УДК 517.95

Е. Л. Цветков, канд. физ.-мат. наук (Моск. авиацион. ин-т)

О РЕГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Unlike the case of elliptic differential equations, generalized solutions of elliptic difference–differential equations may be not smooth in a region Q but remain smooth in certain subregions $Q_r \subset Q$. Conditions are considered which are necessary and sufficient for solutions of the third boundary-value problem to preserve smoothness on the boundary of adjacent subregions Q_r.

На відміну від еліптичних диференціальних рівнянь гладкість узагальнених розв'язків еліптичних диференціально-різницевих рівнянь може порушуватися в ділянці Q і зберігатися лише в деяких підділянках $Q_r \subset Q$. Розглядаються умови збереження гладкості узагальнених розв'язків третьої крайової задачі на межі суміжних підділянок Q_r.

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{k,j=1}^{n} (R_{kjQ}\, u_{x_j})_{x_k} = f(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

с краевым условием

$$\sum_{k,j=1}^{n} R_{kjQ}\, u_{x_j} \cos(\nu, x_k) + \sigma(x) u = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь $Q \subset R^r$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^\infty$, $f(x) \in L_2(Q)$, ν — внешняя нормаль к Γ, $0 \not\equiv \sigma(x) \in C(\Gamma)$ — вещественнозначная неотрицательная функция, разностные операторы $R_{kjQ}: L_2(Q) \to L_2(Q)$ вида $R_{kjQ} = P_Q R_{kj} I_Q$, где $I_Q: L_2(Q) \to L_2(R^n)$ — оператор продолжения нулем функции из $L_2(Q)$ в $R^n \setminus Q$, $P_Q: L_2(R^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(R^n)$ на Q, операторы $R_{kj}: L_2(R^n) \to L_2(R^n)$ действуют по формуле

$$R_{kj} u(x) = \sum_{h \in T} a_{kjh}\, u(x-h),$$

где T — конечное множество векторов с целочисленными координатами, a_{kjh} — вещественные числа, $k, j = 1, \ldots, n$.

Определение 1. *Дифференциально-разностное уравнение* (1) *будем называть эллиптическим, если оператор* $\mathcal{R}_Q + \mathcal{R}_Q^*$ *положительно определен, где оператор*

$$\mathcal{R}_Q = \left\| \begin{matrix} R_{11Q} & \ldots & R_{1nQ} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n1Q} & \ldots & R_{nnQ} \end{matrix} \right\|$$

действует в $L_2^n(Q)$ *по правилу умножения матрицы на столбец,* $L_2^n(Q) = \prod_p L_2(Q)$, $p = 1, \ldots, n$. *Задачу* (1), (2) *при этом будем называть третьей краевой задачей для уравнения* (1).

Первая и вторая краевые задачи исследовались в работах [1, 2], где показано, что, как и в случае дифференциальных уравнений с отклонениями аргументов для функций одной переменной [3], гладкость их решений может нарушаться в области Q и сохраняется лишь в некоторых подобластях $Q_r \subset Q$ $\left(\bigcup_r \overline{Q}_r = \overline{Q}\right)$. Это явление обусловлено наличием сдвигов аргументов в старших членах уравнения, когда сдвиги отображают точки границы Γ области Q внутрь Q. Как и в [1, 2], в настоящей работе основным является вопрос о гладкости обобщенных решений задачи на границе соседних подобластей Q_r. Наличие младшего члена в краевом условии играет здесь принципиальную роль. Отметим, что к краевым задачам для эллиптических дифференциально-разностных уравнений прибодят эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями [4], а также некоторые задачи теории многослойных оболочек и пластин [5].

Обозначим через $H^m(Q)$ пространство Соболева функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные из $L_2(Q)$ вплоть до порядка m.

Всюду в дальнейшем уравнение (1) считаем эллиптическим.

2. Существование и единственность обобщенных решений. В $H^1(Q) \times \times H^1(Q)$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$a(u, v) = \sum_{k,j} (R_{kjQ}\, u_{x_j}, v_{x_k})_{L_2(Q)} + (\sigma(x) u, v)_{L_2(\Gamma)}.$$

Лемма 1. *Существуют константы $c, c_1 > 0$ такие, что*

$$|a(u, v)| \le c \|u\|_{H^1(Q)} \|v\|_{H^1(Q)}, \quad \operatorname{Re} a(u, u) \ge c_1 \|u\|^2_{H^1(Q)} \tag{3}$$

для всех $u, v \in H^1(Q)$.

Доказательство первого неравенства в (3) вытекает из неравенства Коши – Буняковского, ограниченности операторов $R_{kjQ}: L_2(Q) \to L_2(Q)$ и теоремы 1 [6, с.149]. В силу определения 1 оператор $\mathcal{R}_Q + \mathcal{R}_Q^*$ положительно определен в $L_2^n(Q)$. Следовательно, при некотором $c_2 > 0$

$$\operatorname{Re} a(u, u) \ge c_2 \sum_j \left\| u_{x_j} \right\|^2_{L_2(Q)} + (\sigma(x) u, u)_{L_2(\Gamma)}.$$

Отсюда и из теоремы об эквивалентных нормах в $H^1(Q)$ [4, с.156] следует второе неравенство в (3).

Введем оператор $\mathcal{L}: L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(\mathcal{L}) = \{u \in H^1(Q) : \mathcal{L}u \in L_2(Q)\}$ такой, что для $u \in D(\mathcal{L})$ и всех $v \in H^1(Q)$ $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = a(u, v)$.

