УДК 517.544

П. В. Керекеша, С. Ю. Хачатуров (Одес. ун-т)

ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА В КОЛЬЦЕ ДЛЯ ДВУХ ПАР ФУНКЦИЙ

We consider a particular case of the matrix Carleman problem for two pairs of functions in a ring and find a constructive solution of this problem. In addition, we propose an algorithm for construction of solutions for two infinite systems of smooth transition and for a system of two singular equations of special type.

Розглянуто частковий випадок матричної задачі Карлемана для двох пар функцій. Одержано конструктивний розв'язок. Як застосування пропонується алгоритм побудови розв'язку двох нескінченних систем плавного переходу і системи двох сингулярних рівнянь спеціального вигляду.

1. Постановка задачи Карлемана (ЗК) в кольце для двух пар функций. Пусть заданы постоянные r, R такие, что $0<r<R<\infty$.

***Определение* 1.** *Пусть $\{r, R\}$ — пространство последовательностей $\{\Phi_n\}$ таких, что*

$$(r^n+R^n)\Phi_n \in l_2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

***Определение* 2.** *Пусть $\{\{r, R\}\}$ — пространство аналитических в кольце $r<|z|<R$ функций $\Phi(z)$, для каждой из которых существует постоянная C такая, что для всех $\rho \in (r, R)$ выполняется соотношение*

$$\int_0^{2\pi}\left|\Phi(\rho e^{i\alpha})\right|^2 d\alpha < C.$$

Постановка ЗК состоит в нахождении двух аналитических в кольце функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, удовлетворяющих на границе кольца $R^{-1}<|t|<R$, $R>1$, следующим условиям:

$$\begin{gathered}\Phi(R^{-1}t)+A(t)\Psi(Rt)=G_1(t),\\ \Phi(Rt)+B(t)\Psi(R^{-1}t)=G_2(t), \quad |t|=1,\end{gathered} \tag{1}$$

где заданные функции $G_1(t)$ и $G_2(t)$ принадлежат пространству $L_2(|t|=1)$, известные функции $A(t)$ и $B(t)$ отличны от нуля на окружности $|t|=1$ (нормальный случай) и принадлежат пространству W, $A(t)\in W: L^{-1}A=a_n$, $a_n \in l_1$, L^{-1} — обратный оператор Лорана [1, с. 222].

2. ЗК о „скачке". Требуется найти функции $\Phi(z)\in\{\{R^{-1}, R\}\}$, $\Psi(z)\in$ $\in\{\{R^{-1}, R\}\}$ из системы

$$\begin{gathered}\Phi(R^{-1}t)+\lambda\Psi(Rt)=H_1(t),\\ \Phi(Rt)+\mu\Psi(R^{-1}t)=H_2(t), \quad |t|=1,\end{gathered} \tag{2}$$

где λ, μ — заданные постоянные, $H_1(t)\in L_2(|t|=1)$, $H_2(t)\in L_2(|t|=1)$. Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ будем искать в виде ряда Лорана

$$\Phi(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi_n t^n; \quad \Psi(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_n t^n. \tag{3}$$

При этом система (2) эквивалентна следующей бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$R^{-n}\varphi_n + \lambda R^n\varphi_n = h_{1n},$$
$$R^n\varphi_n + \mu R^{-n}\psi_n = h_{2n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Для каждого фиксированного $n \in \mathbb{Z}$ определитель системы (4) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} R^{-n} & \lambda R^n \\ R^n & \mu R^{-n} \end{vmatrix} = \mu R^{-2n} - \lambda R^{2n}.$$

При этом возможны такие случаи:

а) $\Delta \neq 0$ для произвольных $n \in \mathbb{Z}$, тогда

$$\varphi_n = \frac{\mu h_{1n} R^{-n} - \lambda h_{2n} R^n}{\Delta}; \qquad \psi_n = \frac{h_{2n} R^{-n} - h_{1n} R^n}{\Delta}.$$

ЗК в этом случае имеет единственное и безусловное решение, т. е. решение, не требующее дополнительных ограничений (условий разрешимости).

