УДК 517.9:519.46:535.21

Р. М. Черніга (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОГО КОНСТРУКТИВНОГО МЕТОДУ ДЛЯ ПОБУДОВИ НЕЛІЇВСЬКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ *

A constructive method is suggested for obtaining exact solutions of nonlinear partial differential equations (PDE). The method is based on the consideration of a fixed nonlinear PDE (system of PDEs) together with an additional condition in the form of a linear ordinary differential equation of high order. By using this method, we obtain new solutions for nonlinear generalizations of the Fisher equation and for some nonlinear evolutionary systems, which describe real processes in physics, biology, and chemistry.

Запропоновано конструктивний метод для побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП). Метод базується на розв'язуванні фіксованого нелінійного ДРЧП (системи ДРЧП) разом з додатковою умовою у вигляді лінійного звичайного диференціального рівняння високого порядку. За допомогою вказаного методу одержано нові розв'язки для нелінійних узагальнень рівняння Фішера, а також деяких нелінійних еволюційних систем, що мають застосування в фізиці, біології та хімії.

Світлій пам'яті
В. І. Фущича присвячую

1. Вступ. В роботах [1 – 4] введено поняття умовної симетрії для відшукання неліївських симетрій заданого диференціального рівняння з частинними похідними (системи рівнянь). Використовуючи критерій умовної симетрії, було знайдено неліївські розв'язки для низки нелінійних ДРЧП. Основна ідея умовної інваріантності полягає в тому, що для фіксованого ДРЧП (системи ДРЧП) ми шукаємо таку додаткову умову, яка, будучи приєднаною до нашого фіксованого ДРЧП, дає систему рівнянь з новою симетрією. Зокрема, у випадку, коли ця додаткова умова має вигляд

$$QU = 0, \qquad U = U(t, x_1, \ldots, x_n),$$

де

$$Q = \xi^t(t, x, U)\partial_t + \xi^a(t, x, U)\partial_{x_a} + \eta(t, x, U)\partial_U, \qquad \partial_* = \frac{\partial}{\partial *}$$

— квазілінійний диференціальний оператор першого порядку, і розширення симетрії відбувається саме завдяки новому оператору симетрії Q, одержуємо Q-умовну симетрію. Поняття Q-умовної симетрії у дещо іншій термінології введено в роботі [5]. У зв'язку з тим, що пошук додаткової умови для фіксованого ДРЧП, яка забезпечує розширення симетрії, є дуже складною проблемою, постає природне завдання: обмежитись певним класом ДРЧП, який містить добре вивчені рівняння. Для побудови точних розв'язків ДРЧП вдалий вибір такого класу необхідний ще й тому, що: 1) знаходження неліївської (зокрема, умовної) симетрії ще не гарантує знаходження неліївських розв'язків; 2) одержана шляхом прилучення додаткової умови перевизначена система ДРЧП може виявитися несумісною або ж мати лише тривіальні розв'язки.

У даній роботі для еволюційних рівнянь та систем таких рівнянь з фіксованими нелінійностями запропоновано клас звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) як *додаткові генеруючі умови,* з допомогою яких можна побудувати нові неліївські анзаци та розв'язки вихідних нелінійних ДРЧП. Отже, в роботі запропоновано конструктивний метод одержання нових розв'язків ДРЧП шляхом застосування ідеї умовної симетрії, але без пошуку, власне, нових операторів си-

---

* Виконана при частковій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень при Міністерстві України у справах науки і технологій (проект 1.4/356).

метрії. Ефективність методу продемонстрована на прикладах нелінійних рівнянь та систем рівнянь, які мають застосування в хімії та біології.

2. Побудова неліївських розв'язків нелінійних двовимірних еволюційних систем рівнянь. Розглянемо нелінійну двовимірну систему еволюційних рівнянь другого порядку (теплопровідності, дифузії, фільтрації тощо) вигляду

$$\begin{aligned} U_t &= A(U, U_x, V, V_x)\, U_{xx} + C(U, U_x, V, V_x)\, V_{xx} + B_1(U, U_x, V, V_x), \\ V_t &= D(U, U_x, V, V_x)\, U_{xx} + E(U, U_x, V, V_x)\, V_{xx} + B_2(U, U_x, V, V_x), \end{aligned} \tag{1}$$

де A, B_1, B_2, C, D, E — довільні диференційовні функції, $U = U(t,x)$, $V = V(t,x)$, $U_t = \dfrac{\partial U}{\partial t}$, $U_x = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $V_t = \dfrac{\partial V}{\partial t}$, $V_x = \dfrac{\partial V}{\partial x}$, $U_{xx} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $V_{xx} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. Оскільки симетрія Лі та відповідні точні розв'язки рівнянь вигляду (1) вивчалися в багатьох роботах (див., наприклад, [6–9]), ми розглядатимемо лише випадки, коли симетрія системи рівнянь (скрізь нижче СР) (1) вичерпується операторами зсувів

$$P_t = \partial_t, \qquad P_x = \partial_x, \tag{2}$$

тобто система має лише ліївські плоскохвильові розв'язки вигляду

$$\begin{aligned} U &= U(x + vt), \qquad v \in \boldsymbol{R}, \\ V &= V(x + vt). \end{aligned} \tag{3}$$

Як клас для пошуку додаткових умов до системи рівнянь (1) визначимо сукупність систем звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} F_1\left(t, x, U, \frac{dU}{dx}, \ldots, \frac{d^{m_1}U}{dx^{m_1}}, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{n_1}V}{dx^{n_1}}\right) &= 0, \\ F_2\left(t, x, U, \frac{dU}{dx}, \ldots, \frac{d^{m_2}U}{dx^{m_2}}, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{n_2}V}{dx^{n_2}}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Тут F_1, F_2 — довільні достатньо гладкі функції, а змінна t розглядається як параметр. У загальному випадку загальний розв'язок (4) має вигляд

$$\begin{aligned} W_1(t, x, U, V, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{m-1}(t), \Psi_0(t), \ldots, \Psi_{n-1}(t)) &= 0, \\ W_2(t, x, U, V, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{m-1}(t), \Psi_0(t), \ldots, \Psi_{n-1}(t)) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

де $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{m-1}(t)$, $\Psi_0(t), \ldots, \Psi_{n-1}(t)$ — довільні функції, а W_1, W_2 — фіксовані функції, $m = \max(m_1, m_2)$, $n = \max(n_1, n_2)$.

