УДК 517. 983.

А. Ю. Пирятинская, асп. (Киев. ун-т),
Ю. С. Самойленко, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ДИКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ $*$-АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ ОБРАЗУЮЩИМИ И СООТНОШЕНИЯМИ

Two definitions of $*$-algebras to be wild are considered from the point of view of representation theory. We give a method for proving that a $*$-algebra is wild. It is also shown that if a $*$-algebra is p-wild, then it is f-wild. The converse statement is not true.

Розглядаються два визначення диких $*$-алгебр з точки зору теорії зображень, способи доведення дикості. Доводиться, що з p-дикості випливає f-дикість, але обернене твердження не вірне.

Представления $\pi(\cdot)$ $*$-алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной образующими a_k, a_k^*, $k = 1, \ldots, n$, и соотношениями $P_j(a_1, \ldots, a_n, a_1^*, \ldots, a_n^*) = 0, j = 1, \ldots, m$ (P_j — некоммутативный полином), ограниченными операторами в сепарабельном гильбертовом пространстве H однозначно определяются операторами $\pi(a_k) = A_k$, $\pi(a_k^*) = A_k^*$, где $A_k, A_k^* \in L(H)$, $k = 1, \ldots, n$, такими, что

$$P_j(A_1, \ldots, A_n, A_1^*, \ldots, A_n^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Поэтому иногда мы будем говорить о представлениях соотношений (1).

Существуют два подхода к определению дикости $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ с точки зрения теории представлений. Настоящая статья посвящена связи между различными определениями дикости и способам доказательства дикости.

Авторы благодарны Ю. Н. Беспалову, С. А. Кругляку и рецензенту за плодотворные обсуждения вопросов, затронутых в статье, и полезные замечания.

1. f-Дикость $*$-алгебр. В теории представлений $*$-алгебр принято (см., например, [1]) следующее определение.

***Определение* 1.** *Алгебра $\mathfrak{A}$ называется f-дикой (факторно-дикой, не типа* I*, NGCR), если у нее существует фактор-представление не типа* I *(т. е. неймановская алгебра $\langle A_k, A_k^* \rangle''$, $k = 1, \ldots, n$, — фактор не типа* I*).*

Здесь $\langle A_k \rangle$ — алгебра, порожденная операторами A_k, $\langle A_k \rangle'$ — ее коммутант, $\langle A_k \rangle''$ — бикоммутант (слабое замыкание алгебры $\langle A_k \rangle$).

Один из способов доказательства f-дикости $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ — построение представления $\pi(\cdot)$ такого, что

$$\langle \pi(a_i), \pi(a_i^*) \rangle'' = \langle U_j, U_j^* \rangle'',$$

где $U_j = \pi_1(u_j), j = 1, \ldots, l,$ — унитарные операторы фактор-представления $\pi_1(\cdot)$ не типа I образующих $u_1, \ldots, u_l$ f-дикой счетной дискретной группы G (т. е. группы не типа I).

***Пример* 1.** *Свободная $*$-алгебра $\mathfrak{C} = \langle a, b \rangle$, порожденная парой самосопряженных образующих $a = a^*$, $b = b^*$ (не связанных соотношениями), f-дикая.*

Доказательство. Рассмотрим свободную группу F_2 с двумя образующими u, v. Унитарные операторы ее правого регулярного представления

$$R_u = U = \int\limits_{[0, 2\pi)} e^{i\varphi} dE_U(\varphi), \quad R_v = V = \int\limits_{[0, 2\pi)} e^{i\varphi} dE_V(\varphi)$$

порождают фактор типа II_1 [2, 3]. Тогда пара самосопряженных ограниченных операторов

$$\rho(a) = A = \int\limits_{[0,2\pi)} \varphi\, dE_U(\varphi), \quad \rho(b) = B = \int\limits_{[0,2\pi)} \varphi\, dE_V(\varphi)$$

также порождает фактор типа II_1.