Введем последовательности $\omega_n^{(1)} = R^{-n}/\Delta$; $\omega_n^{(2)} = R^n/\Delta$ и обозначим $L\omega_n^{(1)} = \Omega^{(1)}$; $L\omega_n^{(2)} = \Omega^{(2)}$. Тогда решение задачи (2) можно записать в виде сверток [1, с. 238]

$$\Phi(t) = \frac{\mu}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{\tau}\,d\tau - \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)}{\tau}\,d\tau, \tag{5}$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{\tau}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)}{\tau}\,d\tau; \tag{6}$$

б) если $\Delta = 0$, то

$$\bar{n} = \begin{cases} 0, & \lambda = \mu, \\ \nu, & \nu = (\ln\mu - \ln\lambda)/4\ln R, \quad \lambda \neq \mu, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

В этом случае для разрешимости (4) необходимо и достаточно, чтобы $\mu h_{2\bar{n}} \times R^{-\bar{n}} - \lambda h_{2\bar{n}} R^{\bar{n}} = 0$ и $h_{2\bar{n}} R^{-\bar{n}} - h_{1\bar{n}} R^{\bar{n}} = 0$ или, что тоже самое,

$$\int_{|\tau|=1} \frac{H_1(\tau)}{\tau}\,d\tau = \int_{|\tau|=1} \frac{H_2(\tau)}{\tau}\,d\tau, \qquad \bar{n} = 0, \tag{7}$$

$$\mu\int_{|\tau|=1} \frac{H_1(\tau)}{\tau^{\nu+1}}\,d\tau = \lambda R^{2\nu}\int_{|\tau|=1} \frac{H_2(\tau)}{\tau^{\nu+1}}\,d\tau, \qquad \bar{n} = \nu. \tag{8}$$

Если условия (7), (8) выполняются, то

$$\varphi_n = \begin{cases} \dfrac{R^{-n}\mu h_{1n} - \lambda R^n h_{2n}}{\Delta}, & n \neq \bar{n}, \\ C_1 = \text{const}, & n = \bar{n}, \end{cases}$$

$$\psi_n = \begin{cases} \dfrac{R^{-n} h_{2n} - R^n h_{1n}}{\Delta}, & n \neq \bar{n}, \\ C_2 = \text{const}, & n = \bar{n}. \end{cases}$$

Введем последовательности

$$\omega_n^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{R^{-n}}{\Delta}, & n \neq \bar{n}, \\ 0, & n = \bar{n}, \end{cases} \qquad \omega_n^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{R^{n}}{\Delta}, & n \neq \bar{n}, \\ 0, & n = \bar{n}. \end{cases}$$

Соответствующие преобразования Лорана обозначим через $\Omega_{\bar{n}}^{(1)}$, $\Omega_{\bar{n}}^{(2)}$. Тогда решение ЗК (2) принимает вид

$$\Phi(t) = C_1 t^{\bar{n}} + \frac{\mu}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \Omega_{\bar{n}}^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)}{\tau}\, d\tau - \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \Omega_{\bar{n}}^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)}{\tau}\, d\tau, \tag{9}$$

$$\Psi(t) = C_2 t^{\bar{n}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \Omega_{\bar{n}}^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)}{\tau}\, d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \Omega_{\bar{n}}^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)}{\tau}\, d\tau; \tag{10}$$

где C_1, C_2 — произвольные комплексные постоянные.

Итак, в случае б) для разрешимости (4) необходимо и достаточно выполнения условий (7), (8). Если они выполнены, то решение системы (4) существует и зависит от двух произвольных комплексных постоянных.

