УДК 517. 946

Н. А. Перестюк,
А. Б. Ткач (Нац. ун-т, Киев)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

We establish conditions of the existence of solutions periodic in t with period T for a weakly nonlinear system of partial differential equations with pulse influence.

Визначаються умови існування періодичних по t з періодом T розв'язків слабконелінійної системи рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с импульсным воздействием появляются при исследовании различных систем управления.

Существование периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием изучалось во многих работах (см., например, [1 – 4]).

В настоящей статье исследуется существование периодических решений слабонелинейной системы уравнений в частных производных с импульсным воздействием вида

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} = A\frac{\partial u}{\partial x} + f(t, x, u(t,x), u'_x(t,x)), \qquad t \neq t_i,\\ \Delta \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=t_i} = B\frac{\partial u}{\partial x} + I_i(x, u, u'_x), \qquad u(t,0) \equiv 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $I_i = (I_i^{(1)}, \ldots, I_i^{(m)})$, A, B — постоянные матрицы размерности $n \times n$. Функции f и I_i удовлетворяют соотношениям

$$f(t, x, u, u'_x) = f(t+T, x, u, u'_x); \qquad I_{i+p}(x, u, u'_x) = I_i(x, u, u'_x)$$

для некоторого натурального числа p, T — период системы,

$$-\infty < t < +\infty; \qquad |x| \leq a, \qquad \|u\| \leq h, \qquad \|u'_x\| \leq l. \tag{2}$$

Предположим, что f и I_i непрерывны по своим аргументам в области (2) и удовлетворяют условиям Липшица

$$\begin{gathered}\|f(t, x, u, u'_x) - f(t, x, \overline{u}, \overline{u}'_x)\| \leq K_1\|u - \overline{u}\| + K_2\|u'_x - \overline{u}'_x\|,\\ \|I_i(x, u, u'_x) - I_i(x, \overline{u}, \overline{u}'_x)\| \leq K_3\|u - \overline{u}\| + K_4\|u'_x - \overline{u}'_x\|.\end{gathered} \tag{3}$$

Кроме того, постоянные K_i, $i = \overline{1,4}$, неотрицательны.

Для исследования системы уравнений (1) используем то обстоятельство, что система уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\,\partial x} = A\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \qquad t \neq t_i,\\ \Delta \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=t_i} = B\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u(t,0) = 0\end{gathered} \tag{4}$$

преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial t\partial x} = \Lambda\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad V(t,0) \equiv 0 \tag{5}$$

с помощью замены

$$u(t,x) = \phi(t)V(t,x), \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} \phi(t) = (E+B)^{i(t)-pt/T}, \\ i(t) = i \quad \text{для} \ t_i<t<t_{i+1}. \end{gathered} \tag{7}$$

Легко видеть, что с помощью замены (6) система уравнений (1) записывается в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial t\partial x} = \Lambda\frac{\partial V}{\partial x} + (E+B)^{-i(t)+pt/T} f(x, \phi(t)V(t,x), \phi(t)V'_x(t,x)), \qquad t\neq t_i, \\ \Delta\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{t=t_i} = (E+B)^{-i(t)+pt/T} I_i(x, \phi(t)V(t,x), \phi(t)V'_x(t,x)), \\ V(t,0) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Для нахождения условий существования периодических решений системы уравнений (1) нам необходима следующая лемма.

Лемма. *Пусть система уравнений в частных производных с импульсным воздействием*

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = A\frac{\partial u}{\partial x} + P(t,x), \qquad t\neq t_i, \\ \Delta\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=t_i} = B\frac{\partial u}{\partial x} + I_i(x), \qquad u(t,0) = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

удовлетворяет условиям:

а) *вещественные части собственных значений матрицы*

$$\Lambda = A + \frac{P}{t}\ln(E+B)$$

отличны от нуля;

б) *вектор-функция* $P(t,x)$ *кусочно-непрерывна с разрывами первого рода при* $t=t_i$, I_i *ограничены для всех* $t_i\in(-\infty,\infty)$, $i=0,\pm1,\ldots$;

в) *последовательность моментов* t_i *занумерована так, что* $t_i\to-\infty$ *при* $i\to-\infty$ *и* $t_i\to+\infty$ *при* $i\to+\infty$ *и можно указать такое положительное число* θ, *что*

$$t_{i+1}-t_i \geq \theta \quad \text{для всех} \ \ i=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{10}$$

Тогда:

1) *система уравнений* (9) *имеет единственное решение* $u^*(t,x)$, *ограниченное на всей оси* t *и при* $|x|\leq a$;

2) *можно указать такое положительное число* $d=d(a,A,\theta)$, *что*

$$\|u^*(t,x)\| \leq d\max\left\{\sup_{\substack{-\infty<t<+\infty \\ -a\leq x\leq a}}\|P(t,x)\|, \ \sup_{\substack{i \\ -a\leq x\leq a}}\|I_i(x)\|\right\}; \tag{11}$$

3) *если система уравнений* (9) T*-периодична по* t, *то решение* $u^*(t,x)$ *также* T*-периодично по* t.