Отметим, что существует фактор-представление не типа I для $*$-алгебры $\mathbb{C} = \langle a, b\rangle$ при условии, что $\pi(a) = A$ и $\pi(b) = B$ — положительные, так как

$$\langle A, B\rangle'' = \langle A + \lambda I, B + \mu I\rangle'', \quad \lambda > \| A \|,\ \mu > \| B \|.$$

***Пример* 2 а)** *$*$-Алгебра $\mathfrak{A}_1$, порожденная тремя ортопроекторами $p_i = p_i^*$, $p_i^2 = p_i$, $i = 1, 2, 3$, два из которых коммутируют: $p_2 p_3 = p_3 p_2$ f-дикая.*

Доказательство. Рассмотрим группу $G = \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ ($*$ — свободное произведение групп) с тремя образующими и определяющими соотношениями $a^2 = u_1^2 = u_2^2 = e$, $u_1 u_2 = u_2 u_1$. Любое унитарное представление $G \ni g \mapsto \pi(g)$ группы G задается тройкой унитарных и самосопряженных операторов $\pi(a), \pi(u_1)$ и $\pi(u_2)$ таких, что $[\pi(u_1), \pi(u_2)] = 0$. Группа G такова, что класс сопряженных элементов G_g любого элемента $g \neq e$ бесконечен. Операторы правого регулярного представления $A = R_a$, $U_1 = R_{u_1}$ и $U_2 = R_{u_2}$ [2, 3] порождают фактор типа II_1. Неймановская алгебра $\langle A, U_1, U_2\rangle''$, порожденная унитарными и самосопряженными операторами $A = P_{H_1} - P_{H_1}^{\perp}$, $U_1 = P_{h_1} - P_{h_1}^{\perp}$ и $U_2 = P_{h_2} - P_{h_2}^{\perp}$ такими, что $[U_1, U_2] = 0$, совпадает с алгеброй Неймана $\langle P_{H_1}, P_{h_1}, P_{h_2}\rangle''$, порожденной тремя ортопроекторами такими, что $[P_{h_1}, P_{h_2}] = 0$, которая является фактором типа II_1. Следовательно, алгебра $\mathfrak{A}_1$ f-дикая.

***Пример* 2б)** *$*$-Алгебра $\mathfrak{A}_2$, порожденная тремя ортопроекторами $p_i = p_i^*$, $p_i^2 = p_i$, $i = 1, 2, 3$, два из которых ортогональны: $p_2 p_3 = p_3 p_2 = 0$ f-дикая.*

Доказательство. Группа $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ с образующими a и u соотношениями $a^2 = u^3 = e$ f-дикая, операторы ее правого регулярного представления $A = R_a$, $U = R_u$ порождают фактор типа II_1 [2, 3]. Неймановская алгебра $\langle A, U\rangle''$, порожденная унитарными операторами $A = P_1 - P_1^{\perp}$ и $U = P_2 + e^{i2\pi/3} P_3 + e^{4\pi/3}(P_2 + P_3)^{\perp}$, совпадает с алгеброй Неймана $\langle P_1, P_2, P_3\rangle''$, порожденной тремя ортопроекторами такими, что $P_2 P_3 = P_3 P_2 = 0$, которая есть фактор типа II_1, т. е. алгебра $\mathfrak{A}_2$ f-дикая.

***Замечание* 1.** $*$-Алгебра, порожденная двумя ортопроекторами — типа I (ручная). Все ее неприводимые представления одномерны и двумерны (см., например, [4]).

Еще один способ доказательства f-дикости $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ — построение представления $\pi(\cdot)$ такого, что $\langle A_k, A_k^*\rangle' \cong \langle B_j, B_j^*\rangle'$, где $B_j = \rho(b_j)$ — операторы фактор-представления $\rho(\cdot)$ типа II или III f-дикой $*$-алгебры $\mathfrak{B}$ с образующими b_j, b_j^*, $j = 1, \ldots, l$. Так как $\langle B_j, B_j^*\rangle''$ — фактор типа II или III, то и $\langle B_j, B_j^*\rangle' \cong \langle A_k, A_k^*\rangle'$ согласно [2] — также фактор типа II или III соответственно. Следовательно, и $\langle A_k, A_k^*\rangle''$ — фактор типа II или III.