Определение 2. *Функцию u будем называть обобщенным решением краевой задачи* (1), (2), *если $u \in D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}u = f$.*

Определение 3. *Функцию u будем называть обобщенным решением краевой задачи* (1), (2), *если $u \in H^1(Q)$ и для всех $v \in H^1(Q)$*

$$a(u, v) = (f, v)_{L_2(Q)}. \tag{4}$$

Очевидно, определения 1 и 2 эквивалентны.

Из теоремы 9.1 [7, с. 230] и леммы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Обобщенное решение u краевой задачи* (1), (2) *существует и единственно для любой $f \in L_2(Q)$. Для него выполняется неравенство $\|u\|_{H^1(Q)} \le c_3 \|f\|_{L_2(Q)}$, $c_3 > 0$.*

Приведем необходимые и достаточные условия положительной определенности оператора $\mathcal{R}_Q + \mathcal{R}_Q^*$ в алгебраической форме. Рассмотрим множество

$\Gamma_* = Q \cap \left(\bigcup_{h\in M}(\Gamma+h)\right)$, где M — аддитивная абелева группа, порожденная множеством T. Обозначим через Q_r открытые связные компоненты множества $Q\setminus\Gamma_*$. Очевидно, $\bigcup_r Q_r = Q\setminus\Gamma_*$.

***Определение* 4.** *Подобласти Q_{r_1} и Q_{r_2} множества $\{Q_r\}$ будем называть эквивалентными, если существует вектор $h\in M$ такой, что $Q_{r_1} = Q_{r_2} + h$.*

Введенное отношение эквивалентности разбивает множество $\{Q_r\}$ на классы: подобласти Q_{r_1} и Q_{r_2} принадлежат одному и тому же классу, если они эквивалентны в смысле определения 4. Легко видеть, что число классов не более чем счетно, а количество элементов в каждом классе конечно. Пусть индекс $r=(s,l)$, где $s=1,\,2,\,\dots$ — номер класса, а $l=1,\,\dots,N(s)$ — количество элементов в данном классе.

Обозначим через $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ пространство функций из $L_2(Q)$, равных нулю в $Q\setminus\bigcup_{l=1}^{N} Q_{sl}$. Очевидно, $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ является инвариантным подпространством операторов R_{kjQ}. Введем изометрический изоморфизм U_s: $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right) \to L_2^N(Q_{s1})$ гильбертовых пространств по формуле $(U_s u)_l(x) = u(x+h_{sl})$, $x\in Q_{s1}$, где $l=1,\,\dots,N(s)$, векторы $h_{sl}\in M$ таковы, что $Q_{sl} = Q_{s1}+h_{sl}$ $(h_{s1}=0)$. Тогда, как следует из [1], оператор

$$R_{kjs} = U_s R_{kjQ} U_s^{-1} \tag{5}$$

является оператором умножения на квадратную матрицу порядка $N(s)\times N(s)$ (которую мы также обозначим через R_{kjs}), элементы $r_{lm}=r_{lm}(k,j,s)$, которой вычисляются по формуле

$$r_{lm} = \begin{cases} a_{kjh}, & \text{если } h=h_{sl}-h_{sm}\in T, \\ 0, & \text{если } h_{sl}-h_{sm}\notin T. \end{cases} \tag{6}$$

При этом в силу (6) число различных матриц R_{kjs} конечно, а пространство $L_2(Q)$ можно представить в виде ортогональной суммы подпространств $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$. Отсюда вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Оператор $\mathcal{R}_Q + \mathcal{R}_Q^*$ положительно определен тогда и только тогда, когда матрицы $\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_s^*$, $s=1,\,2,\,\dots$, положительно определены, где блочные матрицы $\mathcal{R}_s$ порядка $nN(s)\times nN(s)$ вида*

$$\mathcal{R}_s = \begin{Vmatrix} R_{11s} & \dots & R_{1ns} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{n1s} & \dots & R_{nns} \end{Vmatrix}.$$

3. Гладкость обобщенных решений в подобластях. Гладкость обобщенного решения u задачи (1), (2) может нарушаться в Q на множестве Γ_*. Это вытекает из примера 2 [2]. Вообще говоря, $u\notin H^2_{\mathrm{loc}}\,N(Q)$. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть u — обобщенное решение краевой задачи* (1), (2) *и $f\in L_2(Q)\cap H^{\mathrm{m}}_{\mathrm{loc}}(Q_{sl})$, $s=1,\,2,\,\dots;\ l=1,\,\dots,N(s)$. Тогда $u\in H^{\mathrm{m}+2}_{\mathrm{loc}}(Q_{sl})$.*

Следствие. *Пусть u — обобщенное решение краевой задачи* (1), (2). *Тогда почти всюду в Q_{sl}, $s=1,\,2,\,\dots;\ l=1,\,\dots,N(s)$, u удовлетворяет уравнению* (1).

Доказательства теоремы 2 и ее следствия содержатся в работах [1, с. 347; 2, с. 1769].

Рассмотрим вопрос о гладкости u вблизи границ Γ_{sl} подобластей Q_{sl}. Введем множество $\mathcal{K}$ по формуле

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1,\, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\Gamma + h_1) \cap \left[\overline{(\Gamma + h_2) \setminus (\Gamma + h_1)} \right] \right\}.$$

Вообще говоря, $\operatorname{mes} \mathcal{K} \neq 0$ [1].