3. Факторизация при нулевом индексе. Пусть функции $A_0(t) \in W$, $B_0(t) \in W$; $A_0(t) \neq 0$, $B_0(t) \neq 0$, $|t| = 1$. Произведем факторизацию функций $A_0(t)$, $B_0(t)$ следующим образом:

$$A_0(t) = \lambda_0 \frac{X_1(R^{-1}t)}{X_2(Rt)}; \quad B_0(t) = \mu_0 \frac{X_1(Rt)}{X_2(R^{-1}t)}, \tag{11}$$

$X_1(t)$, $X_2(t)$ — искомые аналитические в кольце $R^{-1} < |t| < R$ функции, не имеющие нулей в замкнутом кольце $R^{-1} \leq |t| \leq R$. Кроме того, $X_1(t) \in W$, $X_2(t) \in W$; λ_0, μ_0 — искомые комплексные постоянные.

Прологарифмировав (11), получим

$$\begin{aligned} \ln A_0(t) &= \ln X_1(R^{-1}t) - \ln X_2(Rt) + \ln \lambda_0, \\ \ln B_0(t) &= \ln X_1(Rt) - \ln X_2(R^{-1}t) + \ln \mu_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\ln A_0(t)$ — фиксированная ветвь $\operatorname{Ln} A_0(t)$, а $\ln B_0(t)$ — фиксированная ветвь $\operatorname{Ln} B_0(t)$. Приведем без доказательства одно из свойств пространства W.

Теорема 1. *Пусть* $h(t) \in W$, $h(t) \neq 0$, $\operatorname{Ind} h(t) = 0$. *Тогда при подходящем выборе ветви логарифма* $\ln h(t) \in W$.

Итак, задача факторизации $A_0(t)$, $B_0(t)$, свелась к задаче (2), где

$$\begin{gathered} \Phi(t) = \ln X_1(t); \quad \Psi(t) = \ln X_2(t); \\ H_1(t) = \ln A_0(t) - \ln \lambda_0; \\ H_2(t) = \ln B_0(t) - \ln \mu_0; \quad \lambda = \mu = -1, \quad |t| = 1. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь мы имеем случай б) из п. 2, причем $\bar{n} = 0$.

Учитывая условия разрешимости (7), получаем

$$\int_{|\tau|=1} \frac{\ln A_0(\tau) - \ln \lambda_0}{\tau}\, d\tau = \int_{|\tau|=1} \frac{\ln B_0(\tau) - \ln \mu_0}{\tau}\, d\tau = C, \tag{14}$$

где $C = \text{const}$.

Не умаляя общности, полагаем $C = 0$. Тогда из (14) находим

$$\lambda_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\ln A_0(\tau)}{\tau}\,d\tau\right), \tag{15}$$

$$\mu_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\ln B_0(\tau)}{\tau}\,d\tau\right). \tag{16}$$

При этом $X_1(t)$ и $X_2(t)$ определяются из (9), (10):

$$X_1(t) = \exp\left\{C_1 - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln A_0(t)-\ln\lambda_0}{\tau}\,d\tau\, + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln B_0(\tau)-\ln\mu_0}{\tau}\,d\tau\right\}, \tag{17}$$

$$X_2(t) = \exp\left\{C_2 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln A_0(\tau)-\ln\lambda_0}{\tau}\,d\tau\, - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln B_0(\tau)-\ln\mu_0}{\tau}\,d\tau\right\}. \tag{18}$$

4. Факторизация при любом индексе. Пусть $A(t)\in W$, $B(t)\in W$, $A(t)\neq$ $\neq 0$, $B(t)\neq 0$, $|t|=1$, $\operatorname{Ind}A(t)=\kappa_1$, $\operatorname{Ind}B(t)=\kappa_2$.

Выбираем произвольное комплексное число a такое, что $R^{-1}<|a|<1$. Тогда

$$\operatorname{Ind}\left(\frac{R^{-1}t-a}{Rt-a}\right)^{\kappa} = \kappa$$

и функции

$$A_0(t) = A(t)\left(\frac{R^{-1}t-a}{Rt-a}\right)^{-\kappa_1}, \quad B_0(t) = B(t)\left(\frac{R^{-1}t-a}{Rt-a}\right)^{-\kappa_2}$$

удовлетворяют условиям п. 3. Следовательно,

$$A(t) = \lambda_0\left(\frac{R^{-1}t-a}{Rt-a}\right)^{\kappa_1}\frac{X_1(R^{-1}t)}{X_2(Rt)}, \tag{19}$$

$$B(t) = \mu_0\left(\frac{R^{-1}t-a}{Rt-a}\right)^{\kappa_2}\frac{X_1(Rt)}{X_2(R^{-1}t)}, \tag{20}$$

где λ_0, μ_0 определяются по формулам (15), (16), а $X_1(t)$, $X_2(t)$ — по формулам (17), (18).

