УДК 517.9

Б. І. Сокіл (ун-т „Львівська політехніка")

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ Ateb-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

For the nonlinear Klein–Gordon equation, we construct the first approximation of asymptotic solution by using the Ateb-functions. The resonance and nonresonance cases are considered.

Для нелінійного рівняння Клейна–Гордона на основі використання Ateb-функцій будується перше наближення асимптотичного розв'язку. Розглядаються резонансний і нерезонансний випадки.

Як відомо [1], ряд задач фізики твердого тіла, фізики частин з високою енергією та інші зводяться до дослідження рівняння

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + f'(u) = \varepsilon F(u, u_x, u_t, \mu t), \tag{1}$$

в якому α, μ — сталі, $f(u)$ — деяка нелінійна функція (потенціальна функція), $F(u, u_x, u_t, \mu t)$ — аналітична 2π-періодична по μt функція, ε — малий параметр. Для квазілінійного випадку $f'(u) = \beta^2 u$ асимптотичний розв'язок рівняння (1) побудовано в [2]. У даній статті з використанням Ateb-функцій [3] на основі методу усереднення М. М. Боголюбова [4] будуються перші наближення розв'язку рівняння (1) для двох випадків: $f'(u) = \beta^2 u^{\nu+1}$ і $f'(u) = -\beta^2 u^{\nu+1}$, в яких β — стала, а $\nu + 1 = (2n+1)(2m+1)$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$.

1. Розглянемо спочатку випадок $f'(u) = \beta^2 u^{\nu+1}$, тобто рівняння

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u^{\nu+1} = \varepsilon F(u, u_x, u_t, \mu t). \tag{2}$$

При $\varepsilon = 0$ рівняння (2) перетворюється у нелінійне рівняння Клейна–Гордона, для якого існує розв'язок у вигляді хвилі [5]. Остання становить чисто нелінійний ефект і не має аналогу у лінійній теорії диспергуючих систем, а швидкість поширення цієї хвилі залежить від амплітуди [1]. Легко перевірити, що розв'язки рівняння Клейна–Гордона

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u^{\nu+1} = 0 \tag{3}$$

у вигляді періодичних хвильових пакетів описуються за допомогою періодичних Ateb-функцій

$$u(x, t) = a\, \mathrm{ca}\,(\nu+1, 1, l\psi), \qquad \psi = kx - \omega(a)t + \theta, \tag{4}$$

або

$$u(x, t) = a\, \mathrm{sa}\,(\nu+1, 1, l\psi), \tag{5}$$

де параметр l визначається з умови періодичності по ψ хвильового пакету і для випадку $T = 2\tau$

$$l = \frac{\Pi(1, \nu+1)}{\tau} = \frac{1}{\tau}\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma\big(1/(\nu+2)\big)}{\Gamma\big(1/2 + 1/(\nu+2)\big)}, \tag{6}$$

a, θ — сталі, $2\Pi(1, \nu+1)$ — період по ψ функцій $\mathrm{ca}\,(\nu+1, 1, \psi)$ чи $\mathrm{sa}\,(\nu+1, 1, \psi)$; k і $\omega(a)$ пов'язані дисперсійним співвідношенням

$$\omega^2(a) = \frac{\nu+2}{2}\beta^2 a^\nu + \alpha^2 k^2. \tag{7}$$

Нижче, не зменшуючи загальності, будуємо розв'язок збуреного рівняння (2), близький до 2Π-періодичного по ψ, тобто у всіх викладках параметр l приймається рівним 1, а розв'язком рівняння (3) вважатимемо співвідношення (4).

Диференціюванням (4) по t і x знаходимо

$$u_t(x,t) = \frac{2a}{\nu+2}\,\omega(a)\,\mathrm{sa}\,(1,\nu+1,kx-\omega(a)t+\theta), \tag{8}$$

$$u_x(x,t) = -\frac{2a}{\nu+2}\,k\,\mathrm{sa}\,(1,\nu+1,kx-\omega(a)t+\theta). \tag{9}$$