Тепер будемо дивитись на (5) як на анзац для заданої нелінійної системи рівнянь (1). Особливість цього анзацу полягає в тому, що він містить $m + n$ довільних функцій φ_i та Ψ_i. Це дає можливість у деяких випадках редукувати (1) до квазілінійної системи ЗДР першого порядку для невідомих функцій φ_i та Ψ_i, яка містить лише рівняння першого порядку. Добре відомо, що такі системи досить детально досліджені.

***Зауваження* 1.** У випадку одного рівняння $(V \equiv 0)$ з (5) одержуємо анзац

$$W_1(t, x, U, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{m-1}(t)) = 0,$$

який було запропоновано в роботі [10] і ефективно застосовано до низки нелінійних двовимірних рівнянь теплопровідності. Частинні випадки цього анзацу (при $m=2,3$) були використані також для побудови точних розв'язків деяких нелінійних двовимірних рівнянь теплопровідності в [11 – 14].

Нижче ми розглядатимемо як додаткові генеруючі умови лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку

$$\begin{gathered}\alpha_0(t,x)\,U+\alpha_1(t,x)\frac{dU}{dx}+\ldots+\alpha_m(t,x)\frac{d^mU}{dx^m}=0,\\ \beta_0(t,x)\,V+\beta_1(t,x)\frac{dV}{dx}+\ldots+\beta_n(t,x)\frac{d^nV}{dx^n}=0,\end{gathered}\tag{6}$$

де змінна t розглядається як параметр, а $\alpha_0(t,x),\ldots,\alpha_m(t,x)$, $\beta_0(t,x),\ldots$ $\ldots,\beta_n(t,x)$ — довільні достатньо гладкі функції. Загальний розв'язок (6) має вигляд

$$\begin{gathered}U=\varphi_0(t)g_0(t,x)+\ldots+\varphi_{m-1}(t)g_{m-1}(t,x),\\ V=\Psi_0(t)h_0(t,x)+\ldots+\Psi_{n-1}(t)h_{n-1}(t,x).\end{gathered}\tag{7}$$

Тут $\varphi_0(t),\ldots,\varphi_{m-1}(t)$, $\Psi_0(t),\ldots,\Psi_{n-1}(t)$ — довільні функції, а $g_0(t,x),\ldots$ $\ldots,g_{m-1}(t,x)$, $h_0(t,x),\ldots,h_{n-1}(t,x)$ — фіксовані функції, які утворюють фундаментальну систему розв'язків ЗДР (6). Наголосимо, що у багатьох випадках функції $g_0(t,x),\ldots,g_{m-1}(t,x)$, $h_0(t,x),\ldots,h_{n-1}(t,x)$ вдається виразити у явному вигляді через елементарні функції.

Застосуємо анзац (7) до системи рівнянь (1) у випадку таких функцій:

$$\begin{gathered}A=\lambda^1_{10}+\lambda^1_{1l}U^l+\nu^1_{1l}U^l_x,\\ C=\lambda^1_{20}+\lambda^1_{2l}U^l+\nu^1_{2l}U^l_x,\\ D=\lambda^2_{10}+\lambda^2_{1l}U^l+\nu^2_{1l}U^l_x,\\ E=\lambda^2_{20}+\lambda^1_{2l}U^l+\nu^2_{2l}U^l_x,\\ B_1=r^1_{lk}U^l_xU^k_x+p^1_{lk}U^lU^k_x+q^1_{lk}U^lU^k+\mu^1_lU^l_x+s^1_lU^l,\\ B_2=r^2_{lk}U^l_xU^k_x+p^2_{lk}U^lU^k_x+q^2_{lk}U^lU^k+\mu^2_lU^l_x+s^2_lU^l,\end{gathered}\tag{8}$$

де коефіцієнти $\lambda^{l_1}_{lk}$, $\nu^{l_1}_{lk}$, $r^{l_1}_{lk}=r^{l_1}_{kl}$, $p^{l_1}_{lk}$, $q^{l_1}_{lk}=q^{l_1}_{kl}$, μ^k_l, s^k_l — довільні сталі або кусково-неперервні функції від t, функції $U^1\equiv U$, $U^2\equiv V$, $\varphi^1_i(t)\equiv\varphi_i(t)$, $\varphi^2_j(t)\equiv\Psi_j(t)$, а за індексами k, l, l_1, що повторюються, слід сумувати від 1 до 2. Очевидно, що система рівнянь (1), (8) при вказаних довільних сталих коефіцієнтах має лише тривіальну симетрію Лі (2), яка породжує анзац вигляду (3). Отже, анзац (7) є саме неліївським для цієї нелінійної системи.

Обчислюючи за анзацом (7) похідні U^l_t, U^l_x, U^l_{xx}, $l=1,2$, та підставляючи їх в систему рівнянь (1), (8), одержуємо на перший погляд надто громіздкий вираз. Проте якщо в ньому згрупувати відповідним чином доданки, то вдається помітити достатні умови для редукції одержаного виразу до системи ЗДР. Ці достатні умови мають такий вигляд:

$$\lambda^1_{10}g_{i,xx}+\mu^1_1g_{i,x}+s^1_1g_i-g_{i,t}=g_{i_1}Q^1_{ii_1}(t),\tag{9a}$$

$$\lambda^2_{10}g_{i,xx}+\mu^2_1g_{i,x}+s^2_1g_i=h_{j_1}Q^2_{ij_1}(t),\tag{9b}$$

$$\lambda_{20}^1 h_{j,xx} + \mu_2^1 h_{j,x} + s_2^1 h_j = g_{i_1} Q_{ji_1}^3(t), \tag{10a}$$

$$\lambda_{20}^2 h_{j,xx} + \mu_2^2 h_{j,x} + s_2^2 h_j - h_{j,t} = h_{j_1} Q_{jj_1}^4(t), \tag{10b}$$

$$\lambda_{11}^1 g_i g_{i,xx} + \nu_{11}^1 g_{i,x} g_{i,xx} + r_{11}^1 (g_{i,x})^2 + p_{11}^1 g_i g_{i,x} + q_{11}^1 (g_i)^2 = g_{i_1} R_{ii_1}^1(t), \tag{11a}$$

