УДК 517. 5

В. В. Волчков, канд. физ.-мат. наук (Донец. ун-т)

О ТОЧНЫХ КОНСТАНТАХ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ L^2

An exact dependence of constants in inequalities of Jackson type on the rate of convergence of Diophantine approximations for certain numbers is obtained.

Одержано точну залежність сталих в нерівностях джексонівського типу від швидкості діофантових наближень деяких чисел.

1. Введение. Пусть $r > 0$, L_2^r — множество всех 2π-периодических функций, у которых $f^{(r)} \in L^2(0, 2\pi)$, где $f^{(r)}$— производная порядка r в смысле Вейля. Обозначим $\omega(f, h) = \sup_{|t|<h} \| f(\cdot + t) - f(\cdot) \|$, где $\| (\cdot) \|$ – норма в $L^2(0, 2\pi)$. Пусть $E_n(f)$ — наилучшее приближение f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в метрике $L^2(0, 2\pi)$. Неравенства вида

$$E_{n-1}(f) \le \frac{\kappa}{n^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\delta}{n}\right) \tag{1}$$

называют неравенствами типа Джексона, а наименьшую константу $\kappa = \kappa_{n,r}(\delta)$ в (1) — точной константой в неравенстве типа Джексона. Величины $\kappa_{n,r}(\delta)$ изучались во многих работах (см. работы [1–3] и приведенную в них библиографию). В [1, 2] получены нижние оценки для $\kappa_{n,r}(\delta)$ и построены (в терминах диофантовых приближений) примеры, когда эти оценки достигаются.

В данной работе получены точные зависимости величин $\kappa_{n,r}(\delta)$ от скорости диофантовых приближений некоторых чисел, связанных с n, r, δ. Кроме того, доказывается, что нижняя оценка для $\kappa_{n,r}(\delta)$, данная в [1], достигается почти всюду.

2. Основные результаты. Следуя работе [2], обозначим $\xi = \xi_r = (2/\pi) \times \times \arcsin(1/2^{1+r})$. Пусть еще $\alpha = \delta/2\pi n$, $\beta = (1-\xi)/2n$, $\gamma = (1+\xi)/2$.

Теорема 1. *Пусть* $\delta \in (0, \pi]$, $r \ge 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если для всех рациональных дробей* p/q *при* $q \ge n$ *выполнено* $|\alpha - p/q| \ge (1/(\pi q)) \arcsin((n/q)^r \sin(\delta/2))$, *то*

$$\kappa_{n,r}(\delta) = 1/(2\sin(\delta/2)); \tag{2}$$

2) *если существует рациональная дробь* p/q *такая, что* $q \ge n$ *и* $|\alpha - p/q| < (1/(\pi q)) \arcsin((n/q)^r \sin(\delta/2))$, *то*

$$\kappa_{n,r}(\delta) > 1/(2\sin(\delta/2)); \tag{3}$$

3) *при любом натуральном* n *для почти всех (по мере Лебега)* $\delta \in (0, \pi]$ *существует* $R = R(n, \delta)$ *такое, что при всех* $r > R$ *выполнено* (2).

Теорема 2. *Пусть* $r > 0$, $\pi(1-\xi) \le \delta \le \pi(1+\xi)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если для всех рациональных дробей* p/q *при* $q \ge n$ *выполнено* $|\beta - p/q| \ge (1/(\pi q)) \arcsin((n/q)^r \sqrt{1-4^{-r-1}})$, *то*

$$\kappa_{n,r}(\delta) = (1-4^{-r-1})^{-1/2}/2; \tag{4}$$

2) *если существует рациональная дробь* p/q *такая, что* $q \ge n$ *и* $|\beta - p/q| < (1/(\pi q)) \arcsin((n/q)^r \sqrt{1-4^{-r-1}})$, *то*

$$\kappa_{n,r}(\delta) > (1-4^{-r-1})^{-1/2}/2. \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть* $r > 0$, $\delta \ge \pi(1+\xi)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если существует рациональная дробь* p/q *такая, что* $|\gamma - p/q| < (1/(\pi q)) \arcsin(q^{-r} \sqrt{1-4^{-r-1}})$, *то выполнено* (5);

2) *если при* $n = 1$ *для всех рациональных дробей* p/q $|\gamma - p/q| \ge (1/(\pi q)) \arcsin(q^{-r} \sqrt{1-4^{-r-1}})$, *то выполнено* (4).

3. Доказательства. Прежде всего отметим, что если $f \in L_2^r$ и

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \varphi_k)$$

— разложение f в ряд Фурье, то

$$\kappa_{n,r}(\delta) = \sup_{f \in L_2^r} \frac{n^r \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right)^{1/2}}{2 \sup\limits_{|t| \le \delta/n} \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \sin^2(kt/2)\right)^{1/2}}. \tag{6}$$

(Эта формула легко следует из определения $\kappa_{n,r}(\delta)$, при этом можно считать $\rho_k = 0$ при $k \le n-1$.)

Доказательство *теоремы* 1. Из (6) имеем

$$\kappa_{n,r}(\delta) = \sup_{f \in L_2^r} \frac{n^r \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right)^{1/2}}{2 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 k^{2r} \sin^2(k\delta/2n)\right)^{1/2}}. \tag{7}$$

Пусть $|\alpha - p/q| \ge (1/(2\pi)) \arcsin((n/q)^r \sin(\delta/2))$. Для каждого q выберем $p = p(q)$ такое, что $|\alpha - p/q| \le 1/(2q)$. Тогда

$$\arcsin((n/q)^r \sin(\delta/2)) \le \pi q |\alpha - p/q| \le \pi/2.$$

Следовательно, $(n/q)^{2r} \sin^2(\delta/2) \le \sin^2((q\delta)/(2n))$. Отсюда и из (7) имеем $\kappa_{n,r}(\delta) \le 1/(2\sin(\delta/2))$. Учитывая противоположное неравенство [1], получаем (2).