В качестве $*$-алгебры $\mathbb{B}$ зачастую выбирается $*$-алгебра $\mathbb{C}$ и представление $\rho(\cdot)$ из примера 1.

Пример 3 [5]. *Рассмотрим $*$-алгебру $\mathfrak{A}$, порожденную двумя самосопряженными образующими $a = a^*$, $b = b^*$, которые связаны полулинейным (линейным по b) соотношением*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(a)\, b\, g_k(a) = 0, \tag{2}$$

$f_k(\cdot)$, $g_k(\cdot)$ — полиномы.

С соотношением (2) *в* [5] *связывается характеристическая функция*

$$\Phi(t, s) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, b\, g_i(s),$$

$t, s \in \mathbb{R}$. В примере предполагаем, что $\Phi(t, s) = \Phi\overline{(s, t)}$.

Утверждение 1. *Если: а) $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — различные вещественные такие, что $\Phi(\lambda_1, \lambda_2) = \Phi(\lambda_2, \lambda_3) = 0$ или б) $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ такие, что $\Phi(\lambda_1, \lambda_1) = \Phi(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, то задача о представлениях таких полулинейных соотношений f-дикая.*

Доказательство. а) Для $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ рассмотрим следующее представление π:

$$\pi(a) = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 I \end{pmatrix}, \quad \pi(b) = \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & B \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(\mathcal{H})$, $\mathcal{H} = H \oplus H \oplus H$, где $A, B \in L(H)$, A, B — положительные. Покажем, что алгебры Неймана $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle'$ и $\langle A, B\rangle'$ изоморфны. Возьмем $\mathcal{C}$ такое, что $\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{C}$, $\mathcal{C}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{C}$. Из того, что $\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{C}$, следует

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}.$$

Из того, что $\mathcal{C}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, вытекает соотношение

$$C_1 A = A C_2, \quad C_2 A = A C_1, \tag{3}$$

$$C_2 B = B C_3, \quad C_3 B = B C_2. \tag{4}$$

Тогда

$$C_1 A^2 = A^2 C_1, \quad C_2 A^2 = A^2 C_2, \quad C_2 B^2 = B^2 C_2, \quad C_3 B^2 = B^2 C_3.$$

Так как A и B — положительные операторы, то

$$C_1 A = A C_1, \quad C_2 A = A C_2, \quad C_2 B = B C_2, \quad C_3 B = B C_3.$$

Из (3), (4) следует $C_1 = C_2 = C_3$, т. е.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

где $C \in \langle A, B\rangle'$.

Отображение $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle' \ni C \to C \in \langle A, B \rangle'$ есть изоморфизм неймановских алгебр.

Если в качестве представления пары A, B взять представление из примера 1, то и $\langle A, B \rangle'$ — фактор типа II. Тогда и $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle'$, и $\langle A, B \rangle''$ — факторы типа II одновременно, т. е. у алгебры $\mathfrak{A}$ существует фактор-представление типа II.

б) У алгебры $\mathfrak{A}$ рассмотрим такое представление:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 \\ 0 & \lambda_2 I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

($\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(\mathcal{H})$, $\mathcal{H} = H \oplus H$), где A, B — положительные операторы в гильбертовом пространстве H из примера 1. Аналогично можно показать, что $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle''$ — фактор типа II.

