УДК 512.54

Ф. дэ Джованни, С. Франчиози (ун-т „Федерико II", Неаполь),
Я. П. Сысак (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ВОСХОДЯЩИХ И СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ БЕСКОНЕЧНЫХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУПП

We consider a huperabelian-by-finite group G of a finite abelian section rank, which is the product of two subgroups A and B. We prove that every subgroup H, which belongs to the intersection $A \bigcap B$ and is ascendant in both A and B, is an ascendant subgroup in the group G too. We also show that, in the general case, this statement is not true.

Доведено, що в майже гіперабелевій групі G скінченного абелевого секційного рангу, яка є добутком двох підгруп A та B, кожна підгрупа перетину $A \bigcap B$, що є висхідною як в A, так і в B, є висхідною підгрупою і в групі G. Показано також, що в загальному випадку аналогічне твердження не вірне.

1. Введение. Пусть группа G есть произведение $G = AB$ двух подгрупп A и B и H — подгруппа из пересечения $A \bigcap B$. Очевидно, что если подгруппа H нормальна в обеих подгруппах A и B, то она нормальна и в G. Более того, Майер [1] и Виландт [2] доказали, что если группа G конечна и подгруппа H субнормальна как в A, так и в B, то H субнормальна также и в G. Вопрос о том, справедлив ли соответствующий результат в случае бесконечной группы G, открыт. В некоторых частных случаях, например если коммутант G' группы G нильпотентен, Стоунхевер [3] показал, что ответ на этот вопрос положительный, и анонсировал в [3], что подобное заключение также справедливо, если G — разрешимая минимаксная группа. Цель настоящей статьи — расширить эти результаты на некоторые более широкие классы бесконечных групп. В первой теореме мы рассмотрим восходящие подгруппы некоторых бесконечных факторизуемых групп конечного 0-ранга. Напомним, что группа G имеет конечный 0-ранг, если она имеет конечный субнормальный ряд, факторы которого либо периодические, либо бесконечные циклические, и что подгруппа H из G называется восходящей в G, если она является членом некоторого возрастающего субнормального ряда группы G.

Теорема 1. *Пусть группа G конечного 0-ранга есть произведение $G = AB$ двух подгрупп A и B и H — подгруппа из пересечения $A \bigcap B$, являющаяся восходящей подгруппой как в A, так и в B. Если группа G имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп, факторы которого либо конечны, либо являются абелевыми группами без кручения, то подгруппа H является восходящей в G.*

Говорят, то группа G имеет конечный абелев секционный ранг, если в ней нет бесконечных абелевых секций простой экспоненты. Группа гиперабелева, если она имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп с абелевыми факторами, и почти гиперабелева, если в ней есть гиперабелева подгруппа конечного индекса. Легко видеть, что каждая почти гиперабелева группа конечного абелева секционного ранга имеет конечный 0-ранг и возрастающий ряд нормальных подгрупп, факторы которого либо конечны, либо являются абелевыми группами без кручения. Поэтому следующее утверждение, дающее положительный ответ на вторую часть вопроса 16 из [4], является непосредственным следствием теоремы А.

***Следствие* 1.** *Пусть почти гиперабелева группа G конечного абелева секционного ранга есть произведение $G = AB$ двух подгрупп A и B. Если H — подгруппа из $A \bigcap B$, являющаяся восходящей в обеих подгруппах A и B, то H — восходящая подгруппа группы G.*

Напомним, что радикалом Хирша – Плоткина группы называется ее наибольшая локально нильпотентная нормальная подгруппа. Согласно [5] (теорема 2.31) этот радикал содержит каждую восходящую локально нильпотентную подгруппу группы. Замечая теперь, что каждая локально нильпотентная группа, имеющая возрастающий ряд нормальных подгрупп с абелевыми факторами конечных рангов, гиперцентральна (см., например, [5], следствие к теореме 6.38) и, следовательно, каждая подгруппа в такой группе восходящая, заключаем, что из теоремы A вытекает также следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть группа G конечного 0-ранга есть произведение $G = AB$ двух подгрупп A и B, и пусть H и K — радикалы Хирша – Плоткина подгрупп A и B соответственно. Если группа G имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп, каждый фактор которого либо конечен, либо является абелевой группой без кручения, то пересечение $H \cap K$ содержится в радикале Хирша – Плоткина группы G.*

