УДК 517.96

С. А. Калуцкий, Ю. С. Самойленко
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ НЕ $*$-ДИКИЕ

We consider certain properties of $*$-wild groups and prove that periodic groups are not $*$-wild.

Розглядаються деякі властивості $*$-диких груп. Доводиться, що періодичні групи не є $*$-дикими.

1. О $*$-диких группах. Пусть $F_2 = \langle u, v \rangle$ — свободная группа с двумя образующими, $C^*(F_2)$ — групповая C^*-алгебра F_2, $M_n(C^*(F_2))$ — $*$-алгебра матриц над $C^*(F_2)$, $U_n(C^*(F_2))$ — группа унитарных матриц над $C^*(F_2)$, $\mathrm{REP}\, G$ — категория представлений дискретной группы G, у которой объекты — унитарные представления группы G с точностью до унитарной эквивалентности, морфизмы — сплетающие операторы. Далее, пусть J — некоторое унитарное представление группы F_2, $J(u) = U$, $J(v) = V$, где U, V — унитарные операторы в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H. Обозначим поднятие представления J через $\hat{J} : M_n(C^*(F_2)) \to B\left(\bigoplus\limits_1^n H\right)$. Сформулируем следующее определение.

Определение. *Группу G называем $*$-дикой, если при некотором $n = 1, 2, \ldots$ существует гомоморфизм $\Phi: G \to U_n(C^*(F_2))$ такой, что функтор*

$$F: \mathrm{REP}\, F_2 \to \mathrm{REP}\, G \qquad \left(F(J) = \hat{J}\Phi: G \to U_n\left(C^*(F_2)\right) \to B\left(\bigoplus_1^n H\right)\right)$$

есть полный и строгий.

Приведенное определение эквивалентно $*$-дикости в смысле работ [1, 2] групповой C^*-алгебры $C^*(G)$.

Приведем некоторые свойства $*$-диких групп. Доказательства подобны доказательствам из [3, 4].

Утверждение 1. *Если группа G $*$-дикая, то G не типа* 1.

Утверждение 2. *Если G — аменабельная группа, то G не $*$-дикая.*

2. Периодические группы не $*$-дикие.

Теорема. *Пусть G — периодическая группа. Тогда G* не $*$-дикая.

Доказательство. Допустим, что G $*$-дикая, т. е. существует гомоморфизм $\Phi: G \to U_n(C^*(F_2))$ такой, что функтор $F: \mathrm{REP}\, F_2 \to \mathrm{REP}\, G$ полный и строгий. Рассмотрим семейство одномерных представлений h_t группы $F_2 = \langle u, v \rangle$ в пространстве $\mathbb{C}$ такое, что $h_t(u) = 1$, $h_t(v) = e^{it}$, где $t \in (0, 2\pi]$, и обозначим через $U_t(g) = \hat{h}_t\Phi(g)$ $(g \in G)$ матрицу непрерывных функций от t. Так как функтор F полный и строгий, то представления группы G $\hat{h}_{t_1}\Phi$ и $\hat{h}_{t_2}\Phi$ (при фиксированных $t_1 \neq t_2$) унитарно не эквивалентны. Поскольку неприводимые представления $\hat{h}_t\Phi$ группы G в конечномерном линейном пространстве определяются с точностью до унитарной эквивалентности своим характером (см., например, [5]), то существует $g \in G$ такой, что $\operatorname{tr} U_{t_1}(g) \neq \operatorname{tr} U_{t_2}(g)$. Тогда $\operatorname{tr} U_t(g)$ — непрерывная функция по t, не являющаяся константой. Упорядо-

© С. А. КАЛУЦКИЙ, Ю. С. САМОЙЛЕНКО, 1997

чим по возрастанию аргумента собственные значения $k_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, матрицы $U_t(g)$. Тогда существует такое i, что $k_i(t) \neq \mathrm{const}$. Так как для унитарных матриц задача определения собственных значений устойчива, то собственное значение $k_i(t)$ — непрерывная функция по t на некотором интервале (t_1, t_2). Но тогда существует такое t_0, что $k_i(t_0)$ не будет корнем из единицы. Так как G — периодическая группа, то существует степень $N(g)$ такая, что $g^{N(g)} = e$, где e — единица группы G, но $U_{t_0}^{N(g)}(g) \neq 1$. Противоречие.

Из теоремы следует, что существуют не $*$-дикие и одновременно не аменабельные группы. Например, группы Бернсайда $B(m, n)$ для $m \geq 2$ и $n \geq 665$ [6, 7] — не $*$-дикие и не аменабельные группы.

1. *Кругляк С. А., Самойленко Ю. С.* Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1980. – **14**, вып. 1. – С. 60–62.
2. *Kruglyak S., Piryatinskaya A.* On "wild" $*$-algebras and the unitary classification of weakly centred operators. – 15 p. – (Preprint / Inst. Mittag–Leffler. Swedish R. Acad. Sci., 1995 / 96;11).
3. *Пирятинская А. Ю.* Ручные и дикие задачи теории представлений $*$-алгебр: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев: Киев. ун-т, 1995. – 24 с.
4. *Пирятинская А. Ю., Самойленко Ю. С.* Дикие задачи теории представлений $*$-алгебр, порожденных образующими и соотношениями // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 74–78.
5. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1972. – 175 с.
6. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечная простая нетерова группа без кручения // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1979. – **43**, № 6. – С. 1328–1393.
7. *Адян С. И.* Случайные блуждания на свободных периодических группах // Там же. – 1982. – **46**, № 6. – С. 1139–1149.

Получено 21.10.96