$$\lambda_{11}^2 g_i g_{i,xx} + \nu_{11}^2 g_{i,x} g_{i,xx} + r_{11}^2 (g_{i,x})^2 + p_{11}^2 g_i g_{i,x} + q_{11}^2 (g_i)^2 = h_{j_1} R_{ij_1}^2(t), \tag{11b}$$

$$\lambda_{22}^1 h_j h_{j,xx} + \nu_{22}^1 h_{j,x} h_{j,xx} + r_{22}^1 (h_{j,x})^2 + p_{22}^1 h_j h_{j,x} + q_{22}^1 (h_j)^2 = g_{i_1} R_{ji_1}^3(t), \tag{12a}$$

$$\lambda_{22}^2 h_j h_{j,xx} + \nu_{22}^2 h_{j,x} h_{j,xx} + r_{22}^2 (h_{j,x})^2 + p_{22}^2 h_j h_{j,x} + q_{22}^2 (h_j)^2 = h_{j_1} R_{jj_1}^4(t), \tag{12b}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{11}^1 (g_i g_{i_1,xx} + g_{i_1} g_{i,xx}) + \nu_{11}^1 (g_{i,x} g_{i_1,xx} + g_{i_1,x} g_{i,xx}) + \\ + 2 r_{11}^1 g_{i,x} g_{i_1,x} + p_{11}^1 (g_i g_{i_1,x} + g_{i_1} g_{i,x}) + 2 q_{11}^1 g_i g_{i_1} = g_{i_2} T_{ii_1}^{i_2,1}(t),\end{gathered} \tag{13a}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{11}^2 (g_i g_{i_1,xx} + g_{i_1} g_{i,xx}) + \nu_{11}^2 (g_{i,x} g_{i_1,xx} + g_{i_1,x} g_{i,xx}) + \\ + 2 r_{11}^2 g_{i,x} g_{i_1,x} + p_{11}^2 (g_i g_{i_1,x} + g_{i_1} g_{i,x}) + 2 q_{11}^2 g_i g_{i_1} = h_{j_1} T_{ii_1}^{j_1,2}(t),\end{gathered} \tag{13b}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{22}^1 (h_j h_{j_1,xx} + h_{j_1} h_{j,xx}) + \nu_{22}^1 (h_{j,x} h_{j_1,xx} + h_{j_1,x} h_{j,xx}) + \\ + 2 r_{22}^1 h_{j,x} h_{j_1,x} + p_{22}^1 (h_j h_{j_1,x} + h_{j_1} h_{j,x}) + 2 q_{22}^1 h_j h_{j_1} = g_{i_1} T_{jj_1}^{i_1,3}(t),\end{gathered} \tag{14a}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{22}^2 (h_j h_{j_1,xx} + h_{j_1} h_{j,xx}) + \nu_{22}^2 (h_{j,x} h_{j_1,xx} + h_{j_1,x} h_{j,xx}) + \\ + 2 r_{22}^2 h_{j,x} h_{j_1,x} + p_{22}^2 (h_j h_{j_1,x} + h_{j_1} h_{j,x}) + 2 q_{22}^2 h_j h_{j_1} = h_{j_2} T_{jj_1}^{j_2,4}(t),\end{gathered} \tag{14b}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{12}^1 h_j g_{i,xx} + \nu_{12}^1 h_{j,x} g_{i,xx} + \lambda_{21}^1 g_i h_{j,xx} + \nu_{21}^1 g_{i,x} h_{j,xx} + \\ + 2 r_{12}^1 g_{i,x} h_{j,x} + p_{12}^1 g_i h_{j,x} + p_{21}^1 h_j g_{i,x} + 2 q_{12}^1 g_i h_j = g_{i_1} S_{ij}^{i_1,1}(t),\end{gathered} \tag{15a}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{12}^2 h_j g_{i,xx} + \nu_{12}^2 h_{j,x} g_{i,xx} + \lambda_{21}^2 g_i h_{j,xx} + \nu_{21}^2 g_{i,x} h_{j,xx} + \\ + 2 r_{12}^2 g_{i,x} h_{j,x} + p_{12}^2 g_i h_{j,x} + p_{21}^2 h_j g_{i,x} + 2 q_{12}^2 g_i h_j = h_{j_1} S_{ij}^{j_1,2}(t),\end{gathered} \tag{15b}$$

де функції $Q_{ii_1}^k$, $R_{ii_1}^k$, $T_{ii_1}^{j,k}$ та $S_{ij}^{i_1,k}$ у правій частині — це деякі функції, що мають бути визначені через вирази у лівій частині; індекси t і x означають диференціювання за цими змінними.

При виконанні умов (9) – (15) для знаходження невідомих функцій φ_i^1 та φ_j^2, одержуємо таку систему $(m+n)$ ЗДР:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_i^1}{dt} &= Q_{i_1 i}^1 \varphi_{i_1}^1 + Q_{j_1 i}^3 \varphi_{j_1}^2 + R_{i_1 i}^1 (\varphi_{i_1}^1)^2 + R_{j_1 i}^3 (\varphi_{j_1}^2)^2 + \\ &+ T_{i_1 i_2}^{i1} \varphi_{i_1}^1 \varphi_{i_2}^1 + T_{j_1 j_2}^{i3} \varphi_{j_1}^2 \varphi_{j_2}^2 + S_{i_1 j_1}^{i1} \varphi_{i_1}^1 \varphi_{j_1}^2, \\ \frac{d\varphi_j^2}{dt} &= Q_{i_1 j}^2 \varphi_{i_1}^1 + Q_{j_1 j}^4 \varphi_{j_1}^2 + R_{i_1 j}^2 (\varphi_{i_1}^1)^2 + R_{j_1 j}^4 (\varphi_{j_1}^2)^2 + \\ &+ T_{i_1 i_2}^{j2} \varphi_{i_1}^1 \varphi_{i_2}^1 + T_{j_1 j_2}^{j4} \varphi_{j_1}^2 \varphi_{j_2}^2 + S_{i_1 j_1}^{j2} \varphi_{i_1}^1 \varphi_{j_1}^2 .\end{aligned} \tag{16}$$

У правих частинах співвідношень (9) – (15) і системи рівнянь (16) за індексами i_1, i_2 та j_1, j_2, що повторюються, слід підсумовувати відповідно від 0 до $m-1$ та від 0 до $n-1$. Таким чином, ми одержали наступне твердження.