Доказательство. Пусть $G(t, \tau)$ — матрица, определенная соотношением

$$G(t,\tau) = \begin{bmatrix} -S^{-1}\operatorname{diag}\left(e^{\Lambda_+(t-\tau)}, 0\right)S(E+B)^{-p(t-\tau)/T+i(t,\tau)}, & t<\tau; \\ \\ S^{-1}\operatorname{diag}\left(0, e^{\Lambda_-(t-\tau)}\right)S(E+B)^{-p(t-\tau)/T+i(t,\tau)}, & t>\tau. \end{bmatrix} \tag{12}$$

Тогда можно указать такие положительные числа K и γ, что

$$\| G(t,\tau)\| \le Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \quad t,\tau\in R. \tag{13}$$

Определим функцию $u^*(t,x)$ соотношением

$$u^*(t,x) = \int\limits_0^x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau)P(\tau,x)\,d\tau\,dx + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,t_i)\int\limits_0^x I_i(x)\,dx. \tag{14}$$

Оценим правую часть соотношения (14). Имеем

$$\left\|\int\limits_0^x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau)P(\tau,x)\,d\tau\,dx\right\| \le a\left\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\gamma|t-\tau|}P(\tau,x)\,d\tau\right\| \le a\frac{2K}{\gamma}\sup_{t,x}\| P(t,x)\|, \tag{15}$$

$$\left\|\sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,t_i)\int\limits_0^x I_i(x)\,dx\right\| \le \frac{2aK}{1-e^{-\gamma\theta}}\sup_{t,x}\| I_i(x)\|. \tag{16}$$

Затем находим оценку

$$\| u^*(t,x)\| \le \frac{2aK}{\gamma}\sup_{t,x}\| P(t,x)\| + \frac{2aK}{1-e^{-\gamma\theta}}\sup_{t,x}\| I_i(x)\|. \tag{17}$$

Непосредственная оценка показывает, что функция $u^*(t,x)$ есть единственное ограниченное решение системы уравнений (9).

Обозначим

$$d = 4Ka\max\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{1-e^{-\gamma\theta}}\right). \tag{18}$$

Тогда из неравенства (17) находим, то справедлива оценка (11). В случае T-периодичности по t системы уравнений (9) T-периодичность по t решения системы (9) следует из представления (14). Если вещественные части собственных значений матрицы Λ строго отрицательны, то легко видеть, что решения системы уравнений (9) асимптотически устойчивы.

Теорема. *Пусть в системе уравнений* (1) *матрицы* A *и* B *удовлетворяют предположению* а) *леммы, вектор-функции* $f(t,x,u,u'_x)$ *и* $I_i(x,u,u'_x)$, *непрерывны, ограничены в области* (2), $\|f\|\le M$, $\|I_i\|\le N$, $i=\overline{1,p}$, *удовлетворяют условиям Липшица* (3), *вектор-функция* $f(t,x,u,u'_x)$ T*-периодична по* t, *последовательность моментов* $\{t_i\}$ *такова, что* $t_{i+p}=t_i+T$ *для всех* i *и для некоторого положительного* p *постоянная*

$$R = 2K\left[\frac{aK_1+K_2}{\gamma}+\frac{aK_3+K_4}{1-e^{-\gamma\theta}}\right] \tag{19}$$

меньше единицы. Тогда слабонелинейная система уравнений (1) *имеет единственное* T*-периодическое по* t *решение.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $u_{n+1}(t,x)$. Каждая из этих функций является T-периодическим по t решением системы уравнений

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\,\partial x} = A\frac{\partial u}{\partial x} + f(t,x,u_n(t,x),u'_{nx}(t,x)), \qquad t\ne t_i,$$

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=t_i} = B\frac{\partial u_n(t_i-0)}{\partial x} + I_i(x, u_n(t_i-0, x), u'_{nx}(t_i-0, x)), \tag{20}$$

$$u(t, 0) = 0.$$

С помощью замены (6), преобразованной системы уравнений (8) и функции Грина (12) для нулевой аппроксимации получаем выражение вида

$$u_0(t, x) = \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) f(\tau, x, 0, 0)\, d\tau dx + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t, t_i)\int_0^x I_i(x, 0, 0)\, dx. \tag{21}$$

