УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов (Днепропетр. ун-т)

ОБ АДДИТИВНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ *

We present a general scheme for deducing additive inequalities of Landau–Hadamard type. As a consequence, we prove several new inequalities for the norms of intermediate derivatives of functions given on a finite interval with exact constant at the norm of a function.

Наведено загальну схему одержання адитивних нерівностей типу Ландау – Адамара і як наслідок доведено ряд конкретних нових нерівностей для норм проміжних похідних функцій, заданих на скінченному інтервалі, з точною константою при нормі функції.

1. Введение. Пусть $G=(a,b)$ — интервал из $\mathbb{R}$. Через $L_p(G)$, $1\le p\le\infty$, обозначим совокупность всех измеримых функций $x(t)$, $t\in G$, с конечной нормой $\|x\|_{L_p(G)}$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} = \left(\int\limits_G |x(t)|^p\,dt\right)^{1/2}, \qquad 1\le p<\infty,$$

$$\|x\|_{L_\infty(G)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in G} |x(t)|.$$

Известно, что для любых целых k,n, $0\le k<n$, и любых $1\le p,q,r\le\infty$ существуют постоянные A, B такие, что для произвольной заданной на конечном интервале $G=(a,b)$ функции x, имеющей абсолютно непрерывную производную $x^{(n-1)}$, такой, что $x^{(n)}\in L_r(G)$ (класс таких функций будем обозначать через $L_r^n(G)$), справедливо неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(G)} = A\,\|x\|_{L_p(G)} + B\,\|x^{(n)}\|_{L_r(G)}. \tag{1}$$

Неравенства вида (1) изучались многими авторами (см., например, [1 – 4]). Обзор многих из этих исследований и подробную библиографию можно найти в работах Буренкова [7, 8] и Шадрина [12].

Если G — прямая, то неравенство (1) справедливо для любой функции $x\in L_r^n(\mathbb{R})$ (т. е. имеющей в $\mathbb{R}$ локально абсолютно непрерывную производную $x^{(n-1)}$ такую, что $x^{(n)}\in L_r(\mathbb{R})$) тогда и только тогда, когда $n/q\le(n-k)/p+k/r$ [3]. Оно эквивалентно неравенству с параметром ε:

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(G)} = A\,\varepsilon^{-\mu}\|x\|_{L_p(G)} + B\,\varepsilon^{\nu}\|x^{(n)}\|_{L_r(G)} \tag{2}$$

для любых $0<\varepsilon<\infty$, где $\mu=k-1/q+1/p$, $\nu=n-k+1/q-1/r$ (отметим, что $\mu\ge0$, $\nu\ge0$), а также мультипликативному неравенству

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(G)} \le C\|x\|_{L_p(G)}^{\nu/(\mu+\nu)}\|x^{(n)}\|_{L_r(G)}^{\mu/(\mu+\nu)}, \tag{3}$$

где

$$C = \frac{\mu+\nu}{\mu^{\mu/(\mu+\nu)}\nu^{\nu/(\mu+\nu)}}A^{\nu/(\mu+\nu)}B^{\mu/(\mu+\nu)},$$

если $\mu>0$.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № U 92000) и Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

В случае конечного интервала G неравенство (1) уже не эквивалентно неравенствам (2), (3) ((3), вообще говоря, не имеет места). Однако из неравенства (1) для конечного интервала следует, что при $n/q \le (n-k)/p + k/r$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что с некоторыми (зависящими от ε_0) постоянными $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ неравенство

$$\| x^{(k)} \|_{L_q(G)} = \tilde{A}\, \varepsilon^{-\mu} \| x \|_{L_p(G)} + \tilde{B}\, \varepsilon^{\nu} \| x^{(n)} \|_{L_r(G)} \tag{4}$$