Группа G называется $\mathfrak{S}_1$-группой, если она имеет конечный абелев секционный ранг и множество простых делителей порядков элементов ее периодических подгрупп конечно. Строение гиперабелевых $\mathfrak{S}_1$-групп описано в [5] (теорема 10.33); в частности, такие группы разрешимы. Очевидно также, что каждая разрешимая минимаксная группа является $\mathfrak{S}_1$-группой, так что следующая теорема слегка улучшает результат, анонсированный Стоунхевером [3], и, кроме того, дает положительный ответ на первую часть вопроса 16 из [4] для $\mathfrak{S}_1$-групп.

Теорема 2. *Пусть почти разрешимая $\mathfrak{S}_1$-группа G есть произведение $G = AB$ двух подгрупп A и B. Если H — подгруппа из $A \cap B$, которая субнормальна в A и в B, то H субнормальна в G.*

Следующая теорема показывает, что в случае локально конечных групп результат, подобный теореме A, не имеет места. Прежде чем ее сформулировать, напомним, что подгруппа H группы G называется системной, если она является членом некоторой субнормальной системы группы G. Очевидно, каждая восходящая подгруппа системна.

Теорема 3. *Существует счетная локально конечная группа вида $G = AB$, которая является расширением абелевой группы посредством локально нильпотентной группы и имеет следующие свойства:*

i) пересечение $A \cap B$ бесконечно;

ii) каждая конечная нетривиальная подгруппа из $A \cap B$ является восходящей как в A, так и в B, но не является системной подгруппой группы G.

Используемые нами обозначения и определения в основном общеприняты и могут быть найдены в [4, 6]. Отметим лишь, что термины „субнормальный ряд" и „субнормальная система", принятые в русской математической литературе, являются эквивалентом термина „серия" из [5, с. 10].

2. Доказательство теоремы 1. Следующая лемма — элементарный результат о восходящих и субнормальных подгруппах.

Лемма 1. *Пусть G — группа, K и L — ее нормальные подгруппы, H — такая подгруппа в G, что $G = HKL$ и H — восходящая (субнормальная) подгруппа в HK и в HL. Тогда H — восходящая (субнормальная) подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_\alpha \lhd H_{\alpha+1} \lhd \ldots \lhd H_\tau = HK$$

— возрастающий (конечный) субнормальный ряд подгруппы HK. Тогда подгруппа $H_\alpha L$ нормальна в $H_{\alpha+1}L$ для каждого ординала $\alpha < \tau$. Поэтому подгруппа $HL = H_0 L$ является восходящей (субнормальной) в $G = HKL$ и, таким образом, H — восходящая (субнормальная) подгруппа группы G. Лемма доказана.

Пусть N — нормальная подгруппа группы G, являющейся произведением $G = AB$ двух подгрупп A и B. Факторизатор подгруппы N в группе G — это подгруппа $X(N) = AN \cap BN$, имеющая так называемую тройную факторизацию

$$X(N) = A^*B^* = A^*N = B^*N,$$

в которой $A^* = A \cap BN$ и $B^* = B \cap AN$ (см. [4], лемма 1.1.4). Очевидно, $A^* \cap \cap B^* = A \cap B$, так что в наших рассуждениях, как и в во многих других вопросах, относящихся к факторизуемым группам, такие тройные факторизации будут играть основную роль.