5. ЗК (1) с ограничением $\kappa=\kappa_1=-\kappa_2$. Используя факторизацию функций $A(t)$, $B(t)$ (см. п. 4) условия (1) записываются в виде системы (2):

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(R^{-1}t)}{(R^{-1}t-a)^{\kappa}X_1(R^{-1}t)} + \frac{\lambda_0\Psi(Rt)}{(Rt-a)^{\kappa}X_2(Rt)} &= \frac{H_1(t)}{(R^{-1}t-a)^{\kappa}X_1(R^{-1}t)},\\ \frac{\Phi(Rt)}{(Rt-a)^{\kappa}X_1(Rt)} + \frac{\mu_0\Psi(R^{-1}t)}{(R^{-1}t-a)^{\kappa}X_2(R^{-1}t)} &= \frac{H_2(t)}{(Rt-a)^{\kappa}X_2(Rt)}, \quad |t|=1.\end{aligned} \tag{21}$$

Постоянные λ_0, μ_0 определяются по схеме п. 3 и с учетом формул (19 принимают вид

$$\lambda_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\ln\left[\left(\frac{R^{-1}\tau-a}{R\tau-a}\right)^{\kappa}A_0(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau}\right),$$

$$\mu_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\ln\left[\left(\frac{R\tau-a}{R^{-1}\tau-a}\right)^{\kappa}B_0(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau}\right).$$

Положим $\Delta' = \mu_0 R^{-2\overline{n}} - \lambda_0 R^{2\overline{n}}$. Рассмотрим такие случаи.

а) $\kappa = 0$. Если $\Delta' \neq 0$, то существует единственное и безусловное реше

$$\Phi(t) = \mu_0\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau} - \lambda_0\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$\Psi(t) = \frac{X_2(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau} - \frac{X_2(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Если $\Delta' = 0$, то для разрешимости (21) необходимо и достаточно выпол условий

$$\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau} = \int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau}, \qquad \overline{n}=0, \quad \lambda_0=\mu_0,$$

$$\mu_0\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}} = \lambda_0 R^{2\nu}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}}, \qquad \overline{n}=\nu, \quad \nu\in\mathbb{Z}.$$

В случае выполнения условий (26), (27) задача (21) имеет решение, зави от двух постоянных C_1, C_2:

$$\Phi(t) = X_1(t)\left[C_1 t^{\overline{n}} + \frac{\mu_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}_{\overline{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}_{\overline{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau}\right],$$

$$\Psi(t) = X_2(t)\left[C_2 t^{\overline{n}} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}_{\overline{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}_{\overline{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau}\right].$$

б) При $\kappa > 0$ рассмотрим сначала $\Delta' \neq 0$. Введем функции $Q_1(t)$, связанные с искомыми функциями $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ равенствами

$$\frac{\Phi(t)}{X_1(t)(t-a)^{\kappa}} = Q_1(t) + \frac{P_{\kappa-1}(t)}{(t-a)^{\kappa}},$$

$$\frac{\Psi(t)}{X_2(t)(t-a)^{\kappa}} = Q_2(t) + \frac{S_{\kappa-1}(t)}{(t-a)^{\kappa}},$$

где $\dfrac{P_{\kappa-1}(t)}{(t-a)^{\kappa}}$; $\dfrac{S_{\kappa-1}(t)}{(t-a)^{\kappa}}$ — главные части лорановского разложения левых частей равенств (30), (31).