справедливо с теми же μ и ν, что и (2), для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (см., например, [8]). Из неравенства (4) следует [8], что в (1) при указанных значениях параметров $\mu, \nu > 0$ справедливо соотношение $\inf B = 0$, где $\inf$ берется по всем постоянным B, при которых с некоторой постоянной A неравенство (1) справедливо для всех функций $x \in L_r^n(G)$. В то же время $\inf A > 0$, где $\inf$ берется по всем A таким, что с некоторой постоянной B неравенство (1) справедливо для всех $x \in L_r^n(G)$, и представляет интерес задача нахождения этого $\inf A$. Полагая

$$A^* = A_{n,k}^*(p, q, r) = \inf A,$$

нетрудно заметить, что $A_{n,k}^*(p, q, r) \ge M_{n,k}^*(p, q)$, где

$$M_{n,k}^*(p, q) := \sup_{P_{n-1} \ne 0} \frac{\| P_{n-1}^{(k)} \|_{L_q(G)}}{\| P_{n-1} \|_{L_p(G)}}$$

— точная константа в неравенстве типа Маркова–Никольского

$$\| P_{n-1}^{(k)} \|_{L_q(G)} \le C \| P_{n-1} \|_{L_p(G)} \tag{5}$$

для алгебраических полиномов P_{n-1} степени не выше $n-1$.

В данной статье мы приведем общую схему получения аддитивных неравенств типа (1) с неулучшаемой постоянной A и ряд конкретных новых неравенств, которые доказываются с ее помощью. В частности, при этом устанавливается, что для всех n, k, p, q, r

$$A_{n,k}^*(p, q, r) = M_{n,k}^*(p, q). \tag{6}$$

Отметим, что при $k = n-1$ соотношение (6) доказано ранее Буренковым [7, 8], а в случае $q = p = r = \infty$ задача о нахождении пар (A, B) точных констант в неравенствах (1) детально изучалась в работах Шадрина [11, 12]. Среди других работ, посвященных нахождению точных констант в неравенствах типа (1), отметим работы [4–6] и [9, 10]. Отметим также, что соотношение (6) анонсировано в [14].

2. Общая схема получения аддитивных неравенств. Пусть X, Y — группы по сложению; $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ — неотрицательные полуаддитивные вещественные функционалы на X и Y соответственно. Пусть также заданы отображение $T\colon X \supset D(T) \xrightarrow{T} Y$ такое, что

$$\forall\, x \in D(T) \quad (\| x \|_X = 0 \Rightarrow \| Tx \|_Y = 0), \tag{7}$$

и функционал $F\colon X \supset D(F) \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, причем

$$D(F) \subset D(T) \tag{8}$$

(здесь и ниже $D(A)$ обозначает область определения отображения A).

Нас будут интересовать условия, обеспечивающие существование констант A и B таких, что для любого $x \in D(F)$ выполняется неравенство

$$\| Tx \|_Y \leq A \| x \|_X + BF(x), \tag{9}$$

а также вопрос о точных постоянных в этом неравенстве. Аналогично определению константы $A^*_{n,k}(p, q, r)$ положим

$$A^* = A^*(X, Y, T, F) = \inf A, \tag{10}$$

где $\inf$ берется по всевозможным A таким, что с некоторой константой B неравенство (9) справедливо для любого $x \in D(F)$. Далее, пусть

$$B^* = B^*(X, Y, T, F) = \inf B, \tag{11}$$

где $\inf$ берется по всем B таким, что неравенство (9) справедливо для любого $x \in D(F)$ с константой $A = A^* = A^*(X, Y, T, F)$.

Условия, обеспечивающие принципиальную возможность выполнения неравенства (9), а также некоторая информация о константах A^* и B^* содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. *Предположим, что найдется подмножество $H \subset D(T)$ такое, что:*

1) $M^* = M^*(X, Y, T, H) = \sup\limits_{\substack{y \in H \\ \|y\|_X \neq 0}} \dfrac{\|Ty\|_Y}{\|y\|_X} < \infty$;

2) *существует $\tilde{B} > 0$ такое, что для любого $x \in D(F)$*

$$\inf_{y \in H} \{ M^* \| y - x \|_X + \| Tx - Ty \|_Y \} \leq \tilde{B} F(x).$$