Лемма 3. *Пусть точка $y \in \Gamma_* \setminus \mathcal{K}$. Тогда существует $a > 0$ такое, что $S_a(y) \cap \Gamma_* \in C^\infty$. Множество $Q \setminus \Gamma_*$ содержит две и только две подобласти Q_{pi} и Q_{qj} такие, что $y \in (\Gamma_{pi} \cap \Gamma_{qj}) \setminus \mathcal{K}$. При этом $S_a(y) \subset (Q_{pi} \cup \cup Q_{qj}) \cup (\Gamma_{pi} \cap \Gamma_{qj})$, где $S_a(y)$ — шар радиуса a с центром в точке y.*

Доказательство леммы 3 немедленно следует из лемм 4.3 и 4.4 [1].

Теорема 3. *Пусть u — обобщенное решение краевой задачи* (1), (2) *и $\sigma(x) \in C^1(\Gamma)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ $u \in H^2(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}_\varepsilon)$, $s = 1, 2, \ldots ;$ $l = 1, \ldots$ $\ldots, N(s)$, где $\mathcal{K}_\varepsilon = \{x \in R^n : \rho(x, \mathcal{K}) \le \varepsilon\}$.*

Доказательство. *В силу теоремы 2 достаточно показать, что для любой фиксированной точки $y \in \Gamma_{pi} \setminus \mathcal{K}$ существует шар $S_\delta(u)$ такой, что $u \in$ $\in H^2(Q_{pi} \setminus S_\delta(y))$.*

I. Пусть точка $y \in \Gamma_* \cap (\Gamma_{pi} \setminus \mathcal{K})$, а число $a > 0$ таково, что выполнены утверждения леммы 3. Для простоты будем предполагать, что $y \in (\Gamma_{p1} \cap \cap \Gamma_{q1}) \setminus \mathcal{K}$, а множество $S_a(y) \cap \Gamma_{p1}$ имеет вид $x_n = 0$ (если это не так, то можно применить известный метод „спрямления" границы [6, с. 242] введением новых переменных).

Рассмотрим точки

$$x^{sl} = y + h_{sl} \in \Gamma_{sl} \setminus \mathcal{K}, \tag{7}$$

где $Q_{sl} = Q_{s1} + h_{sl}$, $s = p, q$; $l = 1, \ldots, N(s)$; $h_{s1} = 0$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что

$$x^{pl} = x^{ql} \in \Gamma_* \setminus \mathcal{K}, \quad l = 1, \ldots, N_0, \tag{8}$$

$$x^{sl} \in \Gamma \setminus \mathcal{K}, \quad s = p, q; \quad l = N_0 + 1, \ldots, N(s). \tag{9}$$

В противном случае можно перенумеровать подобласти p и q классов.

Введем пространство H^1_δ функций из $H^1(Q)$, равных нулю вне $\Omega_\delta = = \bigcup_{s,l} S_\delta(x^{sl})$. Здесь объединение проводится по всем $s = p, q$ и $l = 1, \ldots,$ $N(s)$; $0 < 4\delta < a$. Следуя [1], построим функцию $\xi(x) \in C^\infty(R^n)$ такую, что $0 \le \xi(x) \le 1$,

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_\delta, \\ 0, & x \in R^n \setminus \Omega_\delta. \end{cases}$$

В равенстве (4) положим $v = \xi v_0$, где $v_0 \in H^1_{4\delta}$. Так как операторы R_{kjQ} коммутируют с оператором умножения на функции $\xi(x), \xi_{x_k}(x)$, находим, что

$$a(u, \xi v_0) = a(\xi u, v_0) + \sum_{k,j} (R_{kjQ} u_{x_j}, \xi_{x_k} v_0)_{L_2(Q)} -$$

$$- \sum_{k,j} (R_{kjQ}\,\xi_{x_j} u, v_{0x_k})_{L_2(Q)},$$

и следовательно,

$$a(w, v_0) = (F, v_0)_{L_2(Q)} + \sum_{k,j} (R_{kjQ}\,\xi_{x_j} u, v_{0x_k})_{L_2(Q)}, \tag{10}$$

где

$$w = \xi u \in H^1_{2\delta}, \quad F = \xi f - \sum_{k,j} \xi_{x_k} R_{kjQ}\, u_{x_j} \in L_2(Q).$$

В формуле (10) положим $v_0 = \delta^r_{-t} v_1$, где $1 \le r \le n-1$, $0 < t < \delta$, функция $v_1 \in H^1_{3\delta}$, а оператор δ^r_{-t} определен по формуле

$$(\delta^r_{\pm t} v_1)(x) = \big((v_1)^r_{\pm t} - v_1\big) / (\pm t), \qquad x \in \Omega_{3\delta},$$

где $(v_1)^r_{\pm t} = v_1(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r \pm t, x_{r+1}, \ldots, x_n)$.