Удобно наряду с представлениями $*$-алгебр рассматривать еще представления $*$-колчанов (ориентированных графов (Γ, R) с инволюцией), вообще говоря, с соотношениями [6]. В этой статье мы ограничимся инволютивными колчанами с самосопряженными точками Γ и с множеством пар сопряженных стрелок R между некоторыми точками (каждую такую пару будем изображать неориентированным ребром). Тогда вся терминология, связанная с представлениями $*$-алгебр, естественно, переносится на представления $*$-колчанов. Так, представление $\pi(\cdot)$ $*$-колчана ставит в соответствие точкам $\lambda \in \Gamma$ гильбертовы пространства H, ребрам $\underset{\lambda_k}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{\lambda_j}{\bullet}$ — пары операторов $X_{kj}\colon H_{\lambda_j} \to H_{\lambda_k}$ и $X_{kj}^*\colon H_{\lambda_k} \to H_{\lambda_j}$ представления $\pi(\cdot)$ и $\tilde{\pi}(\cdot)$ $*$-колчана (Γ, R) унитарно эквивалентны, если существуют унитарные операторы $U_\lambda\colon H_\lambda \xrightarrow{\cdot} \tilde{H}\lambda$, $\lambda \in \Gamma$, такие, что $X_{kj} = U_{\lambda_k}^* \tilde{X}_{kj} U_{\lambda_j}$ для всех ребер $(\lambda_k, \lambda_j) \in R$ и т. д.

Определение 2. *$*$-Колчан (Γ, R) назовем f-дикими, если у него существует представление такое, что W^*-алгебра операторов в $H = \oplus_\Gamma H_{\lambda_k}$, порожденная всеми ортопроекторами $P_{H_{\lambda_k}}$ и операторами $P_{H_{\lambda_j}} X_{jk} P_{H_{\lambda_k}}$, $P_{H_{\lambda_k}} X_{jk}^* P_{H_{\lambda_j}}$ — фактор не типа* I.

Подобно утверждению 1 можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если граф $(\mathbb{R}^1, R)$ содержит подграф $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ или $\circlearrowleft\!\!\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$, то задача о представлениях графа f-дикая.*

С полулинейным соотношением (2) связывается [5] $*$-граф $(\mathbb{R}^1, R)$. Тогда $R = \{(t, s),\ t, s \in \mathbb{R}^1 : \Phi(t, s) = 0\}$.

Если он содержит f-дикий подграф, то и соотношение (2) f-дикое.

1. *p*-Дикость $*$-алгебр. Для представления конечномерных ассоциативных алгебр, порожденных образующими $a_1, \ldots, a_n$ и соотношениями $P_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$, доказано [7], что либо они ручные, т. е. существует алгоритм приведения данных матриц и описания всех неразложимых представлений с точностью до эквивалентности, либо они приводятся к описанию представлений пары операторов без соотношений (в этом случае задача называется дикой или говорят, что „задача содержит пару"). Доказано, что пара содержит в себе любую дикую задачу. Задача о представлении свободной алгебры с двумя образующими называется стандартной дикой задачей.

Рассмотрим $*$-алгебру

$$\mathfrak{A} = \langle a_1, \ldots, a_n, a_1^*, \ldots, a_n^* \mid P_i(a_1, \ldots, a_n, a_1^*, \ldots, a_n^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, p \rangle.$$

Для любой $*$-алгебры, заданной образующими и соотношениями, не ограничивая общности, можно считать, что образующие самосопряжены.

Категорией $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ ее представлений назовем следующую линейную аддитивную $*$-категорию: „точки" — представления с точностью до унитарной эквивалентности $*$-алгебры $\mathfrak{A}$, „морфизмы" — сплетающие операторы. Эквивалентность категорий $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ означает существование обратимого функтора $\Phi: \mathfrak{R}_1 \leftrightarrows \mathfrak{R}_2$.

Ниже мы будем говорить, что категория представлений $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{A}_1)$ содержит подкатегорию $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{A}_2)$ ($\mathfrak{R}_1(\mathfrak{A}_1) \supset \mathfrak{R}_2(\mathfrak{A}_2)$), если категория представлений $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{A}_1)$ $*$-алгебры $\mathfrak{A}_1$ содержит полную подкатегорию $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{A}_1)$, эквивалентную категории представлений $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{A}_2)$.

***Утверждение* 3** ([8], см. также [9]). *Для любой $*$-алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной образующими и соотношениями $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{C})$, где $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ — категория представлений $*$-алгебры $\mathfrak{C} = \langle a, b\rangle$.*

Это служит основанием считать аналогом стандартной дикой задачи в теории представлений $*$-алгебр [8] задачу о представлении $*$-алгебры $\mathfrak{C} = \langle a, b\rangle$, порожденной парой свободных самосопряженных образующих (пару самосопряженных операторов, без соотношений).