Тогда для любого $x \in D(F)$

$$\| Tx \|_Y \leq M^* \| x \|_X + \tilde{B} F(x), \tag{12}$$

а значит,

$$A^*(X, Y, T, F) = M^*(X, Y, T, H). \tag{13}$$

Если дополнительно предположить, что $H \subset D(F)$ и $F(y) = 0$ для любого $y \in H$, то в неравенстве (12) *константу при $\| x \|_X$ уменьшить нельзя, т. е. в* (13) *имеет место равенство и, кроме того, $B^*(X, Y, T, F) \leq \tilde{B}$.*

Доказательство. Учитывая полуаддитивность функционала $\| \cdot \|_Y$, для любых $x \in D(T)$ и $y \in H$ имеем

$$\| Tx \|_Y = \| Tx + (-Ty + Ty) \|_Y = \| (Tx - Ty) + Ty \|_Y \leq$$
$$\leq \| Tx - Ty \|_Y + \| Ty \|_Y.$$

Если $\| y \|_X \neq 0$, то из неотрицательности функционала $\| \cdot \|_X$ и условия 1 теоремы следует $\| Ty \|_Y \leq M^* \| y \|_X$. Если же $\| y \|_X = 0$, то справедливость этого неравенства вытекает из (7). Учитывая полуаддитивность функционала $\| \cdot \|_X$, теперь получаем

$$\| Ty \|_Y \leq M^* \| y \|_X \leq M^* \| y - x \|_X + M^* \| x \|_X.$$

Следовательно,

$$\|Tx\|_Y \le \|Tx - Ty\|_Y + \|Ty\|_Y \le$$
$$\le M^* \|x\|_X + M^* \|y - x\|_X + \|Tx - Ty\|_Y. \tag{14}$$

Так как (14) справедливо для любого $y \in H$, то

$$\|Tx\|_Y \le M^* \|x\|_X + \inf_{y \in H} \{M^* \|y - x\|_X + \|Tx - Ty\|_Y\}. \tag{15}$$

Из (15) в силу условия 2 теоремы получаем, что для любого $x \in D(F)$ справедливо неравенство (12).

Пусть теперь $H \subset D(F)$ и $F(y) = 0$ для любого $y \in H$. Предполагая, что $A^*(X, Y, T, F) < M^*(X, Y, T, F)$, устанавливаем, что для некоторых $A < M^*$ и $B > 0$ при всех $x \in D(F)$ справедливо неравенство $\|Tx\|_Y \le A\|x\|_X + BF(x)$. В частности, для любого $x \in H$ имеем

$$\|Tx\|_Y \le A\|x\|_X, \quad A < M^*,$$

что противоречит условию 1. Таким образом, константа M^* в (12) неулучшаема, и следовательно, $B^*(X, Y, T, F) \le \tilde{B}$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 видно, что для выполнимости аддитивного неравенства (9) с некоторыми константами A и B достаточно, чтобы нашлось подмножество H из $D(T)$, для элементов которого выполняется неравенство типа Маркова–Никольского (условие 1) и совместное приближение элементов x и Tx элементами y, Ty $(y \in H)$ допускает оценку сверху вида $BF(x)$ с константой B, не зависящей от x (условие 2). Отметим, что при некоторых дополнительных условиях верно и обратное утверждение.

Если неравенство (9) справедливо для любого $x \in D(F)$ и $H = \{x \in D(F): F(x) = 0\}$, то для $x \in H$ выполняется неравенство типа Маркова–Никольского $\|Tx\|_Y \le A\|x\|_X$. Если, кроме того, T — гомоморфизм $D(T)$ в Y и найдется константа C такая, что для всех $x \in D(F)$

$$\inf_{y \in H} \|x - y\|_X \le CF(x), \tag{16}$$

то для любых $x \in D(F)$ и $y \in H$ имеем

$$\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \overset{(9)}{\le} A\|x - y\|_X + BF(x),$$

и далее, с учетом (16) получаем

$$\inf_{y \in H} \{A\|x - y\|_X + \|Tx - Ty\|_Y\} \le (2AC + B)F(x),$$

т. е. для совместного приближения элементов x и Tx элементами y, Ty $(y \in \in H)$ справедлива оценка типа 2.