Тогда из (21) получаем ЗК о „скачке" для функций $Q_1(t)$, $Q_2(t)$:

$$Q_1(R^{-1}t) + \lambda_0 Q_2(Rt) = \frac{H_1(t)}{(R^{-1}t-a)^{\kappa}X_1(R^{-1}t)} - \frac{P_{\kappa-1}(R^{-1}t)}{(R^{-1}t-a)^{\kappa}} - \lambda_0\frac{S_{\kappa-1}(Rt)}{(Rt-a)^{\kappa}},$$

$$Q_1(Rt) + \mu_0 Q_2(R^{-1}t) = \frac{H_2(t)}{(Rt-a)^{\kappa}X_1(Rt)} - \frac{P_{\kappa-1}(Rt)}{(Rt-a)^{\kappa}} - \mu_0\frac{S_{\kappa-1}(R^{-1}t)}{(R^{-1}t-a)^{\kappa}}, \quad |t|=1. \tag{32}$$

Отсюда по аналогии с (5) и (6) получаем решение ЗК (32):

$$Q_1(t) = \frac{\mu_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}} - \frac{P_{\kappa-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}} -\right.$$

$$\left. - \lambda_0\frac{S_{\kappa-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{\kappa}}\right\}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} - \frac{\lambda_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{\kappa}} -\right.$$

$$\left. - \frac{P_{\kappa-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{\kappa}} - \mu_0\frac{S_{\kappa-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}}\right\}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}, \tag{33}$$

$$Q_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{\kappa}} - \frac{P_{\kappa-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{\kappa}} -\right.$$

$$\left. - \mu_0\frac{S_{\kappa-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}}\right\}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}} -\right.$$

$$\left. - \frac{P_{\kappa-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}} - \lambda_0\frac{S_{\kappa-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{\kappa}}\right\}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}. \tag{34}$$

Учитывая (30) – (34), видим, что решение ЗК (21) принимает вид

$$\Phi(t) = X_1(t)(t-a)^{\kappa}Q_1(t) + X_1(t)P_{\kappa-1}(t),$$

$$\Psi(t) = X_2(t)(t-a)^{\kappa}Q_2(t) + X_2(t)S_{\kappa-1}(t).$$

Из (21), (24) и (25) следует, что в этом случае однородная задача имеет ровно $2|\kappa|$ линейно независимых решений. Если же $\Delta' = 0$, то сохраняют силу (30), (31), (32). Условия разрешимости (7) и (8) принимают соответственно вид

$$\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_1(\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}X_1(R^{-1}\tau)} - \frac{P_{\kappa-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}} - \lambda_0\frac{S_{\kappa-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{\kappa}}\right\}\frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_2(\tau)}{(R\tau-a)^{\kappa}X_1(R\tau)} - \frac{P_{\kappa-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{\kappa}} - \mu_0\frac{S_{\kappa-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}}\right\}\frac{d\tau}{\tau}$$

при $\overline{n} = 0$, $\lambda_0 = \mu_0$;

$$\mu_0 \int\limits_{|\tau|=1} \left\{ \frac{H_1(\tau)}{(R^{-1}\tau - a)^{\kappa} X_1(R^{-1}\tau)} - \frac{P_{\kappa-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau - a)^{\kappa}} - \lambda_0 \frac{S_{\kappa-1}(R\tau)}{(R\tau - a)^{\kappa}} \right\} \frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}} =$$

$$= \lambda_0 R^{2\nu} \int\limits_{|\tau|=1} \left\{ \frac{H_2(\tau)}{(R\tau - a)^{\kappa} X_1(R\tau)} - \frac{P_{\kappa-1}(R\tau)}{(R\tau - a)^{\kappa}} - \mu_0 \frac{S_{\kappa-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau - a)^{\kappa}} \right\} \frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}}$$