Лемма 2. *Пусть группа G есть произведение $G = AB = AK = BK$ двух подгрупп A, B и конечной нормальной подгруппы K. Если H — подгруппа из $A \cap B$, являющаяся восходящей в A и в B, то H — восходящая подгруппа в G.*

Доказательство. Так как централизаторы $C_A(K)$ и $C_B(K)$ являются нормальными подгруппами в G и имеют конечные индексы в A и B соответственно, то их произведение $C = C_A(K)\,C_B(K)$ — нормальная подгруппа конечного индекса в G. Рассмотрим конечную фактор-группу $\overline{G} = G/C$, и пусть черта сверху обозначает гомоморфный образ соответствующей подгруппы в этой фактор-группе. Очевидно, $\overline{G} = \overline{A}\,\overline{B}$ и $\overline{H}$ — подгруппа из пересечения $\overline{A} \cap \overline{B}$, субнормальная как в $\overline{A}$, так и в $\overline{B}$. Поэтому по теореме Майера – Виландта (см. [4], теорема 7.5.7) подгруппа $\overline{H}$ субнормальна в $\overline{G}$ и, следовательно, подгруппа HC субнормальна в G. С другой стороны, понятно, что подгруппа H является восходящей подгруппой в $H\,C_A(K)$ и $H\,C_B(K)$ и, значит, по лемме 1 восходящей в HC. Следовательно, H — восходящая подгруппа в G. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть группа G есть произведение $G = AB = AK = BK$ двух подгрупп A, B и периодической нормальной подгруппы K, имеющей возрастающий G-инвариантный ряд с конечными факторами. Если H — подгруппа из $A \cap B$, являющаяся восходящей в обеих подгруппах A и B, то H — восходящая подгруппа в G.*

Доказательство. Пусть

$$1 = K_0 \lhd K_1 \lhd \ldots \lhd K_\alpha \lhd K_{\alpha+1} \lhd \ldots \lhd K_\tau = K$$

— возрастающий G-инвариантный ряд с конечными факторами и для каждого ординала $\alpha < \tau$ обозначим через X_α факторизатор подгруппы K_α в группе $G = AB$. Тогда

$$X_\alpha = A_\alpha B_\alpha = A_\alpha K_\alpha = B_\alpha K_\alpha,$$

где $A_\alpha = A \cap BK_\alpha$ и $B_\alpha = B \cap AK_\alpha$. Если $\alpha < \tau$, то, применяя лемму 2 к фактор-группе $X_{\alpha+1}/K_\alpha$, получаем, что HK_α есть восходящая подгруппа в $X_{\alpha+1}$ и, таким образом, в $HK_{\alpha+1}$. Следовательно, H — восходящая подгруппа в HK. Так как очевидно, что подгруппа HK является восходящей в G, получаем, что таковой является и подгруппа H. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть группа G имеет конечный 0-ранг и разлагается в произведение $G = AB = AK = BK$ двух подгрупп A, B и абелевой нормальной подгруппы без кручения K. Если H — подгруппа из $A \cap B$, являющаяся восходящей в A и в B, то H — восходящая подгруппа в G.*

Доказательство. Предположим, что $A \cap K = B \cap K = 1$, и пусть L — собственная G-инвариантная подгруппа из K, максимальная относительно условия, что фактор-группа K/L без кручения. Индукция по 0-рангу подгруппы K позволяет считать, что лемма справедлива для факторизатора $X(L)$ подгруппы L в группе $G = AB$, так что подгруппа H является восходящей в $X(L)$ и, в частности, в HL. Следовательно, достаточно показать, что подгруппа HL является восходящей в G. Заменяя группу G фактор-группой G/L, можно предполагать, что G действует на K рационально неприводимо. В частности, фактор-группу $A/C_A(K)$ можно рассматривать как неприводимую линейную группу над полем рациональных чисел. Так как группа G имеет конечный 0-ранг, то в силу альтернативы Титса [6] эта фактор-группа почти разрешима. Следовательно, если $C = C_A(K)\,C_B(K)$, то фактор-группа $\overline{G} = G/C$ также почти разрешима и, очевидно, удовлетворяет условиям леммы.