Ниже приведем ряд конкретных следствий из теоремы 1, известных результатов о точных константах в неравенствах типа Маркова–Никольского и результатов о совместных приближениях функций и их производных.

3. Неравенства для норм производных функций, заданных на конечном интервале. Везде ниже для сокращения записей вместо $\|\cdot\|_{L_p(-1,1)}$ мы будем писать $\|\cdot\|_p$. Обозначим через $\mathcal{P}_{n-1}$ линейное многообразие алгебраических полиномов степени не выше $n-1$ и пусть в дальнейшем $M^*_{n,k} = M^*_{n,k}(p, q)$ — точная константа в неравенстве Маркова–Никольского (5) для $G = (-1, 1)$.

Теорема 2. *Для любых* $1 \le p, q, r \le \infty$, *любых* $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n-1$, *и для любой функции* $x \in L_r^n(-1,1)$ *справедливо неравенство*

$$\| x^{(k)} \|_q \le M_{n,k}^* \| x \|_p + B_{n,k}^* \| x^{(n)} \|_r. \tag{17}$$

При этом константу $M_{n,k}^*$ *в* (17) *уменьшить нельзя, т. е.*

$$A_{n,k}^*(p,q,r) = M_{n,k}^* = M_{n,k}^*(p,q),$$

а для константы $B_{n,k}^*$ *справедлива оценка*

$$B_{n,k}^* \le \frac{2^{n+1} M_{n,k}^*}{(n-1)!} + \frac{2^{n-k+1}}{(n-k-1)!}.$$

Доказательство. Положим в теореме 1

$$X = L_p(-1,1), \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_p, \qquad Y = L_q(-1,1), \quad \|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_q,$$

$$F(x) = \| x^{(n)} \|_r, \quad n \in \mathbb{N},$$

$T = D^k$, $k \in \mathbb{N}$, — оператор k-кратного дифференцирования, $H = \mathcal{P}_{n-1}$.

Тогда условие 1 теоремы 1 выполняется в силу справедливости для полиномов из $\mathcal{P}_{n-1}$ неравенства (5) Маркова – Никольского. Кроме того, $F(y) = 0$ для любого $y \in \mathcal{P}_{n-1}$ (т. е. дополнительное условие теоремы 1 также выполнено).

Для проверки условия 2 теоремы 1, которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\inf_{y \in \mathcal{P}_{n-1}} \{ M_{n,k}^* \| x - y \|_p + \| x^{(k)} - y^{(k)} \|_q \} \le \tilde{B} \| x^{(n)} \|_r,$$

воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Имеем для любой функции $x \in L_r^n(-1,1)$ и для любого $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$x^{(k)}(t) = P_{n-1}^{(k)}(t) + \frac{1}{(n-k-1)!} \int_{-1}^{1} (t-u)_+^{n-k-1} x^{(n)}(u)\, du \tag{18}$$

(здесь $x^{(0)} := x$, а P_{n-1} — полином Тейлора функции x).

Применяя обобщенное неравенство Минковского и неравенство Гельдера, из (18) получаем для конечных p, q, r, $r' = r(r-1)^{-1}$,

$$\| x^{(k)} - P_{n-1}^{(k)} \|_q = \frac{1}{(n-k-1)!} \left(\int_{-1}^{1} \left| \int_{-1}^{1} (t-u)_+^{n-k-1} x^{(n)}(u)\, du \right|^q dt \right)^{1/q} \le$$

$$\le \frac{1}{(n-k-1)!} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (t-u)_+^{(n-k-1)q} | x^{(n)}(u) |^q dt \right)^{1/q} du =$$

$$= \frac{1}{(n-k-1)!} \int_{-1}^{1} | x^{(n)}(u) | \, \| (\cdot - u)_+^{n-k-1} \|_q \, du \le$$

$$\le \frac{1}{(n-k-1)!} \| x^{(n)} \|_r \left(\int_{-1}^{1} \| (\cdot - u)_+^{n-k-1} \|_q^{r'} du \right)^{1/r'}.$$