Співвідношення (4), (8), (9) будемо вважати заміною змінних для рівняння (2), тільки параметри a і θ будуть вже деякими функціями x і t. Використовуючи загальну схему методу усереднення М. М. Боголюбова [4], отримуємо диференціальні співвідношення, що зв'язують шукані величини

$$\begin{gathered}
a_t\,\mathrm{ca}\,(\nu+1,1,\psi) - \theta_t\frac{2a}{\nu+2}\,\mathrm{sa}\,(1,\nu+1,\psi) = 0,\\
a_x\,\mathrm{ca}\,(\nu+1,1,\psi) - \theta_x\frac{2a}{\nu+2}\,\mathrm{sa}\,(1,\nu+1,\psi) = 0,\\
\left[a_t\left(\omega(a)+a\frac{d\omega}{da}\right)+\alpha^2 k\,a_x\right]\frac{2a}{\nu+2}\,\mathrm{sa}(1,\nu+1,\psi) + \\
+\ [\omega(a)\,\theta_t+\alpha^2 k\theta_x]\frac{2a}{\nu+2}\,\mathrm{ca}^{\nu+1}(\nu+1,1,\psi) = \varepsilon F^*(a,\psi,\mu t),
\end{gathered} \tag{10}$$

де

$$F^*(a,\psi,\mu t) = F\left(a\,\mathrm{ca}(\nu+1,1,\psi), -\frac{2a}{\nu+2}\,k\,\mathrm{sa}(1,\nu+1,\psi),\ldots,\mu t\right).$$

Враховуючи, що вірні очевидні співвідношення

$$\begin{gathered}
a_t = -\omega(a)\,a_\psi, \qquad a_x = k\,a_\psi,\\
\theta_t = -\omega(a)\,\theta_\psi, \qquad \theta_x = k\,\theta_\psi,
\end{gathered} \tag{11}$$

систему диференціальних рівнянь (10) перетворюємо до вигляду

$$a_\psi\,\mathrm{ca}\,(\nu+1,1,\psi) - \frac{2a}{\nu+2}\,\theta_\psi\,\mathrm{sa}\,(1,\nu+1,\psi) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\nu+2}{2}\,a_\psi\,\mathrm{sa}\,(1,\nu+1,\psi) + a\theta_\psi\,\mathrm{ca}^{\nu+1}(\nu+1,1,\psi) = -\frac{\varepsilon}{\beta^2 a^\nu}\,F^*(a,\psi,\mu t).$$

Останні вирази визначають a_ψ і θ_ψ:

$$\begin{gathered}
a_\psi = \frac{-2\varepsilon}{\nu+2}\,\frac{\mathrm{sa}(1,\nu+1,\psi)}{\beta^2 a^\nu}\,F^*(a,\psi,\mu t),\\
\theta_\psi = -\varepsilon\,\frac{\mathrm{ca}(\nu+1,1,\psi)}{\beta^2 a^\nu}\,F^*(a,\psi,\mu t).
\end{gathered} \tag{13}$$

Праві частини співвідношень (13) є періодичними по ψ і $\gamma=\mu t$ функціями з періодами відповідно 2Π і 2π, тому, усереднюючи їх за вказаними аргументами, для нерезонансного випадку одержуємо

$$\begin{gathered}
a_\psi = \frac{-\varepsilon}{2\pi\Pi\beta^2(\nu+2)\,a^\nu}\int_0^{2\Pi}\int_0^{2\pi}F_s^*(a,\psi,\gamma)\,d\gamma\,d\psi,\\
\theta_\psi = \frac{-\varepsilon}{4\pi\Pi\beta^2 a^{\nu+1}}\int_0^{2\Pi}\int_0^{2\pi}F_c^*(a,\psi,\gamma)\,d\gamma\,d\psi,
\end{gathered} \tag{14}$$

де

$$F_s^*(a, \psi, \gamma) = \operatorname{sa}(1, \nu+1, \psi) F^*(a, \psi, \gamma),$$
$$F_c^*(a, \psi, \gamma) = \operatorname{ca}(\nu+1, 1, \psi) F^*(a, \psi, \gamma).$$

Повертаючись у (14) до похідних по t і x, на основі (11) знаходимо

$$\begin{aligned}
a_t &= \frac{\varepsilon\omega(a)}{2\pi\Pi\beta^2(\nu+2)a^\nu} \int_0^{2\Pi}\int_0^{2\pi} F_s^*(a, \psi, \gamma)\, d\gamma\, d\psi, \\
a_x &= \frac{-\varepsilon k}{2\pi\Pi\beta^2(\nu+2)a^\nu} \int_0^{2\Pi}\int_0^{2\pi} F_s^*(a, \psi, \gamma)\, d\gamma\, d\psi, \\
\psi_t &= -\omega(a) + \frac{\varepsilon\omega(a)}{4\pi\Pi\beta^2 a^{\nu+1}} \int_0^{2\Pi}\int_0^{2\pi} F_c^*(a, \psi, \gamma)\, d\gamma\, d\psi, \\
\psi_x &= k - \frac{\varepsilon k}{4\pi\Pi\beta^2 a^{\nu+1}} \int_0^{2\Pi}\int_0^{2\pi} F_c^*(a, \psi, \gamma)\, d\gamma\, d\psi.
\end{aligned} \tag{15}$$

Таким чином, перше наближення асимптотичного розв'язку диференціального рівняння (2) у нерезонансному випадку описується залежністю (4), в якій $a(x, t)$ і $\psi(x, t)$ визначаються диференціальними рівняннями (15).