Теорема 1. *Будь-який розв'язок системи ЗДР* (16) *породжує точний розв'язок вигляду* (7) *нелінійної системи рівнянь* (1), (8), *якщо функції* g_i, $i = 0, \ldots, m-1$, h_j, $j = 0, \ldots, n-1$, *задовольняють умови* (9) – (15).

Оскільки ми пропонуємо конструктивний метод одержання нових розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь, то нижче буде продемонстрована його ефективність на конкретних прикладах. Тут лише зазначимо, що перший такий приклад дещо випадково було одержано в роботі [7], в якій за допомогою додаткових умов у вигляді системи ЗДР першого порядку, породжених операторами Галілея, було знайдено фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності.

Зауваження 2. Очевидно, що запропонований підхід для пошуку нових розв'язків можна реалізувати до систем ДРЧП, що містять другі чи ще вищі похідні по t. У цьому випадку ми одержимо системи ЗДР, які містять рівняння вищих порядків.

Зауваження 3. Система реакції-дифузії з довільними степеневими нелінійностями α_1 та α_2

$$Y_t = \lambda_1 (Y^{\alpha_1} Y_x)_x + Z^{\alpha_2} (s_1^1 Y + s_2^1 Y^{1-\alpha_1}),$$

$$Z_t = \lambda_2 (Z^{\alpha_2} Z_x)_x + Y^{\alpha_1} (s_1^2 Z + s_2^2 Z^{1-\alpha_2}),$$

де $Y = Y(t,x)$, $Z = Z(t,x)$ — невідомі функції і $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R}$, підстановкою

$$U = Y^{\alpha_1}, \quad V = Z^{\alpha_2}, \quad \alpha_1 \alpha_2 \neq 0$$

зводиться до системи

$$U_t = \lambda_1 U U_{xx} + \frac{\lambda_1}{\alpha_1} U_x^2 + \alpha_1 V (s_1^1 U + s_1^2),$$

$$V_t = \lambda_2 V V_{xx} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} V_x^2 + \alpha_2 U (s_1^2 V + s_2^2),$$

яка є частинним випадком системи (1), (8). Побудові нових анзаців та точних розв'язків таких систем буде присвячена окрема стаття.

3. Нелінійне узагальнення рівняння Фішера. Розглянемо узагальнення відомого рівняння Фішера [15] вигляду

$$U_t = (\lambda + \lambda_0 U) U_{xx} + \lambda_1 U U_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2, \tag{17}$$

яке є частинним випадком системи рівнянь (1) при $V \equiv 0$. Очевидно, що при $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ рівняння (17) співпадає з відомим рівнянням Фішера

$$U_t = \lambda U_{xx} + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2,$$

а при $\lambda_0 = 0$ — з рівнянням Маррі [16, 17]. Використовуючи метод Лі, неважко переконатись, що при $\lambda \lambda_0 \lambda_2 \neq 0$ (нижче це скрізь припускається) класична симетрія рівняння (17) вичерпується операторами P_t і P_x Отже, всі ліївські розв'язки цього рівняння мають вигляд (3).

Застосуємо описаний вище метод для побудови неліївських розв'язків рівняння (17). Дійсно, додаткова умова (7) при $V \equiv 0$ має вигляд

$$\alpha_0(t,x)\,U + \alpha_1(t,x)\frac{dU}{dx} + \ldots + \alpha_m(t,x)\frac{d^mU}{dx^m} = 0, \tag{18}$$

яка породжує анзаци

$$U = \varphi_0(t)g_0(t,x) + \varphi_1(t)g_1(t,x) + \ldots + \varphi_{m-1}(t)g_{m-1}(t,x). \tag{19}$$

Підставляючи (19) в рівняння (17), після відповідних перетворень одержуємо достатні співвідношення для заданих функцій $g_i(t,x)$, які забезпечують редукцію розглядуваного рівняння.

Для цього достатньо, щоб функції $g_i(t,x)$ були такими, що

$$\lambda g_{i,xx} + \lambda_2 g_i - g_{i,t} = g_{i_1} Q_{ii_1}(t),$$

$$\lambda_0 g_i g_{i,xx} + \lambda_1 g_i g_{i,x} - \lambda_3 (g_i)^2 = g_{i_1} R_{ii_1}(t), \tag{20}$$

$$\lambda_0(g_i g_{i_1,xx} + g_{i_1} g_{i,xx}) + \lambda_1(g_i g_{i_1,x} + g_{i_1} g_{i,x}) - 2\lambda_3 g_i g_{i_1} = g_j T^j_{ii_1}(t), \quad i < i_1,$$

де i, i_1, $j = 0, \ldots, m-1$; за індексами j, що повторюються, виконується підсумовування; $Q_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$, $T^j_{ii_1}(t)$ — деякі фіксовані функції. При виконанні умов (20), після підстановки (19) у рівняння (17) та розщеплення одержаного виразу за степенями функцій g_i одержуємо квазілінійну систему ЗДР першого порядку

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = Q_{i_1 i}\varphi_{i_1} + R_{i_1 i}(\varphi_{i_1})^2 + T^i_{i_1 i_2}\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}, \quad i = 0, \ldots, m-1, \tag{21}$$

для знаходження невідомих функцій φ_i. Отже, ми довели наступне твердження.

Теорема 2. *Будь-який розв'язок системи ЗДР* (21) *породжує точний розв'язок вигляду* (19) *нелінійного узагальнення рівняння Фішера* (17), *якщо функції* g_i, $i = 0, \ldots, m-1$, *задовольняють умови* (20).