По построению, $v_0 \in H^1_{4\delta}$. Заметим, что оператор $-\delta^r_t$ является формально сопряженным к оператору δ^r_{-t} в $L_2(Q)$ $(L_2(\Gamma))$, а $\delta^r_t(\delta(x)w(x)) = \sigma(x)\delta^r_t w(x) + w^r_t(x)\delta^r_t \sigma(x)$, $x \in \Gamma$. Тогда из формулы (10) получим

$$a(\delta^r_t w, v_1) = a_1(v_1) + a_2(v_1) + a_3(v_1), \tag{11}$$

где

$$a_1(v_1) = -(F, \delta^r_{-t} v_1)_{L_2(Q)}, \quad a_2(v_1) = \sum_{k,j} (\delta^r_t R_{kjQ}(\xi_{x_j} u), v_{1x_k})_{L_2(Q)},$$

$$a_3(v_1) = -(w^r_t(x)\delta^r_t \sigma(x), v_1)_{L_2(\Gamma)},$$

Для $a_i(v_1)$ выполняются следующие оценки. В силу теоремы 3 [6, с. 127]

$$\begin{gathered} |a_1(v_1)| \le \|F\|_{L_2(Q)} \|v_{1x_r}\|_{L_2(Q)} \le c_4(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{H^1(Q)}) \|v_1\|_{H^1(Q)}, \\ |a_2(v_1)| \le c_5 \|u\|_{H^1(Q)} \|v_1\|_{H^1(Q)}. \end{gathered} \tag{12}$$

В силу предположения $\sigma(x) \in C^1(\Gamma)$ и теоремы 1 [6, с. 149]

$$|a_3(v_1)| \le c_6 \|w\|_{L_2(\Gamma)} \|v_1\|_{L_2(\Gamma)} \le c_7 \|w\|_{H^1(Q)} \|v_1\|_{H^1(Q)}. \tag{13}$$

Тогда из (11) – (13) имеем

$$|a(\delta^r_t w, v_1)| \le c_8(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{H^1(Q)}) \|v_1\|_{H^1(Q)}, \tag{14}$$

где константы $c_4, \ldots, c_8 > 0$. В (14) положим $v_1 = \delta^r_t w$. Очевидно, $v_1 \in H^1_{3\delta}$. В силу леммы 1 $|a(\delta^r_t w, \delta^r_t w)| \ge c_1 \|\delta^r_t w\|^2_{H^1(Q)}$ и, в силу (14),

$$\|\delta^r_t w\|^2_{H^1(Q)} \le \frac{c_8}{c_1} (\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{H^1(Q)}).$$

Вновь используя теорему 3 [6, с. 127], получаем, что $w_{x_j x_r} \in L_2(Q)$, т. е. $u_{x_j x_r} \in L_2(Q_{pl} \cap S_\delta(x^{pl}))$, $l = 1, \ldots, N(p)$; $j + r < 2n$.

Докажем теперь, что $u_{x_n x_n} \in L_2(Q_{pl} \cap S_\delta(x^{pl}))$, для любого $l = 1, \ldots, N(p)$. По следствию из теоремы 2 функция

$$(R_{nnQ} u_{x_n})_{x_n} = f(x) - \sum_{k+j<2n} (R_{kjQ} u_{x_j})_{x_k} \in L_2(Q_{pl} \cap S_\delta(x^{pl}))$$

для каждого $l = 1, \ldots, N(p)$. Очевидно, $(R_{nnQ} u_{x_n})_{x_n} = R_{nnQ} u_{x_n x_n}$, $x \in Q_{pl}$. Из определения 1 вытекает, что оператор $R_{nnQ}: L_2(Q) \to L_2(Q)$ имеет ограниченный обратный. Так как $L_2(\bigcup_l Q_{pl})$ — инвариантное подпространство оператора R_{nnQ}, отсюда следует, что $u_{x_n x_n} \in L_2(Q_{pl} \cap S_\delta(x^{pl}))$.

Таким образом, функция $u \in H^2(Q_{pl} \cap S_\delta(x^{pl}))$ для всех $l = 1, \ldots, N(p)$.

II. Пусть точка $y \in \Gamma \cap (\Gamma_{pi} \backslash \mathcal{K})$. Рассмотрим точки

$$y^l = y - h_{pi} + h_{pl} \in \Gamma_{pl} \backslash \mathcal{K}, \quad l = 1, \ldots, N(p).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что при некотором $l = l_1$ точка $y^{l_1} \in \Gamma_* \cap (\Gamma_{pl_1} \backslash \mathcal{K})$. Тогда, повторяя доказательство п. I, получаем, что $u \in H^2(Q_{pi} \cap S_\delta(y))$. Теорема доказана.

Хотя по предположению граница Γ области Q принадлежит классу C^∞, границы Γ_{sl} подобластей Q_{sl}, вообще говоря, не принадлежат C^∞. Гладкость Γ_{sl} может нарушаться на множестве $\mathcal{K}$. Покажем, что, как и в случае первой краевой задачи [1], обобщенное решение краевой задачи (1), (2), вообще говоря, имеет особенности в окрестности множества $\mathcal{K}$.

Пример 1. Рассмотрим третью краевую задачу

$$-\sum_{j=1}^{2} (R_Q u_{x_j})_{x_j} = f(x), \quad x \in Q, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{2} R_Q u_{x_j} \cos(\nu, x_j) + \sigma(x) u = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{16}$$

Здесь область Q — квадрат $(-1/2, 1) \times (0, 3/2)$ со сглаженными углами внутри кругов $S_\delta(m, p)$, $m = -1/2, 1$; $p = 0, 3/2$, $0 < \delta < 1/8$, функция $\sigma(x) \equiv 0$ в $S_{2\delta}(0,0)$ и $S_{2\delta}(1,1)$, а оператор $Ru(x) = 2u(x_1, x_2) + u(x_1 + 1, x_2 + 1) + u(x_1 - 1, x_2 - 1)$.

