УДК 517.567.5

Г. Ч. Курінний (Харків. ун-т)

КОНГРУЕНЦІЇ ТА КВАЗІТОТОЖНОСТІ НА УНАРІ

We establish the conditions under which the fact that all the congruences of two unars (universal algebras with one unary operation) are convergent implies the convergence of manifolds and quasimanifolds generated by the unars under consideration.

Знайдені умови, при виконанні яких із збіжності всіх конгруенцій двох унарів (універсальних алгебр з однією унарною операцією) випливає збіжність породжених цими унарами многовидів та квазімноговидів.

Для універсальної алгебри A через $\operatorname{Con} A$ позначимо гратку її конгруенцій, а через $\mathfrak{K}(A)$ (відповідно $\mathfrak{M}(A)$) — квазімноговид (відповідно многовид), що породжений цією алгеброю A. Рівність

$$\operatorname{Con} A = \operatorname{Con} B \tag{1}$$

для універсальних алгебр ми розуміємо в „конкретному", а не „абстрактному" виконанні, тобто (1) виконується тоді і тільки тоді, коли носії універсальних алгебр A та B збігаються, кожна конгруенція алгебри A є конгруенцією алгебри B і навпаки.

Робота присвячена знаходженню необхідних та достатніх умов для заданого унара A, при виконанні яких для будь-якого унара B істинна імплікація

$$\operatorname{Con} A = \operatorname{Con} B \Rightarrow \mathfrak{K}(A) = \mathfrak{K}(B). \tag{2}$$

Одночасно розв'язується задача знаходження необхідних та достатніх умов, при виконанні яких для заданого унара A і довільного унара B правильна імплікація

$$\operatorname{Con} A = \operatorname{Con} B \Rightarrow \mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}(B). \tag{3}$$

Нагадаємо визначення і введемо позначення. Унар — це універсальна алгебра з однією унарною операцією $A = \langle V; f \rangle$, $f\colon V \to V$.

Компоненти зв'язності унара A — це підмножини носія, що визначаються умовою: два елементи $x, y \in V$ лежать в одній компоненті зв'язності тоді і тільки тоді, коли для деяких натуральних n, m виконується рівність $f^n(x) = f^m(y)$. Унар з однією компонентою зв'язності називається зв'язним.

Елемент $x \in V$ називається циклічним, якщо $f^n(x) = x$ для деякого натурального n. Множину всіх циклічних елементів однієї компоненти зв'язності називають циклом. Кількість елементів циклу — його довжина — натуральне число. Цикл довжини 1 називають петлею.

Хвіст X циклу C із входом $a \in C$ — це підмножина множини нециклічних елементів унара A, що складається з таких елементів $x \in V$, для яких існує натуральне число n таке, що

$$x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x) \notin C, \qquad f^n(x) = a \in C.$$

Унар A називається променем, якщо

$$V = \{x, f(x), \ldots, f^n(x), \ldots\}$$

для деякого $x \in V$, причому $f^n(x) \neq f^m(x)$ при $n \neq m$.

$|M|$ — кількість елементів множини M.

При вивченні унарів з однаковими конгруенціями особливе значення має клас U, що складається з унарів, для яких можна підібрати $X, Y \subseteq V$, $X \cap Y = \varnothing$, $|V \setminus (X \cup Y)| \in \{1, 2\}$, що задовольняють одну з таких умов:

а) $V \backslash (X \cup Y) = \{a\}, \quad f(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in X \cup \{a\}; \\ x, & \text{якщо } x \in Y \end{cases}$

(унар, що задовольняє умову а), позначаємо через $D_1(X, a, Y)$);

б) $V \backslash (X \cup Y) = \{a, b\}, \quad a \neq b, \quad f(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in X \cup \{a\}; \\ b, & \text{якщо } x \in Y \cup \{b\} \end{cases}$

(унар, що задовольняє умову б), позначаємо через $D_2(X, a, Y, b)$);

в) $V \backslash (X \cup Y) = \{a, b\}, \quad a \neq b, \quad f(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in X; \\ b, & \text{якщо } x \in \{a, b\}; \\ x, & \text{якщо } x \in Y; \end{cases}$

(унар, що задовольняє умову в), позначаємо через $D_3(X, a, b, Y)$);

г) $V \backslash (X \cup Y) = \{a, b\}, \quad a \neq b, \quad f(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in X \cup \{b\}; \\ b, & \text{якщо } x = a; \\ x, & \text{якщо } x \in Y \end{cases}$

(унар, що задовольняє умову а), позначаємо через $D_4(X, a, b, Y)$);

д) $V \backslash (X \cup Y) = \{a, b\}, \quad a \neq b, \quad f(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in X \cup \{b\}; \\ b, & \text{якщо } x \in Y \cup \{a\} \end{cases}$

(унар, що задовольняє умову д), позначаємо через $D_5(X, a, Y, b)$).