при $\bar{n} = \nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

Учитывая представления (30), (31) и формулы (33), (34) из (9), (10), получаем решение

$$\Phi(t) = X_1(t)(t-a)^{\kappa} Q_1(t) + C_1 t^{\nu} X_1(t)(t-a)^{\kappa} + X_1(t)(t-a)^{\kappa} P_{\kappa-1}(t), \quad (35)$$

$$\Psi(t) = X_2(t)(t-a)^{\kappa} Q_2(t) + C_2 t^{\nu} X_2(t)(t-a)^{\kappa} + X_2(t)(t-a)^{\kappa} S_{\kappa-1}(t). \quad (36)$$

в) $\kappa < 0$. В случае $\Delta' \neq 0$ решение будет следующим:

$$\Phi(t) = \frac{X_1(t)(t-a)^{\kappa}}{2\pi i} \mu_0 \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)}{(R^{-1}\tau - a)^{\kappa} X_1(R^{-1}\tau)} \frac{d\tau}{\tau} -$$

$$- \frac{X_1(t)(t-a)^{\kappa}}{2\pi i} \lambda_0 \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)}{(R\tau - a)^{\kappa} X_1(R\tau)} \frac{d\tau}{\tau}, \quad (37)$$

$$\Psi(t) = \frac{X_2(t)(t-a)^{\kappa}}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)}{(R^{-1}\tau - a)^{\kappa} X_1(R^{-1}\tau)} \frac{d\tau}{\tau} -$$

$$- \frac{X_2(t)(t-a)^{\kappa}}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)}{(R\tau - a)^{\kappa} X_1(R\tau)} \frac{d\tau}{\tau}. \quad (38)$$

Для устранения полюса у этих функций в точке $z = a$ необходимо и достаточно выполнить $2|\kappa|$ условий:

$$\mu_0 \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)j}\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)\, d\tau}{(R^{-1}\tau - a)^{\kappa} X_1(R^{-1}\tau) \tau^{j+1}} -$$

$$- \lambda_0 \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)j}\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)\, d\tau}{(R\tau - a)^{\kappa} X_1(R\tau) \tau^{j+1}} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, |\kappa| - 1; \quad (39)$$

$$\int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)j}\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)\, d\tau}{(R^{-1}\tau - a)^{\kappa} X_1(R^{-1}\tau) \tau^{j+1}} -$$

$$- \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)j}\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)\, d\tau}{(R\tau - a)^{\kappa} X_1(R\tau) \tau^{j+1}} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, |\kappa| - 1. \quad (40)$$

Если условия (39), (40) выполнены, то ЗК (21) имеет единственное решение (37), (38). В случае $\Delta' = 0$ требуются дополнительные условия разрешимости типа (7), (8); для (21) они будут иметь вид

$$\int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_1(\tau)\, d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau - a)^{\kappa} \tau} = \int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_2(\tau)\, d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau - a)^{\kappa} \tau}, \quad \bar{n} = 0; \quad (41)$$

$$\mu_0 \int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_1(\tau)\,d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}\,\tau^{\nu+1}} = \lambda_0 R^{2\nu} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_2(\tau)\,d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{\kappa}\,\tau^{\nu+1}}, \quad \overline{n}=\nu,\ \nu\in\mathbb{Z}. \tag{42}$$

Предположим, что эти условия выполнены; тогда в соответствии с (28), (29) получаем

$$\Phi(t) = X_1(t)(t-a)^{\kappa}\left\{C_1 t^{\overline{n}} + \frac{\mu_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\overline{n}}^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)\,d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}\,\tau} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\overline{n}}^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)\,d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{\kappa}\,\tau}\right\}, \tag{43}$$

$$\Psi(t) = X_2(t)(t-a)^{\kappa}\left\{C_2 t^{\overline{n}} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\overline{n}}^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)\,d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}\,\tau} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\overline{n}}^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)\,d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{\kappa}\,\tau}\right\}. \tag{44}$$