Очевидно, множество $Q \backslash \Gamma_*$ состоит из двух классов подобластей Q_{sl}: подобласти Q_{11} и Q_{21} совпадают вне кругов $S_\delta(-1/2, 0)$ и $S_\delta(1, 3/2)$ соответственно с квадратами $(-1/2, 0) \times (0, 1/2)$ и $(1/2, 1) \times (1, 3/2)$, а подобласть $Q_{21} = Q \backslash (\overline{Q}_{11} \cup \overline{Q}_{12})$. Множество $\mathcal{K}$ состоит из точек $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1/2, 1/2)$, $(1/2, 3/2)$.

Заметим, что уравнение (15) — эллиптическое в смысле определения 1. Это следует из леммы 2 и положительной определенности матриц

$$\mathcal{R}_1 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}, \qquad \mathcal{R}_2 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Введем функцию

$$u(x) = \begin{cases} 10u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2), & x \in Q_{11}, \\ u_1(x_1 - 1, x_2 - 1) + 10u_2(x_1 - 1, x_2 - 1), & x \in Q_{12}, \\ b(u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1 - 1, x_2 - 1)), & x \in Q_{21}, \end{cases}$$

где функции u_1 и u_2 при переходе к полярным координатам имеют вид

$$u_1(r, \varphi) = \xi(r) r^{\lambda} \cos \lambda \varphi, \quad u_2(r, \varphi) = \xi(r) r^{\lambda} \cos \lambda (\varphi - 3\pi/2),$$

функция $\xi(r) \in C^{\infty}(R^1)$, $0 \le \xi(r) \le 1$, $\xi(r) = 1$ при $0 \le r \le \delta$, $\xi(r) = 0$ при $r \ge 2\delta$, $\lambda\pi = 2 \arccos 2/7$, $b = 99/14$. Имеем

$$R_Q u(x) = \begin{cases} 21u_1(x_1, x_2) + 21u_2(x_1, x_2), & x \in Q_{11}, \\ 12u_1(x_1 - 1, x_2 - 1) + 21u_2(x_1 - 1, x_2 - 1), & x \in Q_{12}, \\ 2b(u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1 - 1, x_2 - 1)), & x \in Q_{21}. \end{cases}$$

Легко проверить, что $u \in H^1(Q)$ и $\mathcal{L}u \in L_2(Q)$ на основании следующих утверждений:

1) $u \in H^1(Q_{sl})$, так как $0 < \lambda < 1$. При этом

$$u|_{x_1 = 0+0} = u|_{x_1 = 0-0}, \quad u|_{x_2 = 1+0} = u|_{x_2 = 1-0},$$

так как $10u_1 + u_2 = bu_1$ $(\varphi = \pi/2)$, $u_1 + 10u_2 = bu_2$ $(\varphi = \pi)$.

2) $\sum_j (R_Q u_{x_j})_{x_j} = R_Q \Delta u \in L_2(Q)$. При этом

$$R_Q u_{x_1}|_{x_1 = 0+0} = R_Q u_{x_1}|_{x_1 = 0-0}, \quad R_Q u_{x_2}|_{x_2 = 1+0} = R_Q u_{x_2}|_{x_2 = 1-0},$$

так как

$$\frac{d}{d\varphi}(21u_1 + 12u_2) = 2b\frac{du_1}{d\varphi} \quad (\varphi = \pi/2),$$

$$\frac{d}{d\varphi}(12u_1 + 21u_2) = 2b\frac{du_2}{d\varphi} \quad (\varphi = \pi).$$

3) Функция u удовлетворяет краевым условиям (16), так как

$$\frac{d}{d\varphi}(21u_1 + 12u_2) = 0 \quad (\varphi = \pi), \qquad \frac{du_1}{d\varphi} = 0 \quad (\varphi = 0),$$

$$\frac{d}{d\varphi}(12u_1 + 21u_2) = 0 \quad (\varphi = \pi/2), \qquad \frac{du_2}{d\varphi} = 0 \quad (\varphi = 3\pi/2).$$

Следовательно, $u \in D(\mathcal{L})$. Однако, $u \in H^2(Q_{11} \cap S_{\varepsilon}(0))$ ни при каком $\varepsilon > 0$.

В силу примера 1 теорема 3 при $\varepsilon = 0$ не верна.

3. Гладкость обобщенных решений на границе соседних подобластей. Пусть точка $y \in \Gamma_* \setminus \mathcal{K}$. Выясним, при каких условиях на коэффициенты u_{kjh} разностных операторов R_{kj} обобщенное решение u третьей краевой задачи принадлежит $H^2(S_{\delta}(y))$ при малом $\delta > 0$ для любой $f(x) \in L_2(Q)$. Будем предполагать при этом, что точка y принадлежит границе соседних подобластей Q_{p1} и Q_{q1}, $0 < 2\delta < a$, а множество $S_a(y) \cap \Gamma_{p1}$ имеет вид $x_n = 0$, где число $a > 0$ таково, что выполнены утверждения леммы 3.

Рассмотрим точки $x^{sl} \in \Gamma_{sl} \setminus \mathcal{K}$, $s = p, q$; $l = 1, \ldots, N(s)$, введенные по формуле (7). Как и при доказательстве теоремы 3, будем предполагать, что x^{sl} удовлетворяют условиям (8), (9).