Таким образом,

$$\inf_{y \in \mathcal{P}_{n-1}} \{ M_{n,k}^* \| x - y \|_p + \| x^{(k)} - y^{(k)} \|_q \} \le$$

$$\le \| x^{(n)} \|_r \left\{ \frac{M_{n,k}^*}{(n-1)!} \left(\int_{-1}^{1} \| (\cdot - u)_+^{n-1} \|_q^{r'} \, du \right)^{1/r'} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-k-1)!} \left(\int_{-1}^{1} \| (\cdot - u)_+^{n-k-1} \|_q^{r'} \, du \right)^{1/r'} \right\}.$$

Значит, условие 2 теоремы 1 выполнено и для константы (см. (11))

$$B_{n,k}^* = B^* \left(L_p, L_q, \frac{d^k}{dt^k}, \| x^{(n)} \|_r \right)$$

мы получаем оценку сверху

$$B_{n,k}^* \le \frac{M_{n,k}^*}{(n-1)!} \left(\int_{-1}^{1} \| (\cdot - u)_+^{n-1} \|_p^{r'} \, du \right)^{1/r'} +$$

$$+ \frac{1}{(n-k-1)!} \left(\int_{-1}^{1} \| (\cdot - u)_+^{n-k-1} \|_q^{r'} \, du \right)^{1/r'} <$$

$$< \frac{2^{n+1} M_{n,k}^*}{(n-1)!} + \frac{2^{n-k+1}}{(n-k-1)!}.$$

Аналогичную оценку совместного приближения и констант $B_{n,k}^*$ нетрудно получить и в случае, когда некоторые из параметров p, q, r равны ∞. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $q = p = \infty$ точная константа $M_{n,k}^*$ в неравенстве (5) равна $\| T_{n-1}^{(k)} \|_\infty$ (см., например, [15, с. 151] и [16]), где $T_{n-1}(x) = \cos(n - 1) \arccos x$, $x \in [-1, 1]$, — полином Чебышева 1-го рода степени $n - 1$. Учитывая, что

$$\| T_{n-1}^{(k)} \|_\infty = \frac{(n-1)^2 [(n-1)^2 - 1] \ldots [(n-1)^2 - (k-1)^2]}{(2k-1)!!},$$

из теоремы 2 получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Для любых $n, k \in \mathbb{N}$, $k \le n-1$, для любого $r \in [1, \infty]$ и для любой функции $x \in L_r^n(-1, 1)$ справедливо неравенство*

$$\| x^{(k)} \|_\infty \le \frac{(n-1)^2 [(n-1)^2 - 1] \ldots [(n-1)^2 - (k-1)^2]}{(2k-1)!!} \| x \|_\infty + B_{n,k} \| x^{(n)} \|_r,$$

в котором при фиксированных n и k константа при $\| x \|_\infty$ неуменьшаема.

Используя вместо неравенства (5) (при $p = q = \infty$) его уточнение [16, 17]

$$\| P_{n-1}^{(k)} \|_\infty \le \| T_{n-1}^{(k)} \|_\infty \max_k | P_{n-1}(t_k) |,$$

где $t_k = \cos(k\pi/(n-1))$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, легко убедиться, что в условиях следствия 1 справедливо неравенство

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \frac{(n-1)^2[(n-1)^2-1]\dots[(n-1)^2-(k-1)^2]}{(2k-1)!!} \max_k |x(t_k)| + B_{n,k}\|x^{(n)}\|_r$$

с неуменьшаемой постоянной при $\max\limits_k |x(t_k)|$.

Точное значение константы $M^*_{n,k}(1,1)$ неизвестно. Однако С. В. Конягин [18] показал, что существуют абсолютные константы $0 < c_1 < c$ такие, что

$$c_1 \frac{(n-1)\,T^{(k)}_{n-1}(1)}{(k+1)(n-k)} = M^*_{n,k}(1,1) \le c\,\frac{(n-1)\,T^{(k)}_{n-1}(1)}{(k+1)(n-k)}. \tag{19}$$

Учитывая (19), из теоремы 2 получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** *Для любых $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$, любого $r \in [1, \infty]$ и любой функции $x \in L^n_r(-1,1)$ справедливо неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_1 \le c\,\frac{(n-1)\,T^{(k)}_{n-1}(1)}{(k+1)(n-k)}\|x\|_1 + B_{n,k}\|x^{(n)}\|_r$$

с абсолютной константой c и некоторой не зависящей от x константой $B_{n,k}$.