Перейдемо до розгляду головного резонансу для рівняння (2), тобто випадку $\omega(a) \approx \frac{\Pi}{\pi}\mu$. Як відомо [4], у резонансному випадку амплітуда коливань залежить від різниці фаз. Тому, вводячи у (13) нову змінну φ згідно з $\varphi = \psi - \psi_0$ $\left(\psi_0 = kx - \frac{\Pi}{\pi}\gamma\right)$, з урахуванням (11) отримуємо

$$\begin{aligned}
a_t &= \frac{2\varepsilon\omega(a) F_s^*\left(a, \varphi+\psi_0, \frac{\pi}{\Pi}(kx-\psi_0)\right)}{(\nu+2)\beta^2 a^\nu}, \\
a_x &= \frac{-2\varepsilon k F_s^*\left(a, \varphi+\psi_0, \frac{\pi}{\Pi}(kx-\psi_0)\right)}{(\nu+2)\beta^2 a^\nu}, \\
\varphi_t &= \frac{\Pi}{\pi}\mu - \omega(a) + \frac{\varepsilon\omega(a) F_c^*\left(a, \varphi+\psi_0, \frac{\pi}{\Pi}(kx-\psi_0)\right)}{\beta^2 a^{\nu+1}}, \\
\varphi_x &= \frac{-\varepsilon k F_c^*\left(a, \varphi+\psi_0, \frac{\pi}{\Pi}(kx-\psi_0)\right)}{\beta^2 a^{\nu+1}}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Зауважимо, що система диференціальних рівнянь (16) розглядається у малому околі

$$a^* = \left\{\frac{2}{(\nu+2)\beta^2}\left[\left(\frac{\Pi}{\pi}\mu\right)^2 - a^2k^2\right]\right\}^{1/\nu}$$

(a^* — корінь рівняння $\omega(a) = \Pi\mu/\pi$). Останнє дає змогу її дещо спростити. Дійсно, усереднення системи (16) за змінною ψ_0 не змінить точності першого наближення, якщо у величинах порядку ε допустити похибку такого ж порядку, тобто точність системи не зміниться, якщо у „коефіцієнтах" при ε правих її частин параметр a замінити на a^*. Крім цього у межах запропонованої точності можна вважати для резонансного випадку

$$\frac{\Pi}{\pi}\mu - \omega(a) = \frac{d\omega^*(a)}{da}(a^* - a). \tag{17}$$

Враховуючи викладене вище, систему диференціальних рівнянь (16) після усереднення по ψ_0 можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
a_t &= \frac{\varepsilon\omega(a^*)}{(\nu+2)\Pi\beta^2(a^*)^\nu}\int_0^{2\Pi} F_s^*\left(a^*, \varphi+\psi_0, \frac{\pi}{\Pi}(kx-\psi_0)\right)d\psi_0,\\
a_x &= \frac{-\varepsilon k}{(\nu+2)\Pi\beta^2(a^*)^\nu}\int_0^{2\Pi} F_s^*\left(a^*, \varphi+\psi_0, \frac{\pi}{\Pi}(kx-\psi_0)\right)d\psi_0,\\
\varphi_t &= \frac{d\omega^*(a)}{da}(a^*-a) + \frac{\varepsilon\omega(a^*)}{2\Pi\beta^2(a^*)^{\nu+1}}\int_0^{2\Pi} F_c\left(a^*, \varphi+\psi_0, \frac{\pi}{\Pi}(kx-\psi_0)\right)d\psi_0,\\
\varphi_x &= \frac{-\varepsilon k}{2\beta^2\Pi(a^*)^{\nu+1}}\int_0^{2\Pi} F_c^*\left(a^*, \varphi+\psi_0, \frac{\pi}{\Pi}(kx-\psi_0)\right)d\psi_0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Зокрема, при $\nu = 0$, як окремий випадок викладеного, одержуємо розв'язок задачі у першому наближенні для квазілінійного рівняння, розглянутий в [2].