Пусть u — обобщенное решение задачи (1), (2). Тогда

$$\sum_{k,j=1}^{n} (R_{kjQ} u_{x_j})_{x_k} \in L_2(Q), \tag{17}$$

и легко понять, что функция u удовлетворяет следующим условиям сопряжения на границах соседних подобластей Q_{pl} и Q_{ql}:

$$\sum_{j=1}^{n} R_{njQ} u_{x_j}|_{\gamma_{pl}} = \sum_{j=1}^{n} R_{njQ} u_{x_j}|_{\gamma_{ql}} \tag{18}$$

при $l = 1, \ldots, N_0$. Здесь и далее $\gamma_{sl} = \Gamma_{sl} \cap S_a(x^{sl})$.

По следствию из теоремы 3 функция u удовлетворяет краевым условиям

$$\sum_{j=1}^{n} R_{njQ} u_{x_j} + \sigma(x') \cos(\nu, x_n) u = 0, \quad x' \in \gamma_{sl}, \tag{19}$$

при $s = p, q$; $l = N_0 + 1, \ldots, N(s)$.

Рассмотрим матрицы R_{kjs} с коэффициентами $r_{lm} = r_{lm}(k, j, s)$ по формуле (6). Условия (18) и (19) запишем в алгебраической форме с помощью соотношения (5). Для этого введем вектор-функции V_s и W_{js}, $s = p, q$; $j = 1, \ldots, n$, по формулам

$$V_s = (U_s P_s u)|_{\gamma_{s1}}, \quad W_{js} = (U_s P_s u)_{x_j}|_{\gamma_{s1}}, \tag{20}$$

где $P_s : L_2(Q) \to L_2(\bigcup_k Q_{sl})$ — оператор проектирования.

Рассмотрим матрицы A_{js} и B_{js}, получающиеся из матриц R_{njs} вычеркиванием соответственно последних $N(s) - N_0$ строк и первых N_0 строк. Рассмотрим также соответствующие им матрицы и векторы со штрихами: матрицы (векторы) L' и L'' получаются из матрицы (вектора) L вычеркиванием соответственно последних $N(s) - N_0$ столбцов (элементов) и первых N_0 столбцов (элементов).

Заметим, что в силу предположений (8), (9) и формулы (6) $A'_{jp} = A'_{jq}$. Очевидно, $W'_{jp} = W'_{jq}$, $j < n$.

Для каждого $s = p, q$ построим также диагональную матрицу $\sigma_s = \sigma_s(x')$ порядка $N(s) - N_0$ с элементами $r_{mm} = \sigma(x' + h_{s, N_0 + m}) \cos(\nu, x_n)$, $x' \in \gamma_{s1}$; $m = 1, \ldots, N(s) - N_0$, по главной диагонали.

Тогда с помощью введенных матриц и формулы (5) условия (18) и (19) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} A_{jp} W_{jp} = \sum_{j=1}^{n} A_{jq} W_{jq}, \\ \sum_{j=1}^{n} B_{js} W_{js} + \sigma_s V''_s = 0, \quad s = p, q. \end{gathered} \tag{21}$$

Введем вектор-функцию $z = z(x')$, $x' \in \Gamma_* \cap S_a(y)$ размерности $N(p)$ вида

$$z = \begin{pmatrix} W'_{np} - W'_{nq} \\ W''_{np} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Очевидно, первые N_0 компонент вектор-функции z — суть скачки u_{x_n} на множествах $\Gamma_* \cap S_\delta(x^{pl})$, $l = 1, \dots, N_0$.

Легко проверить [2, с.1771], что система уравнений (21) эквивалентна системе уравнений

$$R_{nnp} z = -\sum_{j \geq 1} T^j H^j - S_0 V, \tag{23}$$

$$W''_{nq} = -\sum_{j \geq 1} G^j H^j - SV, \tag{24}$$

где блочные матрицы

$$T^n = \begin{pmatrix} A''_{nq} \; B^{-1} \; B'_{nq} \\ B'_{np} \end{pmatrix}, \quad G^n = B^{-1} B'_{nq},$$

$$T^j = \begin{pmatrix} A''_{nq} B^{-1} B'_{jq} & A''_{jp} & \left(A''_{nq} B^{-1} B''_{jq} - A''_{jq}\right) \\ B'_{jp} & B''_{jp} & 0 \end{pmatrix},$$

$$G^j = (B^{-1} B'_{jq} \quad 0 \quad B^{-1} B''_{jq}), \qquad j < n,$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & A''_{nq} B^{-1} \sigma_q \\ \sigma_p & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = (0 \quad B^{-1} \sigma_q),$$

матрица B^{-1} — обратная к B''_{nq} (такая матрица существует, см. [2]), вектор-функции H^j размерности $m(j)$, $j = 1, \dots, n$, имеют вид

$$H^n = W'_{nq}, \quad H^j = \operatorname{colon}(W'_{jp}, W''_{jp}, W''_{jq}), \tag{25}$$

при этом

$$m(j) = \begin{cases} N_0, & j = n, \\ N(p) + N(q) - N_0, & j < n, \end{cases}$$

вектор-функция V размерности $N(p) + N(q) - 2N_0$ имеет вид

$$V = \operatorname{colon}(V''_p, V''_q). \tag{26}$$

Обозначим Λ^j_{lk} и $\mathfrak{N}_{lk} = \mathfrak{N}_{lk}(x')$ квадратные матрицы порядка $N(p)$, полученные из матрицы R_{nnp}: Λ^j_{lk} — заменой l-го столбца R_{nnp} k-м столбцом матрицы T^j; $\mathfrak{N}_{lk}$— заменой l-го столбца R_{nnp} k-м столбцом матрицы S_0

Теорема 4. *Для того чтобы для данного l, $1 \leq l \leq N_0$, обобщенное решение краевой задачи* (1), (2) *принадлежало $H^2(S_\delta(x^{pl}))$ для любой $f(x) \in L_2(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det \Lambda^j_{lk} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m(j), \tag{27}$$

$$\det \mathfrak{N}_{lk}(x') = 0, \quad k = 1, \dots, N(p) + N(q) - 2N_0, \tag{28}$$

для всех $x' \in \Gamma_* \cap S_\delta(x^{p1})$.