Выпишем необходимые и достаточные условия, при которых устраняется полюс в точке a:

$$\left.\left(C_1\frac{d^j}{dt^j}t^{\overline{n}}\right)\right|_{t=a} + \frac{\mu_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\overline{n}}^{(1)j}\left(\frac{a}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)\,d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}\,\tau^{j+1}} -$$

$$- \frac{\lambda_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\overline{n}}^{(2)j}\left(\frac{a}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)\,d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{\kappa}\,\tau^{j+1}} = 0, \quad j=0,1,\ldots,|\kappa|-1; \tag{45}$$

$$\left.\left(C_2\frac{d^j}{dt^j}t^{\overline{n}}\right)\right|_{t=a} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\overline{n}}^{(1)j}\left(\frac{a}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)\,d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{\kappa}\,\tau^{j+1}} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\overline{n}}^{(2)j}\left(\frac{a}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)\,d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{\kappa}\,\tau^{j+1}} = 0, \quad j=0,1,\ldots,|\kappa|-1. \tag{46}$$

Совокупность условий (41), (42), (45), (46) дает $2|\kappa|-2$ необходимых и достаточных условий разрешимости.

В случае выполнения условий (41), (42) ЗК (1) имеет единственное решение, определяемое формулами (43), (44).

6. Система двух бесконечных систем плавного перехода со степенными коэффициентами перед знаками сумм. Рассмотрим систему

$$\begin{gathered}
\alpha_1 R^{-n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k}u_k + \alpha_2 R^{n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{n-k}v_k = g_{1n},\\
\alpha_3 R^{n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{n-k}u_k + \alpha_4 R^{-n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{n-k}v_k = g_{2n},
\end{gathered} \tag{47}$$

где a_n, b_n, c_n, d_n принадлежат l_1, $g_{1n}\in l_2$, $g_{2n}\in l_2$, $|R|<1$; α_1, α_2, α_3, α_4 — произвольные константы, отличные от нуля. Решение u_k, v_k ищем в пространстве l_2.

Используя теорему о свертке [1, с. 238] и преобразование Лорана, систему (47) записываем в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \alpha_1 A(t)u(R^{-1}t) + \alpha_2 B(t)v(Rt) &= G_1(t), \\ \alpha_3 C(t)u(Rt) + \alpha_4 D(t)v(R^{-1}t) &= G_2(t), \quad |t| = 1. \end{aligned} \tag{48}$$

В соответствии с требованиями п. 1 предполагаем, что $A(t) \neq 0$, $B(t) \neq 0$, $C(t) \neq \neq 0$, $D(t) \neq 0$, $|t| = 1$. Система (48) принимает вид

$$\begin{aligned} u(R^{-1}t) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{B(t)}{A(t)}v(Rt) &= \frac{G_1(t)}{\alpha_1 A(t)}, \\ u(Rt) + \frac{\alpha_4}{\alpha_3}\frac{D(t)}{C(t)}v(R^{-1}t) &= \frac{G_2(t)}{\alpha_3 C(t)}, \quad |t| = 1, \end{aligned} \tag{49}$$

причем имеет место нормальный случай; $B(t)/A(t) \neq 0$ и принадлежит W; $D(t)/C(t) \neq 0$ и принадлежит W,

$$\frac{G_1(t)}{\alpha_1 A(t)} \in L_2(|t| = 1); \qquad \frac{G_2(t)}{\alpha_3 C(t)} \in L_2(|t| = 1).$$

Решение $u(z)$, $v(z)$ ищем в пространстве $\{\{R^{-1}R\}\}$. В соответствии с результатами п. 5 справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия:*

1) *известные коэффициенты* a_n, b_n, c_n, d_n *принадлежат* l_1;
2) $La_n = A(t) \neq 0$; $Lb_n = B(t) \neq 0$; $Lc_n = C(t) \neq 0$; $Ld_n = D(t) \neq 0$;
3) *заданные последовательности* g_{1n} *и* g_{2n} *принадлежат* l_2;
4) $\operatorname{Ind} B(t)/A(t) = \operatorname{Ind} C(t)/D(t) = 0$.