Для ілюстрації одержаного твердження виберемо додаткову умову третього порядку вигляду

$$\alpha_1(t)\frac{dU}{dx} + \alpha_2(t)\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^3U}{dx^3} = 0, \tag{22}$$

що породжує таку низку анзаців:

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\exp(\gamma_1(t)x) + \varphi_2(t)\exp(\gamma_2(t)x), \tag{23a}$$

якщо $\gamma_{1,2}(t) = \dfrac{1}{2}(\pm(\alpha_2^2 - 4\alpha_1)^{1/2} - \alpha_2)$ і $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\exp(\gamma(t)x) + x\varphi_2(t)\exp(\gamma(t)x), \tag{23b}$$

якщо $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \neq 0$;

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)\exp(\gamma(t)x), \tag{23c}$$

якщо $\alpha_1 = 0$;

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2, \tag{23d}$$

якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Підставляючи функції $g_0 = 1$, $g_1 = \exp(\gamma_1(t)x)$, $g_2 = \exp(\gamma_2(t)x)$ з анзацу (23*a*) у співвідношення (20), одержуємо

$$\begin{gathered} Q_{00} = \lambda_2, \quad Q_{11} = \lambda\gamma_1^2 + \lambda_2, \quad Q_{22} = \lambda\gamma_2^2 + \lambda_2, \\ R_{00} = -\lambda_3, \quad T_{01}^1 = -\lambda_3, \quad T_{02}^2 = -\lambda_3, \end{gathered} \tag{24a}$$

для всіх інших комбінацій індексів i, i_1, j:

$$R_{ii_1} = Q_{ii_1} = T_{ii_1}^j = 0. \tag{24b}$$

З допомогою співвідношень (24) система ЗДР (21) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= \lambda_2\varphi_0 - \lambda_3\varphi_0^2, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= (\lambda\gamma_1^2 + \lambda_2)\varphi_1 - \lambda_3\varphi_0\varphi_1, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= (\lambda\gamma_2^2 + \lambda_2)\varphi_2 - \lambda_3\varphi_0\varphi_2. \end{aligned} \tag{25}$$

Незважаючи на те, що система ЗДР (25) нелінійна, вона легко інтегрується і має загальний розв'язок

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_3 + c_0\exp(-\lambda_2 t)}, \\ \varphi_1 &= \frac{c_1\exp(\lambda\gamma_1^2 t)}{\lambda_3 + c_0\exp(-\lambda_2 t)}, \\ \varphi_2 &= \frac{c_2\exp(\lambda\gamma_2^2 t)}{\lambda_3 + c_0\exp(-\lambda_2 t)}. \end{aligned} \tag{26}$$

В (26) і скрізь нижче c_0, c_1, c_2 — довільні сталі. Таким чином, підставляючи вирази (26) в анзац (23*a*), одержуємо трипараметричні сім'ї точних розв'язків нелінійного узагальнення рівняння Фішера (17):

$$U = \frac{\lambda_2 + c_1\exp(\lambda\gamma_1^2 t + \gamma_1 x) + c_2\exp(\lambda\gamma_2^2 t + \gamma_2 x)}{\lambda_3 + c_0\exp(-\lambda_2 t)}, \tag{27}$$

де $\lambda_0\gamma_{1,2}^2 t + \lambda_1\gamma_{1,2} - \lambda_3 = 0$.

Аналогічно, підставляючи функції $g_0 = 1$, $g_1 = \exp(\gamma(t)x)$, $g_2 = x\exp(\gamma(t)x)$ з анзацу (23*b*) у співвідношення (20), одержуємо відповідні значення функцій R_{ii_1}, Q_{ii_1}, $T_{ii_1}^j$, для яких система ЗДР (21) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= \lambda_2\varphi_0 - \lambda_3\varphi_0^2, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= (\lambda\gamma^2 + \lambda_2)\varphi_1 - \lambda_3\varphi_0\varphi_1 + 2\gamma\lambda\varphi_2, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= (\lambda\gamma^2 + \lambda_2)\varphi_2 - \lambda_3\varphi_0\varphi_2. \end{aligned}$$

Ця система ЗДР інтегрується і має загальний розв'язок

$$\varphi_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 + c_0 \exp(-\lambda_2 t)},$$
$$\varphi_1 = \frac{(c_1 + 2c_2 \lambda \gamma t) \exp(\lambda \gamma^2 t)}{\lambda_3 + c_0 \exp(-\lambda_2 t)}, \tag{28}$$
$$\varphi_2 = \frac{c_2 \exp(\lambda \gamma^2 t)}{\lambda_3 + c_0 \exp(-\lambda_2 t)},$$

де $\gamma = -\dfrac{\lambda_1}{2\lambda_0}$, $\lambda_2 = -\dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_0}$. Таким чином, підставляючи вирази (28) в анзац $(23b)$, одержуємо трипараметричну сім'ю точних розв'язків нелінійного рівняння (17):

$$U = \frac{\lambda_2 + (c_1 + 2c_2 \lambda \gamma t) \exp(\lambda \gamma^2 t + \gamma t) + c_2 x \exp(\lambda \gamma^2 t + \gamma x)}{\lambda_3 + c_0 \exp(-\lambda_2 t)}. \tag{29}$$

Аналогічно, підставляючи функції $g_0 = 1$, $g_1 = x$, $g_2 = \exp(\gamma(t)x)$ з анзацу $(23c)$ у співвідношення (20), одержуємо відповідні значення функцій R_{ii_1}, Q_{ii_1}, $T_{ii_1}^{j}$, для яких система ЗДР (21) генерує трипараметричну сім'ю точних розв'язків нелінійного рівняння (17) при $\lambda_3 = 0$:

$$U = \frac{c_1 + \lambda_2 x + c_2 \exp(\lambda \gamma^2 t + \gamma x)}{-\lambda_1 + c_0 \exp(-\lambda_2 t)}, \qquad \gamma = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \tag{30}$$

Врешті-решт, анзац $(23d)$ дає трипараметричну сім'ю точних розв'язків

$$U = \frac{c_2 + 2\lambda \lambda_2 t + c_1 x + \lambda_2 x^2}{-2\lambda_0 + c_0 \exp(-\lambda_2 t)} \tag{31}$$

нелінійного рівняння (17) при $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, тобто

$$U_t = (\lambda + \lambda_0 U) U_{xx} + \lambda_2 U. \tag{32}$$

Очевидно, що (27), (29) – (32) не є розв'язками вигляду (3), а отже, це саме неліївські розв'язки нелінійного узагальнення рівняння Фішера (17).