Если $C_A(K) = C_B(K)$, то фактор-группа $\overline{G}$ удовлетворяет сделанным выше предположениям и $C_{\overline{A}}(\overline{K}) = 1$, откуда $C_{\overline{G}}(\overline{K}) = \overline{K}$, что согласно результату Уилсона невозможно (см. [4], лемма 4.1.6). Поэтому $C_A(K) \neq C_B(K)$. Так как $C_G(K) = C_A(K)K = C_B(K)K$, то $C = C_A(K)(K \cap C) = C_B(K)(K \cap C)$ и, таким образом, $K \cap C$ — нетривиальная нормальная подгруппа в G. Ясно, что фактор-группа $\tilde{G} = G/(K \cap C)$ есть произведение вида

$$\tilde{G} = \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{A}\tilde{K} = \tilde{B}\tilde{K}$$

и $\tilde{K}$ — ее периодическая абелева нормальная подгруппа конечного ранга. Поэтому $\tilde{K}$ имеет возрастающий G-инвариантный ряд с конечными факторами и, следовательно, по лемме 3 подгруппа $\tilde{H}$ является восходящей в $\tilde{G}$. Отсюда заключаем, что $H(K \cap C)$ — восходящая подгруппа в G. С другой стороны, она восходящая в $HC_A(K)$ и в $HC_B(K)$, так что в силу леммы 1 H — восходящая подгруппа в HC. В частности, подгруппа H является восходящей в $H(K \cap C)$ и, следовательно, восходящей в G.

Перейдем теперь к общему случаю. Рассмотрим нормальную подгруппу

$$N = (A \cap K)(B \cap K)$$

группы G и обозначим через T/N подгруппу, состоящую из всех элементов конечного порядка фактор-группы K/N. Тогда T/N имеет возрастающий G-инвариантный ряд с конечными факторами. Применяя лемму 3 к факторизатору V/N подгруппы T/N в фактор-группе $G/N = (AN/N)(BN/N)$, получаем, что подгруппа HN является восходящей в подгруппе V и, в частности, в подгруппе HT. Далее, по лемме 1 подгруппа H является восходящей в HN и, значит, восходящей в HT. А так как K/T — подгруппа без кручения фактор-группы G/T и

$$(AT/T) \cap (K/T) = (BT/T) \cap (K/T) = 1,$$

то из первой части доказательства вытекает, что подгруппа HT является восходящей в группе G. Следовательно, H — восходящая подгруппа в G. Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть

$$1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_\alpha < G_{\alpha+1} < \ldots < G_\tau = G$$

— возрастающий ряд нормальных подгрупп группы G, факторы которого либо конечны, либо являются абелевыми группами без кручения. Для каждого ординала $\alpha \leq \tau$ пусть X_α обозначает факторизатор подгруппы G_α в группе $G = AB$. Тогда

$$X_\alpha = A_\alpha B_\alpha = A_\alpha G_\alpha = B_\alpha G_\alpha,$$

где $A_\alpha = A \bigcap B\, G_\alpha$ и $B_\alpha = B \bigcap A\, G_\alpha$. Если $\alpha < \tau$, то фактор-группа $X_{\alpha+1}/G_\alpha$ имеет естественную тройную факторизацию, в которой множитель $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ либо конечен, либо является абелевой группой без кручения. Применяя к этой фактор-группе леммы 2 и 4, заключаем, что подгруппа $H\, G_\alpha$ является восходящей в $X_{\alpha+1}$ и, в частности, восходящей в $H\, G_{\alpha+1}$. Следовательно, H — восходящая подгруппа в G. Теорема доказана.

3. Доказательство теорем 2 и 3. Следующая лемма — некоторый специальный случай теоремы 2.

Лемма 5. *Пусть почти разрешимая $\mathfrak{S}_1$-группа G разложима в произведение $G = A\,B = A\,K = B\,K$ двух собственных подгрупп A и B и периодической полной абелевой нормальной подгруппы K, собственные G-инвариантные подгруппы которой конечны. Если H — подгруппа из $A \bigcap B$, которая субнормальна в обеих подгруппах A и B, то H — субнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Во-первых, централизаторы $C_A(K)$ и $C_B(K)$ являются нормальными подгруппами группы G. Далее, положим $C = C_A(K)\, C_B(K)$ и покажем, что фактор-группа G/C почти полициклическая. Так как по лемме 1 подгруппа H субнормальна в $H\,C$ и в силу теоремы A подгруппа $H\,C$ является восходящей в G, то отсюда будет следовать, что подгруппа $H\,C$, а значит, и подгруппа H, субнормальна в G.