2. Для випадку $f'(u) = -\beta^2 u^{\nu+1}$, який розглядатимемо лише при $\mu = 0$ (автономний випадок), рівняння (1) набуває вигляду

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} - \beta^2 u^{\nu+1} = \varepsilon F(u, u_x, u_t). \tag{19}$$

Відповідне незбурене $(\varepsilon = 0)$ рівняння

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} - \beta^2 u^{\nu+1} = 0 \tag{20}$$

також носить назву Клейна – Гордона і має розв'язки, які виражаються за допомогою гіперболічних Ateb-функцій [3] у вигляді

$$u(x,t) = a\,\mathrm{sha}(\nu+1, 1, kx - \omega(a)t + \theta), \tag{21}$$

або

$$u(x,t) = a\,\mathrm{cha}(\nu+1, 1, kx - \omega(a)t + \theta), \tag{22}$$

де a, θ — деякі сталі, а k і ω, як легко перевірити, пов'язані дисперсійним співвідношенням (7). Нижче, при дослідженні рівняння (19), розв'язком рівняння (20) будемо вважати співвідношення (21). Диференціюючи (21) по t і x, одержуємо

$$u_t(x,t) = -\frac{2a\omega(a)}{\nu+2}\mathrm{cha}(1, \nu+1, kx - \omega(a)t + \theta), \tag{23}$$

$$u_x(x,t) = \frac{2ak}{\nu+2}\mathrm{cha}(1, \nu+1, kx - \omega(a)t + \theta). \tag{24}$$

Вирази (21), (23) і (24) вважатимемо заміною змінних для збуреного рівняння (19), тільки для вказаного випадку a і θ будуть деякими повільно змінними функціями x і t. Тоді з (19), аналогічно до викладеного у п. 1, отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$a_t\,\mathrm{sha}(\nu+1, 1, kx - \omega(a)t + \theta) + \theta_t\frac{2a}{\nu+2}\mathrm{cha}(1, \nu+1, kx - \omega(a)t + \theta)) = 0,$$

$$a_x \operatorname{sha}(\nu+1,\,1,\,kx-\omega(a)t+\theta)) + \theta_x \frac{2a}{\nu+2}\operatorname{cha}(1,\,\nu+1,\,kx-\omega(a)t+\theta)) = 0,$$

$$\frac{2}{\nu+2}\operatorname{cha}(1,\nu+1,\psi)\left[a_t\left(\omega + a\frac{d\omega}{da}\right) + \alpha^2 k a_x\right] + \tag{25}$$

$$+ \frac{2a}{\nu+2}\operatorname{sha}^{\nu+1}(\nu+1,1,\psi)\,(\theta_t\,\omega(a) + \theta_x\,\alpha^2 k) = -\varepsilon f^*(a,\psi),$$

де

$$f^*(a,\psi) =$$

$$= F\left(a\operatorname{sha}(\nu+1,1,\psi), \frac{2ka}{\nu+2}\operatorname{cha}(1,\nu+1,\psi), -\frac{2a\omega(a)}{\nu+2}\operatorname{cha}(1,\nu+1,\psi)\right).$$

Систему рівнянь (25) на основі властивостей гіперболічних Ateb-функцій і співвідношень (11) можна записати у вигляді

$$a_\psi \operatorname{sha}(\nu+1,\,1,\,\psi) + \theta_\psi \frac{2a}{\nu+2}\operatorname{cha}(1,\,\nu+1,\,\psi) = 0,$$

$$a_\psi \frac{\nu+2}{2}\beta^2 a^\nu \operatorname{cha}(1,\,\nu+1,\,\psi) + \theta_\psi a \operatorname{sha}^{\nu+1}(\nu+1,\,1,\,\psi) = -\frac{\varepsilon f^*(a,\psi)}{\beta^2 a^\nu}, \tag{26}$$

звідки знаходимо

$$a_\psi = \frac{-2\varepsilon\operatorname{cha}(\nu+1,1,\psi)\,f^*(a,\psi)}{(\nu+2)\,\beta^2 a^\nu},$$

$$\theta_\psi = \frac{\varepsilon\operatorname{sha}(1,\nu+1,\psi)\,f^*(a,\psi)}{\beta^2 a^{\nu+1}}. \tag{27}$$

Нехай параметр ν в (19) задовольняє умову $\nu > 0$. Використані гіперболічні Ateb-функції, за допомогою яких виражається розв'язок рівняння Клейна – Гордона (20), є періодичними з періодом $2\Pi^*(1,\,\nu+1)$:

$$\Pi^*(1,\,\nu+1) = \frac{\Gamma(1/(\nu+2))\,\Gamma(\nu/(2(\nu+2)))}{\Gamma(1/2)}. \tag{28}$$

