \rho = \dfrac{\bar{\alpha}(\bar{\alpha}\bar{x})}{x_0 + \lambda}. \end{cases}$$

Оператор $Q_a = f\partial_a + \bar{\alpha}\partial_\rho, \quad F = F(\rho)$:

$$\begin{cases} \int f(\rho)d\rho = \bar{\alpha}\bar{x} + \varphi^0(\omega); \\ u = \bar{\varphi}(\omega); \\ \omega = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \int f(\rho)d\rho = \bar{\alpha}\bar{x} + \dfrac{x_0^2}{2} - \bar{\lambda}\bar{\alpha}x_0 + k; \\ \bar{u} = \bar{\lambda} - \bar{\alpha}x_0. \end{cases}$$

В цих формулах $\bar{\alpha}$ — довільний вектор, для якого виконується умова $(\bar{\alpha})^2 = 1$; $\bar{\lambda}$ — довільний вектор; M, k, m, c_1, c_2 — довільні сталі; n — розмірність простору.

Зауважимо, що n-вимірне узагальнення оператора Q_1 знайти не вдалося, а оператор Q_5 узагальнено чотирма різними способами.

Таким чином, наведені результати вказують на те, що рівняння Нав'є – Стокса мають приховані симетрії, які не можна одержати за допомогою алгоритму Лі. Ці симетрії можна використати для знаходження точних розв'язків даних рівнянь.

1. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 339 с.
2. *Фущич В. И.* Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр. мат. журн. – 1991. – **43,** № 11. – С. 1456–1470.
3. *Серов Н. И.* Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Там же. – 1990. – **42,** № 10. – С. 1370–1376.
4. *Fushchich W. I., Serov N. I., Tulupova L. A.* The conditional invariance and exact solutions of the nonlinear diffusion equation // Dopov. Ukr. Acad. Nauk. – 1993. – № 4. – P. 37–40.

Одержано 27.12.93