Тогда система (47) *имеет решение, которое строится по формулам*

$$u_k = L^{-1}u(t); \qquad v_k = L^{-1}v(t),$$

где

$$u(t) = \mu_0 \frac{X_1(t)}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{G_1(\tau)\,d\tau}{\alpha_1 A(\tau) X_1(R^{-1}\tau)\tau} - $$

$$- \lambda_0 \frac{X_1(t)}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{G_2(\tau)\,d\tau}{\alpha_3 C(\tau) X_1(R\tau)\tau},$$

$$v(t) = \frac{X_2(t)}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{G_1(\tau)\,d\tau}{\alpha_1 A(\tau) X_1(R^{-1}\tau)\tau} - $$

$$- \frac{X_2(t)}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{G_2(\tau)\,d\tau}{\alpha_3 C(\tau) X_1(R\tau)\tau},$$

$$\lambda_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{B(\tau)}{A(\tau)}\right)\frac{d\tau}{\tau}\right)$$

$$\mu_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \ln\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\frac{D(\tau)}{C(\tau)}\right)\frac{d\tau}{\tau}\right), \qquad \lambda_0 \neq \mu_0.$$

7. Система двух сингулярных уравнений специального вида. Рассматривается система двух сингулярных интегральных уравнений специального вида

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\varphi(t)+A(t)\psi(t)) + \frac{K'}{2\pi\ln R}\int\limits_{|\tau|=1} \operatorname{cs}\frac{K'}{\ln R}\left(-i\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{A(t)\psi(\tau)-\varphi(t)}{\tau}\,d\tau = H_1(t), \\ &\frac{1}{2}(\varphi(t)+B(t)\psi(t)) + \frac{K'}{2\pi\ln R}\int\limits_{|\tau|=1} \operatorname{cs}\frac{K'}{\ln R}\left(-i\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{\varphi(t)-B(t)\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau = H_2(t), \end{aligned} \tag{50}$$

$|t|=1,\ R>1,\ K, K'$ — действительный и мнимый четверть-периоды, причем они связаны соотношением

$$\frac{K}{K'} = \frac{\pi}{\ln R}.$$

Требуется найти функции $\varphi(t),\ \psi(t)$, принадлежащие $L_2(|t|=1)$. Для сведения системы (50) к ЗК для двух пар функций используем интегральное представление аналитической периодической функции в полосе [2]. Применительно к кольцу оно имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{K'}{2\pi\ln R}\int\limits_{|\tau|=1} \operatorname{dn}\frac{K'}{\ln R}\left(-i\ln\frac{z}{\tau}\right)\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau,$$

причем справедливы формулы

$$\begin{aligned} \Phi(Rt) &= \frac{\varphi(t)}{2} + \frac{K'}{2\pi\ln R}\int\limits_{|\tau|=1} \operatorname{cs}\frac{K'}{\ln R}\left(-i\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{\varphi(t)}{\tau}\,d\tau, \\ \Phi(R^{-1}t) &= \frac{\varphi(t)}{2} - \frac{K'}{2\pi\ln R}\int\limits_{|\tau|=1} \operatorname{cs}\frac{K'}{\ln R}\left(-i\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{\varphi(t)}{\tau}\,d\tau, \end{aligned} \tag{51}$$

$\varphi(t)$ — произвольная функция, принадлежащая пространству $L_2(|t|=1)$. Далее в силу формул (51) система (50) сводится к ЗК для двух пар функций в кольце $R^{-1}<|z|<R$ вида (1). При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия:*

1) $A(t)\neq 0,\ B(t)\neq 0,\ |t|=1$ *и принадлежат* W;

2) $H_1(t),\ H_2(t)$ *принадлежат пространству* $L_2(|t|=1)$;

3) K, K' — *действительный и мнимый четверть-периоды, причем они связаны соотношением*

$$\frac{K}{K'} = \frac{\pi}{\ln R}.$$

Тогда система (50) *имеет решение, которое строится по схеме п.* 5.

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
2. *Керекеша П. В.* Интегральное представление периодической аналитической функции в полосе // Республиканская научно-методическая конференция, посвященная 200-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского. – Одесса, 1992. – С. 38–39.

Получено 25.04.95