Виявляється, що рівняння (17) має унікальну властивість: спеціальним вибором коефіцієнтів λ_i можна суттєво розширити його симетрію. Дійсно, застосовуючи стандартну процедуру методу Лі [1], можна переконатись, що при $\lambda = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_3 = -\dfrac{2}{9}\lambda_1^2$ рівняння

$$U_t = UU_{xx} + \lambda_1 UU_x + \lambda_2 U + \frac{2}{9}\lambda_1^2 U^2 \tag{33}$$

інваріантне відносно операторів (2) та двох додаткових генераторів

$$\begin{aligned} T &= \exp(-\lambda_2 t)(P_t + \lambda_2 U P_U), \\ X &= \exp\left(-\frac{\lambda_1}{3} x\right)\left(P_x - \frac{2\lambda_1}{3} U P_U\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Оператори симетрії (34) дозволяють знайти розв'язки нелінійного рівняння (33) зі структурою, відмінною від (3), зокрема сім'ю розв'язків

$$U = -\frac{9\lambda_2}{2\lambda_1^2} \frac{c_0 + c_1 \exp\left(-\frac{1}{3}\lambda_1 x\right) + c_2 \exp\left(-\frac{2}{3}\lambda_1 x\right)}{c_0 + \exp(-\lambda_2 t)}. \tag{35}$$

З другого боку, ця ж сім'я розв'язків одержується як частинний випадок з (27) при $\lambda = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_3 = -\frac{2}{9}\lambda_1^2$. Отже, для нелінійного рівняння з широкою симетрією одержання неліївського анзацу не гарантує побудову за ним неліївських розв'язків. Наприклад, *неліївський анзац* (23а) породжує *ліївські розв'язки* (35) для нелінійного рівняння (33).

Сім'я розв'язків (27) породжує двопараметричну сім'ю

$$U = \frac{\lambda_2 + c_1 \exp(\lambda\gamma^2 t + \gamma x)}{\lambda_3 + c_0 \exp(-\lambda_2 t)}, \qquad \gamma = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \tag{36}$$

для рівнянням Маррі

$$U_t = \lambda U_{xx} + \lambda_1 U U_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2.$$

Розв'язки (36) не є розв'язками вигляду (3), проте у випадку $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ вони мають подібні властивості до плоскохвильових розв'язків, зображених графічно в [16, 17]. Отже, вони описують подібні процеси, проте, ймовірно, більш точно. При $c_0 = 0$ розв'язки (36) перетворюються на плоскохвильові.

***Зауваження* 4.** Побудова розв'язків нелінійного рівняння (17) при $\lambda_2 = 0$ з використанням анзаців (23) приводить до неліївських розв'язків, що мають властивість за скінченний проміжок часу зростати до нескінченності [18]. Такі розв'язки для нелінійних рівнянь теплопровідності мають фізичну інтерпретацію (див., наприклад, [19]).

***Зауваження* 5.** Розглянемо дещо інше узагальнення рівняння Фішера

$$U_t = [(\lambda + \lambda_0 U) U_x]_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2, \tag{37}$$

яке при $\lambda_0 = 0$ співпадає з ним і має відомий солітоноподібний розв'язок, знайдений в [20]. Запропонованим вище методом можна знайти розв'язки цього рівняння і при $\lambda_0 \neq 0$ (див. додаток).

4. Система нелінійних рівнянь дифузії. Розглянемо нелінійну систему дифузійних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} U_t &= (D_1(U, V) U_x)_x + \mu U_x + s_1 U, \\ V_t &= (D_2(U, V) V_x)_x + \mu V_x + s_2 V, \end{aligned} \tag{38}$$

де $D_1(U, V)$, $D_2(U, V)$ — деякі задані функції, μ, s_1, s_2 — довільні сталі.

Добре відомо, що цією системою моделюються найрізноманітніші процеси (процес випаровування та плавлення металів при $\mu = 0$ [21, 22], процес росту кристалів протеїну при $s_1 = s_2 = 0$ [23]). У випадку лінійних функцій

$$D_1(U, V) = 1 + \lambda_1^1 U + \lambda_2^1 V, \qquad D_2(U, V) = 1 + \lambda_1^2 U + \lambda_2^2 V$$

з (38) одержуємо нелінійну систему

$$\begin{aligned} U_t &= (1 + \lambda_1^1 U + \lambda_2^1 V) U_{xx} + \lambda_1^1 U_x^2 + \lambda_2^1 U_x V_x + \mu U_x + s_1 U, \\ V_t &= (1 + \lambda_2^2 V + \lambda_1^2 U) V_{xx} + \lambda_2^2 V_x^2 + \lambda_1^2 U_x V_x + \mu V_x + s_2 V, \end{aligned} \tag{39}$$

яка при довільних значеннях коефіцієнтів має лише тривіальну алгебру симетрій Лі (2), а отже, лише плоскохвильові ліївські розв'язки (3).

Розглянемо анзац вигляду (7) при $m = n = 3$

$$\begin{aligned} U &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\exp(\gamma_1(t)x) + \varphi_2(t)\exp(\gamma_2(t)x), \\ U &= \Psi_0(t) + \Psi_1(t)\exp(\gamma_1(t)x) + \Psi_2(t)\exp(\gamma_2(t)x), \end{aligned} \tag{40}$$

що породжується незачепленою системою ЗДР

$$\begin{aligned} \alpha_1(t)\frac{dU}{dx} + \alpha_2(t)\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^3U}{dx^3} &= 0, \\ \alpha_1(t)\frac{dV}{dx} + \alpha_2(t)\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^3V}{dx^3} &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Як у випадку рівняння (17), за допомогою анзацу (41) одержуємо п'ятипараметричні сім'ї розв'язків нелінійної системи (39), а саме:

при $\lambda_1^1 = \lambda_2^2 = 0$

$$\begin{aligned} U &= d_1 \exp(s_1 t) + \\ &+ c_1 \exp\left[(s_1 + \gamma^2 - \mu\gamma)t + \gamma^2\lambda_2^1 d_2 s_2^{-1} \exp(s_2 t) - \gamma x\right], \\ V &= d_2 \exp(s_2 t) + \\ &+ c_2 \exp\left[(s_2 + \gamma^2 + \mu\gamma)t + \gamma^2\lambda_1^2 d_1 s_1^{-1} \exp(s_1 t) + \gamma x\right]; \end{aligned} \tag{42}$$

при $\lambda_1^1 = \lambda_1^2$, $\lambda_2^1 = \lambda_2^2$, $s_1 = s_2 = s$

$$\begin{aligned} U &= d_1 \exp(st) + \exp\left[(s+\gamma^2)t + \frac{\gamma^2}{s}(\lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2)\exp(st)\right] \times \\ &\times \left[c_1 \exp(\mu\gamma t + \gamma x) + c_2 \exp(-\mu\gamma t - \gamma x)\right], \\ V &= d_2 \exp(st) - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1}\exp\left[(s+\gamma^2)t + \frac{\gamma^2}{s}(\lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2)\exp(st)\right] \times \\ &\times \left[c_1 \exp(\mu\gamma t + \gamma x) + c_2 \exp(-\mu\gamma t - \gamma x)\right], \end{aligned} \tag{43}$$

де d_1, d_2, c_1, c_2, γ — довільні сталі.