Теорема. *Для заданого неодноелементного унара* $A = \langle V; f \rangle$ *наступні умови еквівалентні*:

1) *для довільного унара* $B = \langle V; g \rangle$

$$\operatorname{Con} A = \operatorname{Con} B \Rightarrow \mathfrak{K}(A) = \mathfrak{K}(B);$$

2) *для довільного унара* $B = \langle V; g \rangle$

$$\operatorname{Con} A = \operatorname{Con} B \Rightarrow \mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}(B);$$

3) *унар* A *не може бути записаний в одному з таких виглядів*:

$$A = D_1(X, a, Y), \quad |X| \leq 1; \quad A = D_1(X, a, Y), \quad |Y| \leq 1;$$
$$A = D_2(X, a, Y, b); \quad A = D_3(X, a, b, Y);$$
$$A = D_4(X, a, b, Y); \quad A = D_5(X, a, Y, b).$$

Для перевірки нерівностей

$$\mathfrak{M}(A) \neq \mathfrak{M}(B), \quad \mathfrak{K}(A) \neq \mathfrak{M}(B) \tag{4}$$

будемо вказувати тотожність, яку задовольняє одна з універсальних алгебр A, B, але не задовольняє друга. Для доведення рівностей

$$\mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}(B), \quad \mathfrak{K}(A) = \mathfrak{M}(B)$$

для унарів A, B досить показати, що унар A ізоморфний підпрямому добутку підунарів A_i $(i \in I)$, унар B ізоморфний підпрямому добутку підунарів B_i $(i \in \in I)$, причому $A_i \cong B_i$ для будь-якого $i \in I$.

При доведенні теореми будемо користуватися тим [1, 2], що для виділених унарів із U правильні рівності

$$\operatorname{Con} D_2(X, a, Y, b) = \operatorname{Con} D_5(X, b, Y, a), \tag{5}$$

$$\operatorname{Con} D_3(X, a, b, Y) = \operatorname{Con} D_4(Y, a, b, X), \tag{6}$$

а також (при $|X|, |Y| \geq 2$) має місце рівносильність

$$\operatorname{Con} A = \operatorname{Con} D_1(X, a, Y) \Leftrightarrow A \in \{D_1(X, a, Y), D_1(Y, a, X)\}. \tag{7}$$

Доведення теореми. Покажемо, що при порушенні умови 3 теореми порушуються також умови 1 та 2. Для цього розглянемо випадки, коли унар A можна записати в одному з шести виглядів, що вказані в умові 3, і доведемо нерівності (4) для належним чином вибраного унара $B = \langle V, g\rangle$, що задовольняє (1).

Нехай $A = D_1(X, a, Y)$. Якщо $X = \varnothing$ або $Y = \varnothing$, то один з унарів $A, B = D_1(Y, a, X)$ задовольняє тотожність

$$f(x) = x, \tag{8}$$

але не задовольняє тотожність

$$f(x) = f(y), \tag{9}$$

а другий задовольняє тотожність (9), але не задовольняє тотожність (8). Таким чином, ми вказали унар B, для якого виконуються (1) і (4).

Якщо $|X| = 1$, $X = \{b\}$, то $A = D_3(\varnothing, b, a, Y)$, і з огляду на (6) унаром B можна взяти $D_4(Y, b, a, \varnothing)$. Так вибраний унар B не задовольняє тотожність (9), тому виконується нерівність (4). Подібним чином при $|Y| = 1$, $Y = \{b\}$ можна записати

$$\operatorname{Con} A = \operatorname{Con} D_1(X, a, Y) = \operatorname{Con}(D_1(Y, a, X)) =$$
$$= \operatorname{Con} D_3(\varnothing, b, a, X) = \operatorname{Con} D_4(X, b, a, \varnothing)$$

і унаром B взяти $D_4(X, b, a, \varnothing)$.

Нехай $A = D_2(X, a, Y, b)$. Тоді для унара $B = D_5(X, b, Y, a)$ виконуються (5) і (1). Але A задовольняє рівність

$$f^2(x) = f(x), \tag{10}$$

а B тотожність (10) не задовольняє. Тому для унарів A, B нерівності (4) є правильними.