Определение, близкое к следующему ниже, см. в [10].

***Определение* 3.** *$*$-Алгебра $\mathfrak{A}$ называется p-дикой (т. е. дикой в смысле пары), если категория ее представлений $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ содержит полную подкатегорию $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{A})$, эквивалентную категории представлений $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ (где $\mathfrak{C} = \langle a, b\rangle$).*

***Пример* 4.** *Категория представлений $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ $*$-алгебры $\mathfrak{C} = \langle a, b\rangle$ эквивалентна своей полной подкатегории $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{C})$ такой, что $\forall\, \rho_1 \in \mathfrak{R}_1(\mathfrak{C})$ и $\rho_1(a) = A_1$, $\rho_1(b) = B_1$, где A_1, B_1 — строго положительные операторы.*

Действительно, пусть $\rho(a) = A$, $\rho(b) = B$ — операторы в H. Тогда обратимый функтор Φ задается, например, следующим образом:

$$\Phi(a) = \exp A = A_1 > 0, \quad \Phi(B) = \exp B = B_1 > 0$$

и $\forall\, X$, сплетающего ρ и ρ', $\Phi(X) = X$.

***Пример* 5.** *$*$-алгебра $\mathfrak{B} = \langle u, v \mid uu^* = u^*u = vv^* = v^*v = 1\rangle$ p-дикая.*

Категория $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ содержит подкатегорию $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{B})$ пар унитарных операторов U, V, спектр которых не содержит 1, эквивалентную категории $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$. Эта эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Кэли.

В [11] $*$-колчан Q называют диким (в данной работе — p-диким), если $\mathfrak{R}(Q) \supset \mathfrak{R}(\infty)$, и, в частности, показано, что если $*$-колчан содержит подколчан без соотношений $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ или $\circlearrowleft\!\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$, то он дикий (т. е. p-дикий).

Приведем ряд простых достаточных условий p-дикости $*$-алгебры $\mathfrak{A}$.

а) Предполагая конечность $\sigma(A_{k_0}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}^1\}$ спектра, например, оператора $\pi(a_{k_0}) = A_k$, построим $*$-колчан $(\sigma(A_{k_0}), R)$ с ребрами $\alpha_{ij}^{(k)} \in R^1$, $k = 1, \ldots, n$; $i, j = 1, \ldots, m$, и соотношениями, зависящими от $\sigma(A_{k_0})$ и соотношений в алгебре между образующими a_k, $k = 1, \ldots, n$. Представления этого $*$-колчана порождают полную $*$-подкатегорию в $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$. Поэтому, если возможен выбор $\sigma(A_{k_0})$ такой, что соответствующий $*$-колчан с соотношениями p-дикий, то p-дикой является и $*$-алгебра $\mathfrak{A}$.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *$*$-Алгебра $\mathfrak{A}$ p-дикая, если для любого представления ρ $*$-алгебры $\mathfrak{C}$ в гильбертовом пространстве H : $\rho(a)=A$, $\rho(b)=B$ существует представление π $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ такое, что выполнены следующие условия:*

1) $\mathcal{H}=\oplus_{i=1}^{m}H_i$, $H_i=H_j=H$;

2) $\pi(a_k)=A^{(k)}=\left(A_{i,j}^{(k)}\right)_{i,j=1}^{m}$, $k=1,\dots,n$, $A_{i,j}\in\langle A,B\rangle$;

3)

$$\exists\, k_0:\quad A^{(k_0)}=\begin{pmatrix}\lambda_1 I & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m I\end{pmatrix},\quad \lambda_i\neq\lambda_j,\, i\neq j,\, \lambda_k\in\mathbb{R};$$

4) $\forall\, i,j=1,\dots,m\ \exists\, s=s(i,j)$: $A_{i,j}^{(s)}=\gamma_{ij}I$, $\gamma_{ij}\neq 0$ $(i\neq j)$;

5) $\exists\, i,j,t$: $A_{i,j}^{(t)}=\alpha A$, $\exists\, k,l,p$: $A_{k,l}^{(p)}=\beta B$, $\alpha,\beta\neq 0$.