Из результатов [19] следует

$$M_{n,k}(\infty, 2) = \frac{(2k-1)!!\,(n+k)}{\sqrt{2(2k+1)}}\binom{n+k-1}{n-k-1}. \tag{20}$$

Учитывая (20), с помощью теоремы 2 получаем следующий результат.

***Следствие* 3.** *Для любых $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$, любого $r \in [1, \infty]$ и любой функции $x \in L^n_r(-1,1)$ справедливо неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le \frac{(2k-1)!!\,(n+k)}{\sqrt{2(2k+1)}}\binom{n+k-1}{n-k-1}\|x\|_2 + B_{n,k}\|x^{(n)}\|_r$$

с неуменьшаемой константой при $\|x\|_2$ и некоторой не зависящей от x константой $B_{n,k}$.

В случае произвольного $q \in [1, \infty]$ и $p = \infty$, как показал В. Д. Боянов [20], точная константа $M^*_{n,1}(q, \infty)$ в неравенстве (5) равна $\|T'_{n-1}\|_q$. Поэтому справедливо такое следствие.

***Следствие* 4.** *Для любых $q, r \in [1, \infty]$ и любой функции $x \in L^n_r(-1,1)$ справедливо неравенство*

$$\|x'\|_q \le \|T'_{n-1}\|_q\,\|x\|_\infty + B_n\|x^{(n)}\|_r,$$

в котором константа $\|T'_{n-1}\|_q$ не уменьшаема (при любом фиксированном n).

Используя другие известные результаты о точных постоянных в неравенствах типа Маркова–Никольского (см., например, [15, 16]), можно легко продолжить список конкретных следствий из теоремы 2, в том числе и для норм в некоторых весовых пространствах L_p.

4. Неравенства для значений промежуточных производных в фиксированной точке. Неравенства типа Бесова. Сначала покажем, что следствие 1 из теоремы 2 можно уточнить (ограничимся случаем $k = 1$). Используя вместе с неравенством Маркова следующее неравенство Бернштейна (см., например, [15, с. 147]): для любого $P_n \in \mathcal{P}_n$ при любом фиксированном $t \in (-1, 1)$,

$$|P_n'(t)| \leq \frac{n\|P_n\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{21}$$

приходим к оценке

$$|P_n'(t)| \leq \min\left\{\|T_n'\|_\infty, \frac{n}{\sqrt{1-t^2}}\right\}\|P_n\|_\infty. \tag{22}$$

Полагая в теореме 1

$$X = C[-1, 1], \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_\infty, \qquad Y = \mathbb{R}, \quad \|\cdot\|_Y = |\cdot|,$$

$$Tx = x'(t), \quad F(x) = \|x^{(n)}\|_r, \quad r \in [1, \infty],$$

видим, что условие 1 этой теоремы выполнено ввиду (22). Условие 2 также выполнено, поскольку аналогично доказательству теоремы 1 с помощью формулы Тейлора с остатком в интегральной форме для $x \in L_r^n(-1, 1)$ может быть получена оценка

$$\inf_{y \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\{\min\left\{\|T_{n-1}'\|_\infty, \frac{n-1}{\sqrt{1-t^2}}\right\}\|x-y\|_\infty + \|x'-y'\|_\infty\right\} \leq$$

$$\leq \inf_{y \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\{(n-1)^2\|x-y\|_\infty + \|x'-y'\|_\infty\right\} \leq B_{n,1}\|x^{(n)}\|_r,$$

где для $B_{n,1}$ справедлива оценка

$$B_{n,1} \leq \frac{2^{n+1}(n-1)}{(n-2)!} + \frac{2^n}{(n-2)!}. \tag{23}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $n \geq 2$, $t \in (-1, 1)$ *фиксировано. Тогда для любой функции* $x \in L_r^n(-1, 1)$ *справедливо неравенство*

$$|x'(t)| \leq \min\left\{(n-1)^2, \frac{n-1}{\sqrt{1-t^2}}\right\}\|x\|_\infty + B_{n,1}\|x^{(n)}\|_r,$$

где для $B_{n,1}$ *справедлива оценка* (23).