Доказательство. Введем матрицы

$$\Lambda^j = \| \det \Lambda^j_{lk} / \Delta \|, \; l = 1, \dots, N(p), \; k = 1, \dots, m(j),$$

$$\mathfrak{N} = \|\det \mathfrak{N}_{lk}/\Delta\|, \ l = 1, \ldots, N(p), \ k = 1, \ldots, N(p) + N(q) - 2N_0,$$

где $\Delta = \det R_{nnp} \neq 0$ (из определения 1 и леммы 2 вытекает, что R_{nnp} не вырождена). Тогда из (23) следует

$$z = -\sum_{j\geq 1} \Lambda^j H^j - \mathfrak{N} V. \tag{29}$$

1. *Достаточность.* Пусть условия (27), (28) теоремы 4 выполнены. По теореме 3 $u \in H^2(Q_{sl} \cap S_\delta(x^{pl}))$, $s = p, q$. Так как $\det R_{nnp} \neq 0$, из (29) следует, что элемент z_l вектор-функции z равен нулю, т. е. $u_{x_n}|_{\gamma_{pl}} = u_{x_n}|_{\gamma_{ql}}$. Отсюда вытекает, что $u \in H^2(Q_{sl} \cap S_\delta(x^{pl}))$.

2. *Необходимость.* Пусть условия (27), (28) теоремы 4 нарушены и для некоторых j и k либо $\det \Lambda^j_{lk} \neq 0$, либо $\det \mathfrak{N}_{lk}(x') \neq 0$, $x' \in \Gamma_* \cap S_\delta(y)$. Построим функцию $u(x) \in D(\mathcal{L})$ такую, что $u(x) \notin H^2(S_\delta(x^{pl}))$. Без ограничения общности положим, что точка $y = 0$. Пусть

$$u(x) = \begin{cases} (U_i^{-1} u_i)(x), & x \in \bigcup\limits_l Q_{il}; \qquad i = p, q, \\ 0, & x \in Q \setminus \bigcup\limits_{i,l} Q_{il}, \end{cases} \tag{30}$$

где

$$u_i(x) = (A_i(x')x_n + B_i(x'))\eta(x_n), \quad x \in Q_{i1}, \tag{31}$$

функция $\eta(x_n) \in \dot{C}^\infty(R^1)$, $\eta(x_n) = 1$, $x_n \in (-\delta, \delta)$, $\eta(x_n) = 0$, $x_n \notin (-a/2, a/2)$; $x = (x', x_n) \notin R^n$; $A_i(x'), B_i(x') \in \dot{C}^{\infty, N(i)}(\Gamma_* \cap S_{a/2}(0))$.

Заметим, что $u(x)$ принадлежит $H^1(Q)$ тогда и только тогда, когда $B'_p(x') = B'_q(x')$. При этом

$$z = \operatorname{colon}(A'_p - A'_q, \ A''_p),$$

$$H^j = \begin{cases} A'_q(x'), & j = n, \\ \operatorname{colon}((B_p)_{x_j}, (B''_q)_{x_j}), & j < n, \end{cases} \tag{32}$$

$$V = \operatorname{colon}(B''_p, \ B''_q), \quad W''_{nq} = A''_q,$$

на основании формул (30), (31), (20), (22), (25), (26).

Обозначим $[\Lambda^j]_r$, $[G^j]_r$, S_r, $\mathfrak{N}_r$ — r-тые столбцы матриц соответственно Λ^j, G^j, S, $\mathfrak{N}$. Пусть функция $\xi(x') \in \dot{C}^\infty(R^{n-1})$, $\xi(x') = 1$, $x' \in \Gamma_* \cap S_\delta(0)$, $\xi(x') = 0$, $x' \notin \Gamma_* \cap S_{a/2}(0)$.

Вектор-функции $A_i(x')$ и $B_i(x')$ построим следующим образом.

а) Пусть при $j = n$, $k = r$ $\det \Lambda^j_{lk} \neq 0$, $1 \leq r \leq N_0$. Тогда

$$A'_p = (e - [\Lambda^n]'_r)\xi(x'), \quad A''_p = -[\Lambda^n]''_r \xi(x'),$$

$$A'_q = e\xi(x'), \quad A''_q = -[G^n]_r \xi(x'), \quad B_i = 0, \ i = p, q,$$

где e — столбец с координатами δ_{mr}; $\delta_{mr} = 1$, $m = r$, $\delta_{mr} = 0$, $m \neq r$, — символ Кронеккера.

