УДК 517.98

С. В. Тищенко (Нац. ун-т, Киев)

ЗАМЕЧАНИЕ О КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕКТОРАХ ДЛЯ ПАРЫ АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

It is proved that two self-adjoint operators, which anticommute on the dense invariant domain of their common quasianalytic vectors, are strongly anticommuting.

Доведено, що два самоспряжених оператори, які антикомутують на щільній інваріантній області їхніх спільних квазіаналітичних векторів, є сильно антикомутуючими.

Введение. Понятие аналитических векторов введено Нельсоном [1]. При этом два (неограниченных) симметрических оператора оказываются существенно самосопряженными, а их замыкания коммутируют в смысле разложений единицы (сильно коммутируют) тогда и только тогда, когда они коммутируют на плотном инвариантном множестве их совместных аналитических векторов (см. [1]). Нассбаум [2] ввел более общее понятие квазианалитических векторов, на множество которых он перенес упомянутые выше результаты Нельсона (квазианалитический критерий существенной самосопряженности и коммутирование их замыканий в сильном смысле). В работах [3] и независимо в [4, с. 124] приводятся эквивалентные определения понятия антикоммутирования (в сильном смысле) двух неограниченных самосопряженных операторов. Далее в [4, с. 125; 5] доказано, что два самосопряженных оператора сильно антикоммутируют тогда и только тогда, когда они антикоммутируют на плотном инвариантном множестве их совместных аналитических векторов. В настоящей статье этот результат обобщается на случай плотного инвариантного множества общих квазианалитических векторов.

1. Основные определения. Пусть A — линейный симметрический оператор в комплексном гильбертовом пространстве H с нормой $\|x\|$ и скалярным произведением (x, y), $x, y \in H$. Элемент $x \in H$ называется аналитическим вектором для A, если $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n x\| t^n / n!$ сходится для некоторого действительного $t > 0$. Множество аналитических векторов оператора A обозначим через $H^{\omega}(A)$. Элемент $x \in H$ называется квазианалитическим вектором для A, если $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ и удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A^n x\|^{-1/n} = +\infty.$$

Множество квазианалитических векторов оператора A обозначим через $H^q(A)$. Известно [2], что имеет место включение $H^{\omega}(A) \subset H^q(A)$. Элемент $x \in H$ далее называется общим квазианалитическим (аналитическим) вектором для пары операторов A и B, если он входит в каждое из множеств $H^q(A)$ и $H^q(B)$ (соответственно $H^{\omega}(A)$ и $H^{\omega}(B)$), т. е. $x \in H^q(A) \cap H^q(B)$ ($x \in H^{\omega}(A) \cap \cap H^{\omega}(B)$). Следуя [4, с. 124], два неограниченных самосопряженных оператора

$$A = \int_{R^1} \lambda \, dE(\lambda) \quad \text{и} \quad B = \int_{R^1} \mu \, dF(\mu)$$

называются (сильно) антикоммутирующими, если для произвольных $0 \le M, L < < \infty$ антикоммутируют ограниченные самосопряженные операторы $A_M = = \int_{-M}^{M} \lambda \, dE(\lambda)$ и $B_L = \int_{-L}^{L} \mu \, dF(\mu)$, т. е.

$$\{A_M, B_L\} = A_M B_L + B_L A_M = 0. \tag{1}$$

Там же доказано, что сильная антикоммутация двух самосопряженных операторов эквивалентна их антикоммутации на плотном инвариантном относительно обоих операторов множестве, состоящем из общих аналитических векторов. Ниже в предлагаемой работе доказывается, что в последнем утверждении множество общих аналитических векторов можно заменить на множество общих квазианалитических векторов.

Основной результат. Теорема. *Для того чтобы самосопряженные операторы A и B сильно антикоммутировали, необходимо и достаточно, чтобы они антикоммутировали на плотном в H инвариантном относительно A и B множестве D их общих квазианалитических векторов.*

Доказательство. Поскольку доказательство *необходимости* содержится в [4, с. 125] (теорема 5) (учитывая включение $H^{\omega}(A) \cap H^{\omega}(B) \subset H^{q}(A) \cap \cap H^{q}(B)$), то остается доказать лишь *достаточность*. Пусть $f_M(t)$ и $g_L(s)$ — нечетные действительнозначные ограниченные функции следующего вида:

$$f_M(t) = \begin{cases} t, & |t| \le M; \\ 0, & |t| > M \end{cases}, \qquad g_L(s) = \begin{cases} s, & |s| \le L; \\ 0, & |s| > L. \end{cases}$$

Рассмотрим для всех $0 \le M, L < \infty$ самосопряженные ограниченные операторы

$$f_M(A) = A_M = \int\limits_{R^1} f_M(t)\, dE(t), \qquad g_L(B) = B_L = \int\limits_{R^1} g_L(s)\, dF(s).$$