Якщо $A = D_3(X, a, b, Y)$, то унаром B можна взяти $D_4(Y, a, b, X)$; для так вибраного унара B виконується рівність (6) і, отже, (1), яле на A виконується тотожність $f^3(x) = f^2(x)$, яка на B порушується.

Якщо $A = D_4(X, a, b, Y)$, або $A = D_5(X, a, Y, b)$, то унар B, для якого виконуються (1) і (4), легко вказується з використанням (5), (6) та розглянутих вище випадків.

Перевірку випадків, коли унар A записується в одному з вказаних в умові 3 виглядів, закінчено.

Легко бачити, що кожний неодноелементний унар із многовиду $\mathfrak{A}$, що заданий тотожністю (10), є підпрямим добутком двоелементних нециклічних унарів, кожен з яких ізоморфний певному підунару як $D_1(X, a, Y)$, так і $D_1(Y, a, X)$ при $X, Y \neq \varnothing$. Тому

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{K}(D_1(X, a, Y)) = \mathfrak{K}(D_1(Y, a, X)) =$$
$$= \mathfrak{M}(D_1(X, a, Y)) = \mathfrak{M}(D_1(Y, a, X)).$$

Звідси, враховуючи (7), одержуємо (при $|X|$, $|Y| \geq 2$)

$$A = D_1(X, a, Y) \Rightarrow (2), \qquad A = D_1(X, aY) \Rightarrow (3).$$

Нижче розглядаємо унари $A \notin U$ і перевіряємо виконання умов 1, 2.

Лема 1. *Нехай* $A = \langle V, f\rangle$, $B = \langle V, g\rangle$ — *унари,* $A \notin U$ *і* $\operatorname{Con} A = \operatorname{Con} B$. *Тоді кожна з умов:*

а) A *має в собі промінь;*

б) A *є зв'язним з петлею;*

в) *A є зв'язним з циклом довжини* 2;

г) *A є циклом довжини 3 або більше;*

д) *A є зв'язним з циклом C, $|C| \geq 3$, і єдиним хвостом X, тягне за собою ізоморфність унарів A та B.*

Доведення. Якщо A задовольняє умову а), то $f = g$. Як показала Д. Якубікова [1], рівність $f = g$ правильна також і у випадку в). Таким чином, унари A, B у випадках а), в) тривіально ізоморфні.

Припустимо, що A задовольняє умову б) і $A \neq B$. Тоді (див. [1], твердження 4.11) для деяких $a, b \in A$ і довільного $x \in V$ буде $f(b) = f(a) = a$ і або $f(x) = a$, або $f^n(x) = b$ для деякого натурального n, при цьому

$$g(a) = \begin{cases} a, & \text{якщо } f(x) = b; \\ b, & \text{якщо } f(x) = a; \\ x, & \text{якщо } f(x) \in \{a, b\}. \end{cases}$$

Потрібний ізоморфізм $\alpha : A \to B$ встановлюється правилом

$$\alpha(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } x = b; \\ b, & \text{якщо } x = a; \\ x, & \text{якщо } x \in \{a, b\}. \end{cases}$$

Якщо A є циклом довжини 3 або більше, тобто

$$V = \{a, f(a), \ldots, f^{|V|-1}(a)\}, \quad f^{|V|}(a) = a, \quad |V| \geq 3,$$

то [1] B також є циклом,

$$V = \{a, g(a), \ldots, g^{|V|-1}(a)\}, \quad g^{|V|}(a) = a,$$

і ізоморфізм $A \to B$ можна визначити так:

$$f^k(a) \mapsto g^k(a), \quad k = 0, 1, \ldots, |V| - 1.$$

Припустимо, що унар A задовольняє умову д), причому хвіст X має вхід $a \in C$. Тоді [1] C є циклом унара B і $f(x) = g(x)$, якщо $x, f(x) \in X$. Якщо x, $y \in X$, $x \neq y$, $f(x) = f(y) = a$, то $g(x), g(y) \in C$. Оскільки найменша конгруенція, що містить в собі (x, y), має єдиний неодноелементний клас $\{x, y\}$, то [1] $g(x) = g(y) = b$. Таким чином, унар B також має єдиний хвіст X і його входом буде b. Пряма перевірка показує, що потрібний ізоморфізм встановлюється таким чином:

$$\alpha(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in X \in X = A \setminus C; \\ g^k(b), & \text{якщо } x \in C, \ x = f^k(a) \text{ для деякого } k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Лему доведено.

Продовжуємо доведення теореми; вважаємо, що для унарів A та B виконується (1); унар A не лежить в U.