Пусть теперь $|\alpha - p/q| < (1/(\pi q)) \arcsin((n/q)^r \sin(\delta/2))$ при некоторых целых p, q, $q \ge n$. Как и выше, заключаем, что $\sin^2((q\delta)/(2n)) < (n/q)^{2r} \sin^2(\delta/2)$. Тогда $q > n$ и существует $\tau \in (0, \delta)$ такое, что при всех $\zeta \in [\delta - \tau, \delta + \tau]$ выполнено

$$\sin^2(q\zeta/2n) < (n/q)^{2r} \sin^2(\delta/2). \tag{8}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(x) = \cos nx + \sqrt{\varepsilon} \cos qx$. Поскольку $q > n$, то $E_{n-1}^2(f_\varepsilon) = \|f_\varepsilon\|^2 = 1 + \varepsilon$. Пусть теперь ε — настолько малое, что максимум функции $\varphi(t) = \sin^2(t/2) + \varepsilon (q/n)^{2r} \sin^2(qt/(2n))$ на отрезке $[0, \delta]$ достигается в некоторой точке отрезка $[\delta - \tau, \delta]$. Из (8) получаем, что для всех $t \in (0, \delta)$

$\varphi(t) < (1+\varepsilon)\sin^2(\delta/2)$. Из этой оценки, полученного выражения для $E_{n-1}(f_\varepsilon)$ и (6) имеем

$$\kappa_{n,r}(\delta) \ge \frac{E_{n-1}(f_\varepsilon)}{2\max\limits_{t\in[0,\delta]}\sqrt{\varphi(t)}} > \frac{1}{2\sin(\delta/2)},$$

откуда следует второе утверждение. Докажем третье утверждение теоремы 1. Из (7) легко получить (см. также [1]), что

$$\kappa_{n,r}(\delta) \le B_{n,r}(\delta) = \frac{1}{2}\left(\inf_{k\ge n}\left(\frac{k}{n}\right)^r\left|\sin\frac{k\delta}{2n}\right|\right)^{-1}. \tag{9}$$

Пусть $\eta > 0$. Тогда почти для всех $\delta\in R^1$ и всех целых p, q $(q\ne 0)$

$$\left|\frac{\delta}{\pi}-\frac{p}{q}\right| > cq^{-2}\ln^{-1-\eta} q, \tag{10}$$

где $c>0$ и зависит только от δ [4, с. 86]. Пусть r — настолько большое, что

$$n^{r+1}(n+1)^{2+\eta-r} < c\,\frac{1}{2\sin(\delta/2)}. \tag{11}$$

Докажем, что при δ и r с условиями (10), (11) нижняя грань в (9) достигается при $k=n$. Пусть p — ближайшее целое к числу $k\delta/2\pi n$. Тогда $|\sin(k\delta/(2n))| \ge (2/\pi)|k\delta/(2n)-p\pi| \ge c(kn)^{-1}(\ln k)^{-1-\eta}$. Поэтому для всех $k\ge n+1$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^r\left|\sin\frac{k\delta}{2n}\right|\right)^{-1} \le \frac{1}{2}\left(\frac{n}{k}\right)^r nk\frac{(\ln k)^{1+\eta}}{c} \le$$

$$\frac{1}{c}n^{r+1}k^{2+\eta-r} \le \frac{1}{c}n^{r+1}(n+1)^{2+\eta-r} < \frac{1}{2\sin(\delta/2)};$$

и при $k=n$ справедливо равенство. Отсюда и из (9) следует, что $\kappa_{n,r}(\delta) \le$ $\le 1/(2\sin(\delta/2))$. С другой стороны,

$$\kappa_{n,r}(\delta) \le \frac{n^2E_{n-1}(\cos n(\cdot))}{\omega((\cos(\cdot)n^{(r)},\delta)} = \frac{1}{2\sin(\delta/2)}, \tag{12}$$

что и завершает доказательство (2).

***Доказательство** теорем* 2, 3. Равенство (4) в обеих теоремах доказывается так же, как равенство (2) в теореме 1. Следует лишь использовать неравенство $\kappa_{n,r}(\delta) \ge (1/2)(1-4^{-r-1})^{1/2}$, полученное в [2], вместо оценки (12).

Для доказательства утверждения 2 теоремы 2 и утверждения 1 в теореме 3 достаточно рассмотреть функцию

$$f_\varepsilon(x) = \cos nx + (4^{r+1}-2)^{1/2}\cos 2nx + \sqrt{\varepsilon}((4^{r+1}-1)/(4^{r+1}-2))^{1/2}\cos qx$$

и повторить рассуждения из доказательства оценки (3). Отметим, что функция f_ε ранее использовалась в [2] для доказательства оценки (5) при других ограничениях.

1. *Юдин В. А.* Диофантовы приближения в экстремальных задачах L^2 // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 1. – С. 54–57.
2. *Лигун А. А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L^2 // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 6. – С. 757–769.
3. *Юдин В. А.* К теоремам Джексона в L^2 // Там же. – 1987.– **41**, № 1. – С. 43–47.
4. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.

Получено 30.03.93