Доказательство. Классу представлений $\mathfrak{A}$, рассмотренных в теореме, соответствуют представления $*$-колчана $(\sigma(A^{(k_0)}),\ \alpha_{ij}^{(k)},\ k=1,\dots,n,\ i,j=1,\dots,m$.

В силу условий 3–5 теоремы подкатегория $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{A})$ представлений π теоремы эквивалентна категории $\mathfrak{R}(\infty)=\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$.

Пример 6. $*$-Алгебра

$$\mathfrak{A}_1=\langle a_1,a_2,a_3\,|\,a_i=a_i^*,\ i=1,2,3,\ a_1^2=a_2^2=1,$$
$$[a_1,a_3]=0,\ \{a_1,a_2\}=0\rangle,$$

p-дикая, так как ее представление

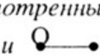
$$A_1=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.

Пример 7. *Рассмотрим $*$-алгебру $\mathfrak{A}_2$ из примера* 2:

$$\mathfrak{A}_2=\langle p_1,p_2,p_3\,|\,p_i=p_i^*,\ p_i^2=p_i,\ i=1,2,3,\ p_2p_3=p_3p_2=0\rangle;$$

ее представления, построенные в работе [8], *удовлетворяют условиям теоремы* 1, *и следовательно, $*$-алгебра $\mathfrak{A}_2$ p-дикая.*

Пример 8. *$*$-Алгебры, порожденные такими полулинейными соотношениями (см. пример* 3), *удовлетворяющими условиям утверждения* 1, *p-дикие, так как классам представлений, рассмотренных в утверждении* 1, *соответствуют p-дикие $*$-колчаны* *и* .

б) p-дикость $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ иногда доказывается выделением конкретного класса представлений такого, что полная подкатегория $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{A})$, образованная этим классом представлений, эквивалентна категории $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$.

Пример 9. *$*$-Алгебра*

$$\mathfrak{A}=\langle a_1,a_2\,|\,a_1a_2a_1=a_2a_1a_2=0,\ a_i=a_i^*,\ i=1,2\rangle$$

р-дикая, так как категория $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{A})$, *образованная представлениями* π *вида*

$$\pi(a_1) = \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi(a_2) = \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $A_1 = \rho_1(a)$, $B_1 = \rho_1(b)$ — *строго положительные операторы представлений* $*$-*алгебры* $\mathfrak{C}$ *из примера* 4, *эквивалентна категории* $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{C})$, *которая эквивалентна* $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$.

Доказательство. Построим обратимый функтор $\Phi\colon\ \mathfrak{R}_1(\mathfrak{A}) \leftrightarrows \mathfrak{R}_1(\mathfrak{C})$ на „точках": $\Phi(\rho_1) = \pi$. Доказательство его обратимости следует из следующей леммы.

Лемма 1. *Представления* ρ_1 *и* ρ_1' *унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им представления* π *и* π' *унитарно эквиваленты.*

Доказательство. Пусть U — унитарный оператор такой, что $U\rho_1 = \rho_1' U$. Тогда оператор

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U & & 0 \\ & U & \\ 0 & & U \end{pmatrix}$$

осуществляет унитарную эквивалентность π и π'.

Обратно. Пусть $\mathcal{U}$ — унитарный оператор такой, что $\pi\,\mathcal{U} = \mathcal{U}\pi'$. Тогда из $\mathcal{U}\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1'\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2'\mathcal{U}$ следует, что $U_{12} = U_{21} = U_{13} = U_{31} = U_{23} = U_{32} = 0$ и

$$U_{11}A_1 = A_1'U_{22}, \quad U_{11}B_1 = B_1'U_{33},$$

$$U_{22}A_1 = A_1'U_{11}, \quad U_{33}B_1 = B_1'U_{11}.$$

Тогда $A_1' = U_{11}A_1U_{22}^* = U_{22}A_1U_{11}^*$, т. е. $A_1U_{22}^*U_{11} = U_{11}^*U_{22}A_1$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$[\,A_1^2, U_{22}^*, U_{11}\,] = A_1^2U_{22}^*U_{11} - U_{22}^*U_{11}A_1^2 = 0,$$

так как A_1 — положительный оператор, то $[\,A_1, U_{22}^*, U_{11}\,] = 0$. Таким образом, $A_1' = U_1A_1U_{11}^* = U_{22}A_1U_{22}^*$.