Як доведено в [1], унари A та B мають однакові компоненти зв'язності. Лема 1 дозволяє розглядати лише унари без променів, при цьому якщо унар A зв'язний, то він має цикл довжини більше 2 і цей цикл має більше одного хвоста. Тому унари $A, B,$ що розглядаються нижче, мають однакові цикли [1], і, як було відмічено при доведені леми 1, хвости циклів у унарів A, B також збігаються.

Введемо множину I, що індексує компоненти зв'язності унарів A, B, $|I| \geq$

≥ 1. Для $i \in I$ множина $J(i)$ індексує хвости циклу із i-ї компоненти. Якщо i-а компонента не має хвостів, є циклом, вважаємо $J(i) = \{\varnothing\}$, $|J(i)| = 1$, якщо ж i-а компонента має хоча б один хвіст, вважаємо $\varnothing \notin J(i)$. Таким чином, для $i \in I$ буде $|J(i)| \geq 1$. Введемо позначення:

$A_i = \langle K_i, f \rangle (K_i \subseteq V,\ i \in I)$ — компоненти зв'язності унара A;

$B_i = \langle K_i, g \rangle (K_i \subseteq V,\ i \in I)$ — компоненти зв'язності унара B;

$C_i \subseteq K_i (i \in I)$ — цикли унарів A, B, що лежать в i-й компоненті;

$A_{i,j}$ (відповідно $B_{i,j}$) ($i \in I,\ j \in J(i)$) — підунар унара A_i (відповідно B_i), що складається з циклу C_i та одного хвоста $X_{i,j}$. Якщо цикл C_i немає хвостів, то $A_{i,\varnothing} = A_i = \langle C_i, f \rangle$ (відповідно $B_{i,\varnothing} = B_i = \langle C_i, g \rangle$);

$$M = \prod_{i \in I} J(i);$$

A_m ($m \in M$) (відповідно B_m) — підунар унара A (відповідно B), компонентами якого є $A_{i,m(i)}$ (відповідно $B_{i,m(i)}$).

Отже, використовуючи знак $\coprod$ для прямого об'єднання, маємо

$$A = \coprod_{i \in I} A_i, \quad B = \coprod_{i \in I} B_i, \quad A_m = \coprod_{i \in I} A_{i,m(i)} \quad B_m = \coprod_{i \in I} B_{i,m(i)}.$$

Лема 2. $A_m \cong B_m$ *для будь-якого* $m \in M$.

Для доведення леми 2 потрібно лише переконатися у тому, що $A_{i,m(i)} \cong$ $\cong B_{i,m(i)}$. Виберемо $i \in I$. Якщо $A_{i,m(i)} \in U$, то цей зв'язний унар містить в собі цикл довжини 2 або 1 (петлю). Оскільки ми розглядаємо зв'язні унари лише з циклами довжини 3 та більше, то A_m незв'язний. Звідси випливає [1], що $A_{i,m(i)} = B_{i,m(i)}$. Якщо $A_{i,m(i)} \notin U$, то можна застосувати лему 1, яка забезпечить існування потрібного ізоморфізму.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Унар A (відповідно B) є підпрямим добутком унарів A_m (відповідно B_m).*

Твердження леми буде обгрунтоване, якщо ми побудуємо сюр'єктивні гомоморфізми

$$\alpha_m : A \to A_m$$

з розділяючою системою ядерних конгруенцій, тобто для будь-яких a, $b \in A$, $a \neq b$, знайдеться елемент $m \in M$ такий, що $\alpha_m(a) \neq \alpha_m(b)$. Потрібні гомоморфізми α_m можна відбудувати таким чином. Для $a \in A$, $a \in K_i$ вимагаємо $\alpha_m(a) = a$, якщо $a \in K_{i,m(i)}$, а коли $a \notin K_{i,m(i)}$, елемент $\alpha_m(a)$ визначаємо умовами: $\alpha_m(a) \in C_i$, $f^n(\alpha_m(a)) = f^n(a)$ для деякого натурального n.

Переконатися в тому, що α_m — справді коректно визначені сюр'єктивні гомоморфізми з розділяючою системою ядерних конгруенцій, можна прямою перевіркою.

Лему 3 доведено.

Із лем 2, 3 випливає доведення теореми.

1. *Jakubikova-Studenovská D.* On congruence relations of monounary algebras. 1 // Czech. Math. J. – 1982. – **32.** – P. 437–459.
2. *Jakubikova-Studenovská D.* On congruence relations of monounary algebras. 2 // Ibid. – 1983. – **33.** – P. 448–466.

Одержано 22.02.95