Теорема 2, следствия 1–4 из нее и теорема 3 получены с помощью простейших фактов об оценках совместного приближения, вытекающих из формулы Тейлора. Сейчас мы приведем некоторые неравенства, которые устанавливаются с помощью более глубоких результатов по совместному приближению алгебраическими полиномами функции и ее производных.

Пусть

$$x \in C[-1, 1], \qquad \Delta_h^1 x(t) = x(t+h/2) - x(t-h/2), \qquad \Delta_h^l x(t) = \Delta_h^1(\Delta_h^{l-1} x(t))$$

(как обычно, будем считать, что $\Delta_h^l x(t) = 0$, если хотя бы одна из точек $t \pm \pm lh/2$ не принадлежит $[-1, 1]$). Пусть также $\varphi(t) = \sqrt{1-t^2}$ и

$$\rho_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \varphi(t)\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-t^2}.$$

При $0 \le \lambda \le 1$ положим [21]

$$\omega^l_{\varphi^\lambda}(x, t) = \sup_{0<h\le t} \sup_{u\in[-1,1]} |\Delta^l_{h\varphi^\lambda(u)} x(u)|.$$

Очевидно, что при $\lambda = 0$ получаем обычный модуль непрерывности $\omega^l(x, t)$ l-го порядка функции x (см., например, [22, с. 160]).

Нашей целью будет уточнение одного неравенства О. В. Бесова [23] (см. также [24, с. 35]). Формулировке результатов предпошлем необходимые вспомогательные факты.

Положим (для $n, s, k \in \mathbb{N}$)

$$M(n, s, k) = \sup_{\substack{P_n \in \mathcal{P}_n \\ P_n \not\equiv 0}} \frac{\|\rho_n^{-s+k} P_n^{(k)}\|_\infty}{\|\rho_n^{-s} P_n\|_\infty}. \tag{24}$$

В силу известного неравенства В. К. Дзядыка (см., например, [22, с. 262])

$$M(s, k) := \sup_{n\in\mathbb{N}} M(n, s, k) < \infty. \tag{25}$$

Многие известные результаты о совместном равномерном приближении алгебраическими полиномами функции и ее производных содержатся в теореме 1.1 из [25], которую нам удобно представить в следующем виде.

Пусть фиксированы $l, s, k \in \mathbb{Z}$, $s \ge 0$, $l \ge 1$, $0 \le \lambda < 1$. Тогда для любой функции $x \in C^s[-1, 1]$ при любом $n \ge s + l - 1$ существует $P_n \in \mathcal{P}_n$ такой, что при всех $0 \le k \le s$ справедливо неравенство

$$\|\rho_n^{-s+k}(x^{(k)} - P_n^{(k)})\|_\infty \le B\,\omega^l_{\varphi^\lambda}\left(x^{(s)}, \frac{1}{n}\right) \tag{26}$$

с некоторой константой B, не зависящей от x, n и k.

Полагая в теореме 1

$$X = Y = C[-1, 1], \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_\infty, \quad H = \mathcal{P}_n,$$

$$Tx = x^{(k)}, \quad F(x) = \omega^l_{\varphi^\lambda}\left(x^{(s)}, \frac{1}{n}\right),$$

видим, что с учетом (25) выполнено условие 1 этой теоремы, а с учетом (26) — условие 2 этой теоремы. Кроме того, при $n = s + l - 1$ для любого $P_n \in \mathcal{P}_n$ будет

$$F(P_n) = \omega^l_{\varphi^\lambda}\left(x^{(s)}, \frac{1}{n}\right) = 0,$$

т. е. дополнительное условие теоремы 1 также выполнено. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Для любых $l, s, k, n \in \mathbb{N}$, $k \le s$, $n \ge s + l - 1$, любого $0 \le \lambda \le 1$ и любой s раз непрерывно дифференцируемой на $[-1, 1]$ функции x справедливо неравенство*

$$\|\rho_n^{-s+k} x^{(k)}\|_\infty \le M(n, s, k)\|\rho_n^{-s} x\|_\infty + B\,\omega^l_{\varphi^\lambda}\left(x^{(s)}, \frac{1}{n}\right), \tag{27}$$

где константы $M(n, s, k)$ определены в (24) и в силу (25) равномерно по n ограничены числом $M(s, k)$, а $B = B(k, s, l)$ — некоторая константа, не зависящая от x и n.