б) Пусть при $j = t$, $k = r$ $\det \Lambda^j_{lk} \neq 0$, $t < n$; $1 \leq r \leq N(p) + N(q) - 2N_0$. Тогда

$$A_i = -\sum_{j<n} [\Lambda^j]_r (x_t \xi)_{x_j} - (x_t \xi) \mathfrak{R}\, h,$$

$$A'_q = 0; \quad A''_q = -\sum_{j<n} [G^j]_r (x_t \xi)_{x_j} - (x_t \xi) S\, h,$$

$$B_i = (x_t \xi) e_t, \quad i = p, q,$$

где столбцы e_i таковы, что $e'_p = e'_q$, столбец $e = \operatorname{colon}(e'_p, e''_p, e''_q)$ имеет координаты δ_{mr}, а столбец $h = \operatorname{colon}(e''_p, e''_q)$.

в) Пусть при $k = r$, $x' = x'_0$ $\det \mathfrak{R}_{lk}(x') \neq 0$, $1 \leq r \leq N(p) + N(q) - 2N_0$. Не ограничивая общности, положим $x'_0 = 0$. Тогда

$$A_p = -\sum_{j<n} [\Lambda^j]_{N_0 + r}\, \xi_{x_j} - \mathfrak{R}_r \xi;$$

$$A'_q = 0, \quad A''_q = -\sum_{j<n} [G^j]_{N_0 + r}\, \xi_{x_j} - S_r \xi;$$

$$B'_p = B'_q = 0, \quad B''_i = e_t \xi, \quad i = p, q;$$

где столбцы e_i таковы, что столбец $e = \operatorname{colon}(e_p, e_q)$ имеет координаты δ_{mr}.

Легко проверить, что в силу а), б), в) и формул (32) функция $u \in H^1(Q)$ удовлетворяет соотношениям (29), (24), а следовательно, и условию (17). Таким образом, $u \in D(\mathcal{L})$. Однако, по построению, $(A_p)_l \neq (A_q)_l$, т. е. $u_{x_n}|_{\gamma_{pl}} \neq$ $\neq u_{x_n}|_{\gamma_{ql}}$. Теорема доказана.

Заметим, что если условия сохранения гладкости теоремы 4 выполнены в случае третьей краевой задачи, то они выполнены и в случае второй краевой задачи [2]. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 2. Рассмотрим третью краевую задачу

$$-\sum_{j=1}^{2} (R_Q u_{x_j})_{x_j} = f(x), \quad x \in Q, \tag{33}$$

$$\sum_{j=1}^{2} R_Q u_{x_j} \cos(\nu, x_j) + \sigma(x) u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{34}$$

где $Q = (-1, 1) \times (-1, 1)$, $R\, u\, (x) = u(x_1, x_2) + \gamma(u(x_1, x_2 + 1) + u(x_1, x_2 - 1))$, $0 < |\gamma| < 1$.

Рассмотрим два класса эквивалентных подобластей Q_{sl} множества $Q \setminus \Gamma_*$: подобласти $Q_{11} = (-1, 1) \times (-1, 0)$, $Q_{12} = (-1, 1) \times (0, 1)$, а подобласти второго класса получаются из Q_{1l} их перенумерацией — $Q_{21} = Q_{12}$, $Q_{22} = Q_{11}$. Множество $\mathcal{K}$ состоит из точек вида (k, p), где $k = \pm 1$, $p = 0, \pm 1$.

Очевидно, матрицы

$$R_{221} = R_{222} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} \gamma^2 \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{R}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \sigma^1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{R}_{12} = \begin{pmatrix} -\gamma\sigma^{-1} & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\sigma^1 = \sigma^1(x_1)$, $\sigma^{-1} = \sigma^{-1}(x_1)$ — значения функции $\sigma(x)$ на сторонах квадрата Q соответственно $x_2 = 1$ и $x_2 = -1$, $-1 < x_1 < 1$.

Так как $0 < |\gamma| < 1$, с помощью леммы 2 легко проверить, что уравнение (33) эллиптическое. Очевидно, утверждение теоремы 1 для случая негладкой области Q примера 2 остается справедливым и обобщенное решение $u(x) \in H^1(Q)$ задачи (33), (34) существует и единственно для любой $f(x) \in L_2(Q)$.

В силу теоремы 3 $u(x) \in H^2(Q_{1l} \setminus \mathcal{K}_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, $l = 1, 2$.

Очевидно, условия (27), (28) сохранения гладкости теоремы 4 выполнены, а функция $u(x) \in H^2(S_\delta(0))$, $0 < \delta < 1$, тогда и только тогда, когда $\sigma^1(x_1) = \sigma^{-1}(x_1) = 0$, $|x_1| < 1$.

В заключение отметим, что полученные условия сохранения гладкости третьей краевой задачи являются принципиально отличными от соответствующих условий первой краевой задачи [1]. Заметим также, что вопросы разрешимости и спектра краевой задачи (1), (2) исследовались в работе [8].

Автор благодарит А. Д. Мышкиса и А. Л. Скубачевского за внимание к работе и ряд ценных советов.

1. *Skubachevskii A.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // J. Different. Equat. – 1986. – **63**, № 3. – P. 332–361.
2. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 10. – С. 1766–1776.
3. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами // Там же. – 1974. – **10**, № 3. – С. 409–418.
4. *Скубачевский А. Л.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых нелокальных краевых задач // Там же. – 1989. – **25**, № 1. – С. 127–136.
5. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 5. – С. 39–47.
6. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
8. *Цветков Е. Л.* Разрешимость и спектр третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения // Мат. заметки. – 1992. – **51**, вып. 6. – С. 107–114.

Получено 26.01.93.