Аналогично $B_1' = U_{11}B_1U_{11}^* = U_{33}B_1U_{33}^*$.

Т. е. оператор U_{11} осуществляет унитарную эквивалентность ρ_1 и ρ_1'.

Зададим Φ на стрелках. Пусть X такой, что $\rho_1X = X\rho_1'$, тогда

$$\Phi(X) = \mathcal{X} = \begin{pmatrix} X & & 0 \\ & X & \\ 0 & & X \end{pmatrix}$$

сплетает соответствующие π и π'.

Покажем обратимость Φ на „стрелках". Пусть X сплетает π и π'. Тогда из того, что $X\mathcal{A}_j = \mathcal{A}'_j X$, $j = 1, 2$, следует

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & X_2 & \\ 0 & & X_3 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $X^* X\pi = \pi X^* X$. Действительно,

$$\forall\, a \in \mathfrak{A} \quad \pi(a) X^* = (X\pi^*(a))^* = (X\pi(a^*))^* = (\pi'(a^*)X)^* = X^*\pi'(a)',$$
$$X^* X\pi = X^*\pi' X = \pi X^* X.$$

Подобно примеру 3 можно показать, что $|X_1| = |X_2| = |X_3|$, $(|X_i| = (X_i^* X_i)^{1/2})$. Следовательно, $\operatorname{Ker} X_1 = \operatorname{Ker} X_2 = \operatorname{Ker} X_3 = H_0$.

Так как $\mathcal{A}_j X^* = X^* \mathcal{A}'_j$, $j = 1, 2$, то аналогично можно показать, что $\operatorname{Ker} X_1^* = \operatorname{Ker} X_2^* = \operatorname{Ker} X_3^* = H'_0$. Тогда $H = H_1 \oplus H_0$, $H' = H'_1 \oplus H'_0$.

Рассмотрим обратимый оператор $\tilde{X}'_i \colon H_1 \to H'_1$, $i = 1, 2, 3$, такой, что $X_i \upharpoonright H_1 = \tilde{X}_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда подобно лемме 1 можно доказать, что $\tilde{X}_1 A_1 = A'_1 \tilde{X}_1$, $\tilde{X}_1 B_1 = B'_1 \tilde{X}_1$. Таким образом, $\Phi^{-1}(X) = X$, где $X \upharpoonright H_1 = \tilde{X}_1$, $X \upharpoonright H_0 = 0$.

Аналогично доказательству p-дикости $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ в примере 9 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *$*$-Алгебра $\mathfrak{A}$ p-дикая, если $\forall\, \rho$ представления $\mathbb{C}$ в H: $\rho(a) = A$, $\rho(b) = B$ $\exists\, \pi$ представление $\mathfrak{A}$, удовлетворяющее условиям* 1, 2 *из теоремы* 1 *и условиям*:

3) $\exists\, i_1, \dots, i_m$ *такое, что в матрицах*

$$A^{(i_p)}, \quad p = 1, \dots, m, \quad A^{(i_p)}_{i_p, j} = A^{(i_p)}_{k, i_p} = 0, \quad k, j = 1, \dots, m;$$

*и в каждой строке, и в каждом столбце матриц $A^{(i_p)}$, исключая i_p, **по** одному ненулевому элементу;*

4) $\forall\, i, j$ *существует последовательность индексов $i = i_1, \dots, i_p = j$ такая, что $A_{i_k, i_{k+1}}$ — положительные операторы;*

5) $\exists\, s, t, i, j, k, l$: $A^{(s)}_{i,j} = A + \alpha I$ и $A^{(t)}_{k,l} = B + \beta I$, $\alpha > \|A\|$, $\beta > \|B\|$ и $(k-i)\times$ $\times (k-j)(l-i)(l-j) = 0$.