Очевидно, що розв'язки (42), (43) не є ліївськими. Зауважимо, що в [21, 22] всі знайдені розв'язки системи вигляду (38) при $\mu = s_1 = s_2 = 0$ є ліївськими.

У випадку $s = s_1 = s_2 = 0$ розв'язок (43) має більш просту структуру. Це дозволило нам встановити, що анзац

$$\begin{aligned} U &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\exp(\gamma_1(t)x) + \ldots + \varphi_{m-1}(t)\exp(\gamma_{m-1}(t)x), \\ V &= \Psi_0(t) + \Psi_1(t)\exp(\gamma_1(t)x) + \ldots + \Psi_{m-1}(t)\exp(\gamma_{m-1}(t)x), \end{aligned} \tag{44}$$

що породжується незачепленою системою додаткових умов (6) при $\alpha_i = \beta_i = \alpha_i(t)$ та *довільних* натуральних $m = n$, породжує $2m$-параметричну сім'ю розв'язків нелінійної системи (39)

$$U = d_1 + c_k \exp[\gamma_k^2(1 + \lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2)t + \gamma_k(\mu t + x)],$$
$$V = d_2 - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1} c_k \exp[\gamma_k^2(1 + \lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2)t + \gamma_k(\mu t + x)]. \tag{45}$$

В (45) передбачається підсумовування від 0 до $m-1$ за індексами k, що повторюються, а c_k, γ_k — довільні сталі.

У випадку $\alpha_1 = 0$, $\gamma = -\alpha_2$ умови (41) породжують анзац

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)\exp(\gamma(t)x),$$
$$V = \Psi_0(t) + \Psi_1(t)x + \Psi_2(t)\exp(\gamma(t)x),$$

який, зокрема, дозволяє побудувати для системи (39) при

$$D_1 = D_2 = D(U, V) \equiv 1 + \lambda_1^1 U + \lambda_2^1 V, \quad s = s_1 = s_2$$

сім'ю розв'язків

$$U = \varphi_0(t) + d_1 \exp(st)x + \varphi_2(t)\exp[\gamma(t)x],$$
$$U = \Psi_0(t) + d_2 \exp(st)x - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1}\varphi_2(t)\exp[\gamma(t)x]. \tag{46}$$

В (46) функції φ_0, Ψ_0, φ_2 — розв'язки системи ЗДР

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = s\varphi_0 + d_1 \exp(st)[\mu + \lambda_1^1 d_1 \exp(st) + \lambda_2^1 d_2 \exp(st)],$$
$$\frac{d\Psi_0}{dt} = s\Psi_0 + d_2 \exp(st)[\mu + \lambda_1^1 d_1 \exp(st) + \lambda_2^1 d_2 \exp(st)], \tag{47}$$
$$\frac{d\varphi_2}{dt} = s\varphi_2 + \gamma(t)[\mu + \lambda_1^1 d_1 \exp(st) + \lambda_2^1 d_2 \exp(st) +$$
$$+ \gamma(t) D(\varphi_0, \Psi_0)]\varphi_2,$$

де $\gamma(t) = \dfrac{-s}{\lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2}\exp(-st)$ при $s \neq 0$ і $\gamma = (c_0 - (\lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2)t)^{-1}$ при $s = 0$.

Зауваження 6. Сім'я розв'язків (46) суттєво відрізняється від усіх попередніх тим, що у ній $\gamma(t) \neq \mathrm{const}$. Іншими слова, це не є сім'я розв'язків з поділеними змінними вигляду

$$U = \varphi_0(t)g_0(x) + \ldots + \varphi_{m-1}(t)g_{m-1}(x),$$
$$V = \psi_0(t)h_0(x) + \ldots + \psi_{n-1}(t)h_{n-1}(x),$$

які одержуються з анзацу (7) у частинному випадку, коли функції $g_i = g_i(x)$ та $h_j = h_j(x)$. Отже, ці розв'язки не можуть бути одержані за допомогою підходу для побудови нових точних розв'язків нелінійних двовимірних рівнянь дифузії, запропонованого в [11, 12] і розвинутого в роботах [13, 14] (метод інваріантних підпросторів).

Користуючись додатковими умовами вигляду (41), аналогічно можна одержати точні розв'язки системи (39) у випадку $\mu = \mu(t)$ (таке узагальнення природне, оскільки μ — швидкість [23]). Такі розв'язки можна використати для точного розв'язання нелінійних крайових задач з рухомими границями (задач Стефана).

Зазначимо, що в роботі [9] за допомогою анзацу (40) одержано сім'ї неліївських розв'язків системи нелінійних рівнянь для опису еволюції температури та густини у термоядерній плазмі [24]. Там же наголошено, що у випадку $\gamma_1 = -\gamma_2 = i\gamma_0$, $i^2 = -1$, $\gamma_0 \in \boldsymbol{R}$, кожен розв'язок вигляду (40) породжує два дійсні, які міститимуть періодичні функції $\cos$ або $\sin$. Такі розв'язки моделюють процеси еволюції, що мають коливний характер.