Останнє дає змогу систему диференціальних рівнянь (27) усереднити по ψ на інтервалі $2\Pi^*$, а співвідношення, що визначають a і θ як функції x і t, набувають вигляду

$$a_t = \frac{\varepsilon\omega(a)}{(\nu+2)\,\beta^2 a^\nu} f^{**}_{\mathrm{ch}}(a), \qquad \psi_t = -\omega(a) - \frac{\varepsilon\omega(a)}{\beta^2 a^{\nu+1}} f^{**}_{\mathrm{sh}}(a),$$

$$a_x = \frac{-\varepsilon k}{(\nu+2)\,\beta^2 a^\nu} f^{**}_{\mathrm{ch}}(a), \qquad \psi_x = k + \frac{\varepsilon k}{\beta^2 a^{\nu+1}} f^{**}_{\mathrm{sh}}(a), \tag{29}$$

де

$$f^{**}_{\mathrm{sh}}(a) = \frac{1}{2\Pi^*}\int_0^{2\Pi^*} \operatorname{sha}(\nu+1,1,\psi)\,f^*(a,\psi)\,d\psi,$$

$$f^{**}_{\mathrm{ch}}(a) = \frac{1}{2\Pi^*}\int_0^{2\Pi^*} \operatorname{cha}(1,\nu+1,\psi)\,f^*(a,\psi)\,d\psi.$$

Якщо ж ν задовольняє умову $-1 < \nu \le 0$, то величина Π^* не обмежена, а розв'язки рівнянь Клейна – Гордона (20) не періодичні.

У випадку, коли права частина диференціального рівняння (19) періодична по μt і $\nu > 0$, аналогічно до викладеного у п. 1, легко отримати розв'язок задачі для резонансного і нерезонансного випадків.

3. Як приклад розглянемо рівняння

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u^3 = \sigma u + \delta(1-u^2)\, u_t, \tag{30}$$

в якому σ і δ — деякі малі сталі величини одного порядку. Приймаючи за 2π-періодичний по ψ розв'язок незбуреного $\sigma = \delta = 0$ рівняння функцію

$$u(x, t) = a\,\mathrm{ca}(3, 1, l\psi), \qquad l = \frac{1}{\pi}\Pi(1, 3) = 1{,}669, \tag{31}$$

одержуємо співвідношення, які визначають у першому наближенні a і ψ для збуреного рівняння (30) у вигляді

$$\begin{aligned} a_t &= 4{,}5701 \cdot 10^{-2}\, \frac{\delta\omega^2(a)}{\beta^2 a}(3{,}6475 - a^2), \\ a_x &= -4{,}5701 \cdot 10^{-2}\, \frac{\delta\omega(a)\, k}{\beta^2 a}(3{,}6475 - a^2), \\ \psi_t &= -\omega(a)\left(1 - \frac{2{,}7383 \cdot 10^{-1}\sigma}{\beta^2 a^2}\right), \\ \psi_x &= k\left(1 - \frac{2{,}7383 \cdot 10^{-1}\sigma}{\beta^2 a^2}\right), \end{aligned} \tag{32}$$

де

$$\omega^2(a) = 7{,}1799 \cdot 10^{-1}\beta^2 a^2 + \alpha^2 k^2.$$

З останніх співвідношень випливає, що встановлений стійкий розв'язок розглянутого рівняння у вигляді хвилі описується залежністю

$$u(x, t) = 1{,}9101\,\mathrm{ca}(3\,;\,1\,;\,1{,}669\,\psi), \tag{33}$$

де

$$\psi = \left(1 - 7{,}5477 \cdot 10^{-2}\frac{\sigma}{\beta^2}\right)\left(kx - \sqrt{2{,}6196\beta^2 + \alpha^2 k^2}\; t\right).$$

Як окремий випадок з отриманого при $\alpha = \sigma = 0$ $(u = u(t))$ маємо розв'язок задачі для звичайного нелінійного диференціального рівняння, розглянутого в [6, 7], а при $\delta = 0$ — перше наближення асимптотичного розв'язку рівняння так званої моделі φ^4 [1] за умови $\sigma << \beta^2$, яка зустрічається у фізиці елементарних часток.

1. *Додд Р., Эйлбек Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
2. *Митропольский Ю. А.* О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна – Гордона // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1209 – 1217.
3. *Сеник П. М.* Обращения неполной Beta-функции // Там же. – 1969. – **21**, № 3. – С. 325 – 333.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
6. *Коломиец В. Г., Цикайло Т.-Н. М.* Асимптотические методы и периодические Ateb-функции в некоторых нелинейных задачах теории случайных колебаний. – Киев, 1987. – 64 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.57).
7. *Сеник П. М., Сокіл Б. І.* Про коливний процес в одному механічному осциляторі // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. Деякі питання динаміки машин. – 1978. – № 121. – С. 90–94.

Одержано 26.12.95