Тогда согласно лемме существует T-периодическое по t решение системы уравнений (20). Это решение определяется соотношением

$$u_{n+1}(t, x) = \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) f(t, \eta, u_n(\tau, \eta), u'_{n\eta}(\tau, \eta))\, d\tau d\eta +$$

$$+ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t, t_i)\int_0^x I_i(\eta, u_n(t_i-0, \eta), u'_{n\eta}(t_i-0, \eta))\, d\eta. \tag{22}$$

Выбирая представление (22) для $u_{n+1}(t, x)$ и принимая во внимание неравенства (10), (11), находим

$$\| u_{n+1}(t, x)\| \le \frac{2aK}{1-e^{-\gamma\theta}}N + \frac{2aK}{\gamma}M. \tag{23}$$

Обозначим

$$M_0 = \max (M, N),$$
$$C = \max\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{1-e^{-\gamma\theta}}\right). \tag{24}$$

Тогда из оценок (23) получаем

$$\| u_{n+1}(t, x)\| \le 4aKCM_0 \tag{25}$$

и

$$\| u'_{(n+1)x}(t, x) \| \le 4KCM_0. \tag{26}$$

Кроме того, с помощью представления (21) для $u_0(t, x)$, оценки (11) и обозначений (24) находим

$$\| u_0(t, x)\| \le 4aKCM_0,$$
$$\| u'_{0x}(t, x) \| \le 4KCM_0. \tag{27}$$

Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{ u_{n+1}(t, x)\}$ сначала оценим разность $u_1(t, x) - u_0(t, x)$. Имеем

$$\| u_1(t, x) - u_0(t, x)\| \le$$

$$\le \left\| \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau)[f(\tau, x, u_0(\tau, x), u'_{0x}(\tau, x)) - f(\tau, x, 0, 0)]d\tau dx \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t, t_i)\int_0^x [I_i(x, u_0(t_i-0, x), u'_{0x}(t_i-0, x)) - I_i(x, 0, 0)]dx \right\| \le$$

$$\leq \left\| \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} K e^{-\gamma|t-\tau|} [K_1 4KaCM_0 + K_2 4KCM_0] \, d\tau dx \right\| + \tag{28}$$

$$+ \left\| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K e^{-\gamma|t_i - t|} \int_0^x [K_3 4KaCM_0 + K_4 4CM_0] dx \right\| \leq$$

$$\leq \frac{2aK}{\gamma}[aK_1 + K_2] 4KCM_0 + \frac{2aK}{1-e^{-\gamma\theta}}[aK_3 + K_4] 4KCM_0 = aR4KCM_0,$$

где постоянная R определена равенством (19).

Кроме того, получаем

$$\| u'_{1x}(t, x) - u'_{0x}(t, x) \| \leq R4KCM_0. \tag{29}$$

Продолжая этот процесс нахождения оценок для разностей

$$u_2(t, x) - u_1(t, x), \quad u_3(t, x) - u_2(t, x), \quad u_4(t, x) - u_3(t, x), \ldots,$$

по индукции находим

$$\begin{gathered} \| u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x) \| \leq aR^{n+1} 4KCM_0, \\ \| u'_{(n+1)x}(t, x) - u'_{nx}(t, x) \| \leq R^{n+1} 4KCM_0. \end{gathered} \tag{30}$$

Далее имеем

$$\begin{gathered} \| u_{n+k}(t, x) - u_n(t, x) \| \leq aR^{n+1} \sum_{i \equiv 0}^{k-1} R^i 4KCM_0, \\ \| u'_{(n+k)x}(t, x) - u'_{nx}(t, x) \| \leq R^{n+1} \sum_{i \equiv 0}^{k-1} R^i 4KCM_0. \end{gathered} \tag{31}$$

Поскольку постоянная R меньше единицы, из оценок (31) следует равномерная сходимость последовательности $\{u_n(t, x)\}$ к предельной функции $u_\infty(t, x)$, которая является T-периодическим по t решением системы уравнений (1). Кроме того, справедливы оценки

$$\begin{gathered} \| u_\infty(t, x) - u_n(t, x) \| \leq aR^{n+1}(1-R)^{-1} 4KCM_0, \\ \| u'_{\infty x}(t, x) - u'_{nx}(t, x) \| \leq R^{n+1}(1-R)^{-1} 4KCM_0. \end{gathered} \tag{32}$$

Единственность построенного T-периодического по t решения системы уравнений (1) следует из единственности T-периодического по t решения системы (20) для каждого n.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1034–1045.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Там же. – 1977. – **13**, № 6. – С. 1981–1992.
4. *Перестюк Н. А.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 5. – С. 517–524.

Получено 03.11.93