Додаток. Використовуючи метод Лі [1], неважко переконатись, що при $\lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ (нижче це скрізь припускається) класична симетрія рівняння (37) вичерпується операторами P_t і P_x (див. (2)). Отже, методом Лі можуть бути знайдені лише плоскохвильові розв'язки вигляду (3). Проте низка анзаців (23) дозволяє одержувати аналогічно, як і для рівняння (17), сім'ї неліївських розв'язків для нелінійного рівняння (37). Зокрема, нами одержано 3-параметричну сім'ю точних розв'язків

$$\lambda_0 U = \varphi_0(t) - \lambda + \exp\left[\left(\lambda_2 + \frac{2\lambda\lambda_3}{\lambda_0}\right)t - \frac{3\lambda_3}{2\lambda_0}\int \varphi_0(t)\,dt\right] \times$$
$$\times \left[c_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}\,x\right) + c_2 \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}\,x\right)\right], \tag{48}$$

де c_1, c_2, — довільні сталі, $\varphi_0(t)$ — довільний розв'язок інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = -\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\varphi_0^2 + \left(\lambda_2 + \frac{2\lambda\lambda_3}{\lambda_0}\right)\varphi_0 - \lambda\left(\lambda_2 + \frac{\lambda\lambda_3}{\lambda_0}\right) -$$
$$- 2c_1 c_2 \frac{\lambda_3}{\lambda_0}\exp\left[2\left(\lambda_2 + \frac{2\lambda\lambda_3}{\lambda_0}\right)t - \frac{3\lambda_3}{\lambda_0}\int \varphi_0(t)\,dt\right]. \tag{49}$$

Легко помітити, що у випадку $c_1 c_2 = 0$ рівняння (49) спрощується до ЗДР, розв'язуючи яке, одержуємо 2-параметричні сім'ї точних розв'язків нелінійного рівняння (37)

$$U = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\left[1 + \tanh\frac{\lambda_2(t - c_0)}{2}\right] +$$
$$+ c_2 \frac{\exp\left((2\lambda\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)\,t/(4\lambda_0)\right)}{\left(\cosh\left(\lambda_2(t - c_0)/2\right)\right)^{3/2}} \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}\,x\right) \tag{50}$$

та

$$U = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\left[1 + \tanh\frac{\lambda_2(t - c_0)}{2}\right] +$$
$$+ c_1 \frac{\exp\left((2\lambda\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)\,t/(4\lambda_0)\right)}{\left(\cosh\left(\lambda_2(t - c_0)/2\right)\right)^{3/2}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}\,x\right) \tag{51}$$

відповідно при $c_1 = 0$ і $c_2 = 0$. Для довільного розв'язку U^* вигляду (51) справедливі оцінки: $U^* \to \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$, якщо $t \to \infty$ і $\lambda\lambda_3 < \lambda_0\lambda_2$; $U^* \to$ $\to \dfrac{\lambda_2}{2\lambda_3}\left[1 + \tanh\dfrac{\lambda_2(t - c_0)}{2}\right] < \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$, якщо $x \to +\infty$ і $\lambda_0\lambda_3 > 0$.

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Нелінійна крайова задача для узагальнення рівняння Фішера* (37) *при початковій умові*

$$U(0,x) = C_0 + C_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_2}{2\lambda_0}}\,|x|\right)$$

і крайових умовах Ноймана

$$U_x(t,-\infty) = 0, \quad U_x(t,+\infty) = 0,$$

в області $(t,x)\in[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ *має точний неперервний обмежений розв'язок*

$$U = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\frac{\lambda_2(t-c_0)}{2}\right] +$$

$$+ \; c_1\frac{\exp(\lambda_2(2+\lambda_0)t/(4\lambda_0))}{(\cosh(\lambda_2(t-c_0)/2))^{3/2}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_2}{2\lambda_0}}\,|x|\right),$$

де $C_0 = \dfrac{1}{2}\left[1+\tanh\dfrac{-\lambda_2 c_0}{2}\right]$, $C_1 = c_1\left(\cosh\dfrac{-\lambda_2 c_0}{2}\right)^{-3/2}$, *а* $\lambda = 1$, $\lambda_0 > 1$, $\lambda_3 = \lambda_2 > 0$.

1. *Fushchych W., Shtelen W., Serov N.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 436 p.
2. *Фущич В. И.* Как расширить симметрию уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 4–16.
3. *Fushchych W., Tsyfra I.* On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A. – 1987. – **20**. – P. L45–47.
4. *Фущич В. І., Серов М. І., Чопик В. І.* Умовна інваріантність та нелінійні рівняння теплопровідності // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 17–21.
5. *Bluman G. W., Cole I. D.* The general similarity solution of the heat equation // J. Math. and Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025–1042.
6. *Фущич В. І., Черпига Р. М.* Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I, II // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10, 12. – С. 1349 –1357; 1687–1694.
7. *Fushchych W., Cherniha R.* The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1985. – **18**. – P. 3491–3503.
8. *Fushchych W., Cherniha R.* Galilei-invariant systems of nonlinear systems of evolution equations // Ibid. – 1995. – **28**. – P. 5569–5579.
9. *Черніга Р. М.* Симетрія та точні розв'язки рівнянь тепломасопереносу в термоядерній плазмі // Допов. НАН України. – 1995. – № 4. – С. 17–21.
10. *Fushchych W., Zhdanov R.* Antireduction and exact solutions of nonlinear heat equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**, № 1. – P. 60–64.
11. *Bertsch M., Kersner R., Peletier L. A.* Positivity versus localization in degenerate diffusion equations // Nonlinear Analysis, TMA. – 1985. – **9**. – P. 987–1008.
12. *Oron A., Rosenau P.* Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**, № 4. – P. 172–176.
13. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1994. – **34**, № 3. – С. 373–383.
14. *Svirshchevskii S.* Invariant linear spaces and exact solutions of nonlinear evolution equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 1996. – **3**. – P. 164–169.
15. *Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. – 1937. – **7**. – P. 353–369.

16. *Murray J. D.* Nonlinear differential equation models in biology. – Oxford: Clarendon Press, 1977. – 370 p.
17. *Murray J. D.* Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.
18. *Cherniha R.* A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations // Rept. Math. Phys. – 1996. – **38**, № 3. – P. 301–312.
19. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987. – 480 с.
20. *Ablowitz M., Zeppetella A.* A soliton solution of the Fisher equation // Bull. Math. Biol. – 1979. – **41**. – P. 835–840.
21. *Черніга Р., Одunороженко І.* Точні розв'язки нелінійної задачі плавлення та випаровування металу при дії потужного потоку енергії // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 12. – С. 44–47.
22. *Cherniha R. M., Cherniha N. D.* Exact solutions of a class of nonlinear boundary value problems with moving boundaries // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1993. – **26**. – P. L935–940.
23. *Fehribach J. D.* Analysis and application of a continuation method for a self-similar coupled Stefan system // Quart. Appl. Math. – 1993. – **51**, № 3. – P. 405–423.
24. *Вільгельмссон Г.* Коливання та встановлення рівноваги за умов взаємозв'язку температури та густини у термоядерних плазмах // Укр. фіз. журн. – 1993. – **38**, № 1. – С. 44–53.

Одержано 03.04.96