Пусть N — нильпотентная нормальная подгруппа в G, содержащая подгруппу K. Тогда взаимный коммутант $[K, N]$ — собственная полная G-инвариантная подгруппа в K, так что $[K, N] = 1$ и, значит, $N \le C_G(K)$. Поэтому централизатор $C_G(K)$ содержит подгруппу Фиттинга группы G и, следовательно, фактор-группа $G\,/C_G(K)$ почти полициклическая (см. [5], теорема 10.33). Но тогда фактор-группы $A/C_A(K)$ и $B\,/C_B(K)$ также почти полициклические. А так как они изоморфны подгруппам $A\,C/C$ и $B\,C/C$ фактор-группы $G/C = (A\,C/C)\,(B\,C/C)$, то согласно теореме Леннокса–Роузблейда–Зайцева эта фактор-группа G/C почти полициклическая (см. [4], теорема 4.4.2). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Так как по теореме 1 подгруппа H является восходящей в группе G, то можно считать, что группа G бесконечна и, следовательно, ее подгруппа Фиттинга F также бесконечна.

Предположим, что группа G не содержит нетривиальных периодических нормальных подгрупп. Тогда подгруппа F нильпотентна и фактор-группа G/F почти полициклическая (см. [5], теорема 10.33). Пусть K — центр подгруппы F. Так как F без кручения, то фактор-группа F/K также без кручения (см. [5], теорема 2.25) и потому фактор-группа $G/K = (A\,K/K)\,(B\,K/K)$ является $\mathfrak{S}_1$-группой. Индукция по 0-рангу группы G позволяет считать, что для этой фактор-группы теорема 2 справедлива, так что по индуктивному предположению подгруппа $H\,K$ субнормальна в G. Следовательно, достаточно показать, что подгруппа H субнормальна в факторизаторе X подгруппы K в группе G. Последний имеет тройную факторизацию

$$X = A^* B^* = A^* K = B^* K,$$

в которой $A^* = A \bigcap BK$ и $B^* = B \bigcap AK$. Ясно, что $A^* \bigcap F \le C_{A^*}(K)$ и $B^* \bigcap \bigcap F \le C_{B^*}(K)$, так что фактор-группы $A^*/C_{A^*}(K)$ и $B^*/C_{B^*}(K)$ являются почти полициклическими. Подгруппа $C = C_{A^*}(K)\, C_{B^*}(K)$ нормальна в X и фактор-группа X/C есть произведение двух почти полициклических подгрупп A^*/C и B^*/C. Поэтому согласно теореме Леннокса – Роузблейда – Зайцева эта фактор-группа также почти полициклическая и, следовательно, подгруппа HC субнормальна в X. С другой стороны, по лемме 1 подгруппа H субнормальна в HC. Таким образом, подгруппа H субнормальна в X и, значит, субнормальна в G.

Рассмотрим теперь общий случай и обозначим через T наибольшую периодическую нормальную подгруппу группы G. Подгруппа T черниковская [5, с. 139] и потому она имеет единственную и, значит, нормальную в G полную абелеву подгруппу J, имеющую конечный индекс в T и являющуюся прямым произведением конечного числа квазициклических групп. Так как фактор-группа $G/T = (AT/T)(BT/T)$ не имеет нетривиальных периодических нормальных подгрупп, то из первой части доказательства следует, что подгруппа HT субнормальна в G. Более того, восходящая в G подгруппа HJ имеет конечный индекс в HT, так что HJ субнормальна в HT и, таким образом, субнормальна в G. Следовательно, чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что подгруппа H субнормальна в HJ. Заменив группу G факторизатором подгруппы J в G, можно предполагать, что группа G имеет тройную факторизацию