При фиксированных s, l, k и $n=s+l-1$ константа $M(n, s, k)$ в (27) неулучшаема, т. е. для рассматриваемых X, Y, T и F

$$A^*(X, Y, T, F) = M(n, s, k).$$

1. *Landau E.* Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Functionen // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43–49.
2. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivées // C. R. Soc. math. France. – 1914. – **41**. – P. 68–72.
3. *Габушин В. Н.* Неравенства для норм функции и ее производных в метриках Lp // Мат. заметки. – 1967. – № 3. – С. 291–298.
4. *Karlin S.* Oscillatory perfect splines and related extremal problems // Studies in spline functions and approxim. theory / Eds. S. Karlin et all. – New York: Acad. Press, 1976. – P. 371–460.
5. *Chui C. K., Smith P. W.* A note on Landau's problem for bounded intervals // Amer. Math. Monthly. – 1975. – **82**. – P. 927–929.
6. *Pinkus A.* Some extremal properties of perfect splines and the pointwise Landau problem on the finite interval // J. Approx. Theory. – 1978. – **23**. – P. 37–64.
7. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **156**. – С. 22–29.
8. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. II // Там же. – 1986. – **173**. – С. 38–49.
9. *Sato M.* The Landau inequality for bounded intervals with $\|f^{(3)}\|$ finite // J. Approx. Theory. – 1982. – **34**. – P. 159–166.
10. *Звягинцев А. И.* Неравенства Колмогорова для $n=4$ // Латв. мат. ежегодник. – 1982. – **26**. – С. 165–175.
11. *Шадрин А. Ю.* О точных постоянных в неравенствах между L_∞-нормами производных на конечном отрезке // Докл. РАН. – 1992. – **326**, № 1. – С. 50–53.
12. *Shadrin A. Yu.* To the Landau–Kolmogorov problem on a finite interval // Open problems in approxim. theory. Proc. of Int. Conference Voneshta Voda (June 18–24, 1993). – Singapore: Science Culture Technology Publ., 1993. – P. 192–204.
13. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 105–107.
14. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О неравенствах для производных на отрезке // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики. Тез. допов. міжн. конф. – Дніпропетровськ, 1993. – С. 12.
15. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
16. *Milovanovič G. V.* Extremal problems for polynomials: old and new results // Open problems in approxim. theory. Proc. of Int. Conference Voneshta Voda (June 18–24, 1993). – Singapore: Science Culture Technology Publ., 1993. – P. 138–155.
17. *Schaeffer A. C., Duffin R. J.* On some inequalities of S. Bernstein and W. Markoff vor derivatives of polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. – 1938. – **44**. – P. 289–297.
18. *Конягин С. В.* О неравенстве В. А. Маркова для многочленов в метрике L_1 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 117–125.
19. *Labelle G.* Concerning polynomials on the unit interval // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **20**. – P. 321–326.
20. *Bojanov B. D.* An extension of the Markov inequality // J. Approx. Theory. – 1982. – **35**. – P. 181–190.
21. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of smoothness. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – 300 p.
22. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
23. *Бесов О. В.* Продолжение функций за пределы области с сохранением дифференциально-разностных свойств в L_p // Мат. сб. – 1965. – **66**, № 1. – С. 80–96.
24. *Шевчук И. А.* Приближения многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 223 с.
25. *Ditzian Z., Jiang D., Leviatan D.* Simultaneous polynomial approximation // SIAM J. Math. Anal. – 1993. – **24**, № 6. – P. 1652–1661.

Получено 19.07.95