3. Связь между p-дикостью и f-дикостью.

Теорема 3. *Если $*$-алгебра*

$$\mathfrak{A} = \langle a_1, \dots, a_n, a_1^*, \dots, a_n^* \mid P_j(a_1, \dots, a_n, a_1^*, \dots, a_n^*) = 0 \rangle$$

*p-дикая, то она f-*дикая.

Доказательство. Покажем, что у $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ существует фактор-представление не типа I.

В категории представлений $\mathfrak{R}(\mathbb{C})$ рассмотрим точку ρ, которой соответствует представление $\langle A, B\rangle''$ — фактор не типа I из примера 1. В категории

$\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ в силу определения 3 существует соответствующая ей точка π такая, что $\pi(a_k) = \mathcal{A}_k$, $\pi(a_k^*) = \mathcal{A}_k^*$ и алгебры $\langle \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_k^* \rangle'$, $\langle A, B \rangle'$ изоморфны.

Если $\langle A, B \rangle''$ — фактор типа II, то и $\langle A, B \rangle'$ — фактор типа II [2]. Тогда и $\langle \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_k^* \rangle'$, $\langle \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_k^* \rangle''$ одновременно факторы типа II. Следовательно, у $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ существует представление π: $\pi(a_k) = \mathcal{A}_k$, $\pi(a_k^*) = \mathcal{A}_k^*$ такое, что $\langle \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_k^* \rangle''$ — фактор типа II.

Обратное утверждение не верно. Существуют f-дикие $*$-алгебры, которые не являются p-дикими. Пример: алгебра Кунца O_n $(n \geq 2)$ задается образующими $S_1, \ldots, S_n, S_1^*, \ldots, S_n^*$ и соотношениями

$$S_i S_i^* = I, \quad \sum_{i=1}^{n} S_i^* S_i = I.$$

Алгебра O_n f-дикая, так как у нее существует представление типа $\mathrm{III}_{1/n}$ [12]. Если бы O_n была p-дикой, то у нее существовало бы фактор-представление π_1 такое, что $\langle \pi_1(S_i), \pi_1(S_i^*) \rangle' \cong \langle A, B \rangle'$ (где A, B из примера 1) — фактор типа II_1, и тогда $\langle \pi_1(S_i), \pi_1(S_I^*) \rangle''$ — фактор типа II, причем не гиперфинитный. Такое не возможно, так как алгебра O_n ядерная [12] и, следовательно, все ее представления гиперфинитные.

Работа частично поддержана Международным научным фондом, Грант № U6D000.

1. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений.– М.: Наука, 1972. – 336 с.
2. *Нейман Дж фон.* Избранные труды по функциональному анализу. – М.: Наука, 1987. – Т. II. – 369 с.
3. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
4. *Raeburn I., Sinclair A. M.* The C^*-algebra generated by two projections // Math. Scand. – 1989. – **65**. – P. 278–290.
5. *Бесналов Ю. Н., Самойленко Ю. С., Шульман В. С.* О наборах операторов, связанных полулинейными соотношениями // Применение методов функционального анализа в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 28–51.
6. *Ройтер А. В.* Боксы с инволюцией // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1979. – С. 124–126.
7. *Дрозд Ю. А.* Ручные и дикие матричные задачи // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1979. – С. 39–74.
8. *Кругляк С. А., Самойленко Ю. С.* Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1981. – **14**, вып. 1. – С. 52–61.
9. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1984. – 232 с.
10. *Бесналов Ю. Н.* Наборы операторов в гильбертовом пространстве, связанных соотношениями: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1922. – 122 с.
11. *Кругляк С. А.* Представления инволютивных колчанов. – Киев, 1984. – Деп. в ВИНИТИ, № 7266-84. – 62 с.
12. *Cuntz J.* Simple C^*-algebras generated by isometries // Commun. Math. Phys. – 1977. – **57**. – P. 173–185.

Получено 27.12.93