$$G = AB = AJ = BJ.$$

Пусть L — некоторая максимальная среди собственных полных G-инвариантных подгрупп из J. Разложение подгруппы L в прямое произведение квазициклических групп содержит меньшее число квазициклических множителей, чем соответствующее разложение подгруппы J. Применяя индукцию по этому числу, можно предполагать, что теорема справедлива для факторизатора $X(L)$ подгруппы L в группе $G = AB$. В силу этого предположения подгруппа H субнормальна в HL и нам остается показать, что подгруппа HL субнормальна в G. Заменив группу G фактор-группой G/L, мы можем при этом считать, что $L = 1$, т. е., что подгруппа J не содержит бесконечных собственных G-инвариантных подгрупп. Но тогда подгруппа H субнормальна в G по лемме 5. Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Согласно [7] (следствие 1) для каждого простого числа p существует счетная локально конечная группа G, имеющая разложение вида

$$G = AB = AK = BK,$$

в котором A и B — p-подгруппы, K — абелева нормальная подгруппа простой экспоненты $q \neq p$. Очевидно, $C_A(K)$ — нормальная подгруппа в G. Поэтому переход к фактор-группе $G/C_A(K)$ позволяет считать, что $C_A(K) = 1$ и, таким образом, K — радикал Хирша – Плоткина группы G. Так как A и B — счетные локально нильпотентные группы, то каждая конечная подгруппа E из пересечения $A \cap B$ является восходящей как в A, так и в B. Предположим, что E — системная подгруппа группы G. Тогда подгруппа E субнормальна в каждой конечной подгруппе из G, ее содержащей, и в силу этого содержится в K (см. [8], теорема 5.2.3.3). Но тогда $E = 1$ и, таким образом, каждая конечная нетривиальная подгруппа из пересечения $A \cap B$ не является системной подгруппой в G. Покажем теперь, что пересечение $A \cap B$ бесконечно и, тем самым, завершим доказательство теоремы.

Пусть A_0 — произвольная конечная подгруппа в A и $B_0 = B \cap KA_0$. Тогда

B_0 — конечная подгруппа в B и $KA_0 = KB_0$, так что A_0 и B_0 — конечные силовские p-подгруппы в группе KA_0. Следовательно, для некоторого элемента x из K имеем $x^{-1}A_0x = B_0$. Учитывая, что $x = ab$ для некоторых элементов a из A и b из B, получаем, что подгруппа $a^{-1}A_0a = b^{-1}B_0b$ содержится в $A \cap B$. А так как подгруппа A бесконечна, то в качестве A_0 можно взять конечную подгруппу сколь угодно большого порядка и потому пересечение $A \cap \cap B$ бесконечно. Теорема доказана.

1. *Maier R.* Um problema da teoria dos subgrupos subnormais // Bol. Soc. Brasil. Mat. – 1977. – **8**. – P. 127–130.
2. *Wielandt H.* Subnormalität in faktorisierten endlichen Gruppen // J. Algebra. – 1981. – **69**. – S. 305–311.
3. *Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of factorised groups // Group Theory Proceedings (Brixen/Bressanone 1986). Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer, 1987. – № 1281. – P. 158–175.
4. *Amberg B., Franciosi S., de Giovanni F.* Products of groups. – Oxford: Clarendon Press, 1992. – 220 p.
5. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups: Pts 1, 2. – Berlin etc.: Springer, 1972. – Pt 1. – 210 p.; Pt 2. – 254 p.
6. *Tits J.* Free subgroups in linear groups // J. Algebra. – 1972. – **20**. – P. 250–270.
7. *Sysak Y. P.* Some examples of factorized groups and their relation to ring theory // Infinite Groups 1994: Proc. Intern. Conf. – Berlin; New York: W. de Gruyter, 1995. – P. 257–269.
8. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. – М.: Наука, 1966. – 604 с.

Получено 26.02.96