Согласно теореме 10.40 из [6] множество полиномов плотно в каждом из пространств $L_2(R^1, d\|E(t)x\|^2)$ и $L_2(R^1, d\|F(s)x\|^2)$, где x — произвольный квазианалитический вектор для каждого из операторов A и B. Согласно этому результату, найдутся две последовательности полиномов $\{P_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Q_m(s)\}_{m=1}^{\infty}$, сходящиеся к функциям $f_M(t) \in L_2(R^1, d\|E(t)x\|^2)$ и $g_L(s) \in \in L_2(R^1, d\|F(s)x\|^2)$ в соответствующих пространствах L_2, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{R^1} |P_n(t) - f_M(t)|^2\, d\|E(t)x\|^2 = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{R^1} |Q_m(s) - g_L(s)|^2\, d\|F(s)x\|^2 = 0.$$

Заметим, что поскольку функции f_M и g_L — нечетные действительнозначные, то последовательности полиномов также можно выбрать нечетными, с действительными коэффициентами. Используя теперь свойства разложений единицы $E(\cdot)$ и $F(\cdot)$, для любого $x \in D$ получаем сильную сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n(A)x - f_M(A)x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{R^1} |P_n(t) - f_M(t)|^2\, d\|E(t)x\|^2 = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \|Q_m(B)x - g_L(B)x\|^2 = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{R^1} |Q_m(s) - g_L(s)|^2\, d\|F(s)x\|^2 = 0.$$

Тогда при произвольном фиксированном $y \in D$ получаем слабую сходимость

$$\lim_{n\to\infty} (P_n(A)x, y) = (f_M(A)x, y), \qquad \lim_{m\to\infty} (Q_m(B)x, y) = (g_L(B)x, y). \tag{2}$$

Поскольку по предположению $ABx = -BAx$, $x \in D$, и множество D инвариантно относительно A и B, то, как нетрудно проверить, для любых нечетных степеней n, m также справедливо $A^n B^m x = -B^m A^n x$, $x \in D$, а значит по линейности и для любых нечетных полиномов $P_n(A)$ и $Q_m(B)$:

$$P_n(A) Q_m(B) x = -Q_m(B) P_n(A) x, \qquad x \in D. \tag{3}$$

Покажем, что отсюда

$$f_M(A) g_L(B) x = -g_L(B) f_M(A) x, \qquad x \in D.$$

Так как коэффициенты у полиномов — действительные, то

$$(P_n(A))^* = P_n(A), \qquad (Q_m(B))^* = Q_m(B). \tag{4}$$

Учитывая (3) и (4), для произвольных $x, y \in D$ имеем

$$(P_n(A)x, Q_m(B)y) = (Q_m(B)P_n(A)x, y) = -(P_n(A)Q_m(B)x, y) =$$

$$= -(Q_m(B)x, P_n(A)y) = -\overline{(P_n(A)y, Q_m(B)x)}. \tag{5}$$

Переходя в (5) к пределу при $n \to \infty$ (m — фиксированное) и используя первое из равенств (2), получаем $(f_M(A)x, Q_m(B)y) = -\overline{(f_M(A)y, Q_m(B)x)}$, или

$$\overline{(Q_m(B)y, f_M(A)x)} = -(Q_m(B)x, f_M(A)y). \tag{6}$$

Переходя в (6) к пределу при $m \to \infty$ и используя второе из равенств (2), последовательно находим

$$\overline{(g_L(B)y, f_M(A)x)} = -(g_L(B)x, f_M(A)y),$$

$$(f_M(A)x, g_L(B)y) = -(g_L(B)x, f_M(A)y).$$

Учитывая $(g_L(B))^* = g_L(B)$ и $(f_M(A))^* = f_M(A)$, имеем

$$(g_L(B) f_M(A)x, y) = -(f_M(A) g_L(B)x, y).$$

Поскольку $y \in D$, а D — плотно в H, то

$$B_L A_M x = g_L(B) f_M(A) x = -f_M(A) g_L(B) x = -A_M B_L x, \qquad x \in D.$$

Учитывая ограниченность операторов A_M и B_L, а также плотность множества D в H, получаем $B_L A_M = -A_M B_L$ для любых $0 \le M, L < \infty$, т. е. сильную антикоммутацию операторов A и B.

1. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math. – 1959. – **70**, № 3. – P. 572–615.
2. *Nussbaum A. E.* Quasi-analytic vectors // Ark. mat. – 1965. – **6**, № 2. – P. 179–191.
3. *Vasilescu F. H.* Anticommuting selfadjoint operators // Rev. roum. math. pures et appl. – 1983. – **28**. – P. 77–91.
4. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1984. – 232 с.
5. *Pedersen S.* Anticommuting selfadjoint operators // J. Funct. Anal. – 1990. – **89**, № 2. – P. 428–443.
6. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space. – New York: AMS, 1932. – 622 p.

Получено 11.01.96